This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

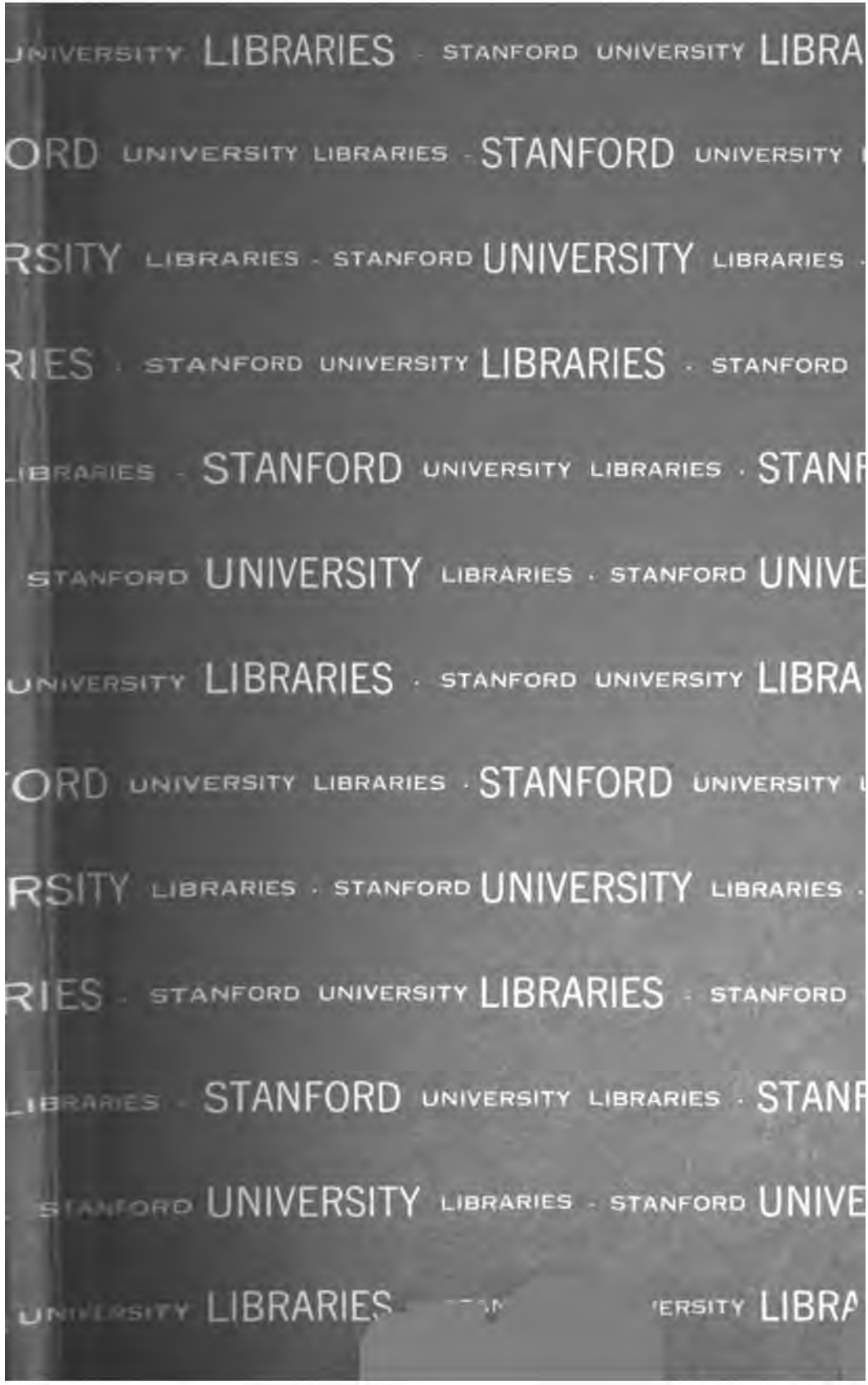
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

BRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFOR
SITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STA
RIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNI
NIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBR
ORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSIT
RSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIE
BRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFOR
SITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STA
RIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNI
FORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBR
TANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSIT
NIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIE
BRARIES STA TY LIBRARIES STANFOR


UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRA
ORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
RSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
RIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANF
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVE
UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRA
ORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
RSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
RIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANF
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVE
UNIVERSITY LIBRARIES ERSITY LIBRA

BRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFOR
ITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STAN
IES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIV
ORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBR
TANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
ERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
BRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFOR
SITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STAN
RIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIV
FORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBR
TANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
NIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
IBRARIE UNIVERSITY LIBRARIES · STANFOR

FD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRA
ANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
IVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
RARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
TY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STAN
ES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVE
RD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRA
ANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
IVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
RARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
ITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STAN
IES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIV
ORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY L

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Liége, Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis!
PH. BRETON.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME VIII. — ANNÉE 1898.

(TOME XVIII DE LA COLLECTION.)

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
47, RUE DES CHAMPS, 47

PARIS
GAUTHIER-VILLARS&FILS
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1898

ABRÉVIATIONS.

BB., Bulletins de l'Académie royale de Belgique.

CR., Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

NAM., Nouvelles Annales de Mathématiques (depuis 1842).

CGQ., Correspondance physique et mathématique, fondée en 1825 par et QUETELET, continuée par QUETELET.

NCM., Nouvelle Correspondance Mathématique (1874-1880).

JME., (ou JMS.), Journal de Mathématiques élémentaires (ou Journal de matiques spéciales), fondé en 1877 par BOURGET, continué par G. DE LONGCHAMPS, ensuite par G. MARIAUD.

IM., Intermédiaire des Mathématiciens, fondé en 1894 par MM. LAIS LEMOINE.

AF., Association française pour l'avancement des sciences.

Crelle, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par CRE 1826, continué successivement par BORCHARDT, KRONECKER et V STRASS, par KRONECKER et par FUCHS (en allemand surtout).

Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par LIOU en 1836, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(2), III, 327-333 signifie : Deuxième série, tome troisième, page à 333.

STANFORD LIBRARY
OCT 21 1960
MATHEMATICS

MATHESIS

SUR L'INTERPRÉTATION D'UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE(1);

par M. F. Dauge, professeur à l'Université de Gand.

Dans les derniers numéros du recueil mathématique *Mathesis*, M. le professeur Mansion a continué la publication de ses intéressantes études sur la géométrie non euclidienne.

Le numéro de juillet 1897, notamment, contient l'extension à la géométrie non euclidienne de Riemann d'une démonstration du théorème suivant : Si une droite est perpendiculaire à deux autres qui se croisent à son pied dans un plan, elle est perpendiculaire à une droite quelconque menée par son pied dans ce plan.

Cette démonstration est irréprochable au point de vue des formules et des calculs sur lesquels elle est fondée; mais on peut se demander comment il faut l'interpréter au point de vue de la géométrie.

On sait qu'il existe deux systèmes de géométrie autres que celui d'Euclide et que, suivant l'auteur de la notice dont il s'agit, un seul de ces systèmes est réalisé dans la nature sans que nous sachions si c'est celui d'Euclide, celui de Lobatchefsky ou celui de Riemann(2). Tout au plus pourrions-nous affirmer que le système qui est réalisé diffère peu du système d'Euclide(*).

Telle n'est pas notre manière de voir. Il s'agit d'abord de savoir ce qu'on entend par système réalisé dans la nature. Selon nous on pourrait dire à la rigueur qu'aucun des trois systèmes n'est réalisé dans la nature, parce que les figures géométriques sur lesquelles nous raisonnons ne sont que de pures abstractions. Ce sont des êtres de raison dont l'idée nous est suggérée, il est vrai, par le monde matériel dans lequel nous vivons,

---

(1) Les chiffres gras dans le texte de l'article de M. Dauge renvoient aux passages de l'article : *Pour la Géométrie non euclidienne* (en abrégé PGNE) où nous exprimons des vues autres que celles de notre savant collègue ; il paraîtra dans la livraison suivante de *Mathesis* (P. Mansion). (2) Voir PGNE, nos I-X.

(*) *Principes fondamentaux de la géométrie non euclidienne de Riemann*, par P. Mansion, appendice III : Sur la portée philosophique de la Métagéométrie. — Voir aussi divers articles publiés dans *Mathesis*.

mais qui cependant ne se montrent jamais dans les corps qui nous e
rent, du moins avec le degré de perfection que nous leur attribuc
imagination. Mais si nous ne rencontrons pas ces figures toutes for
au moins pouvons-nous nous demander si elles sont susceptibles
réalisées et alors nous arrivons à la conclusion qu'il est possible de
truire un grand nombre d'entre elles à l'aide d'instruments et, par
séquent, de les réaliser d'une manière d'autant plus approchée qu
procédés et nos instruments sont plus parfaits. Avec des instruments
faits, un artiste doué d'une habileté parfaite les produirait telles
nous les concevons, et l'on peut dire de celles-là qu'elles sont *réalis*
dans la nature. Et dire d'un système qu'il est réalisé dans la na
cela ne saurait, nous paraît-il, avoir un sens que si cela signifie
est réalisable, c'est-à-dire que les figures de ce système peuven
construire. Il reste donc à savoir si toutes les figures de la géom
non euclidienne peuvent être construites ou si quelques-unes ne sont
analogues aux lignes imaginaires de la géométrie analytique don
considération est fort utile en analyse, mais qu'il ne serait pas poss
d'obtenir par des constructions réelles.

A cette question nous répondons, pour des motifs que nous indiq
rons, que toutes les figures de la *planimétrie* sont réalisables dans
trois systèmes de géométrie, avec cette restriction que l'on ne peut
prendre à la lettre le langage dont on se sert pour démontrer leurs p
priétés dans les deux systèmes non euclidiens et que pour construire
figures des deux planimétries non euclidiennes, il faut s'appuyer sur
géométrie d'Euclide ; mais qu'il n'est probablement pas possible de c
struire les figures non euclidiennes à trois dimensions. Dans le systè
de Riemann l'impossibilité de les construire nous semble même ma
feste, et nous allons essayer de justifier cette assertion.

Dans ce qui va suivre, nous supposerons, comme on le fait habituell
ment, que l'espace est infini (3) et homogène et nous examinerons d'abo
d'où nous viennent les notions de droite et de plan.

L'observation nous montre des corps terminés par des surface
tantôt concaves, tantôt convexes, dont les courbures sont plus ou moi
prononcées et peuvent, dans les deux cas, diminuer indéfiniment; d
lors on conçoit la possibilité d'un état intermédiaire où il n'y a de cou

(3) Selon nous, on doit dire *indéfini* ou *illimité*. Voir PGNE, II. (P. M.).

bure ni dans un sens ni dans l'autre; ainsi l'on acquiert forcément la notion du plan et d'une manière analogue celle de la ligne droite. Ce ne sont donc là que des choses créées par notre imagination, que nous ne voyons jamais réalisées avec le degré de perfection que nous leur attribuons, mais dont la conception est cependant si nette dans notre esprit que, par intuition, nous saisissons quelles en sont les formes et les propriétés fondamentales.

Rappelons que l'on ne peut pas *tout* définir ni *tout* démontrer, puisque pour définir ou démontrer une chose, il faut déjà en avoir défini ou démontré certaines autres. Selon nous, le plan et la ligne droite sont au nombre des choses dont il est impossible de donner de bonnes définitions, parce que les définitions qu'on en donne supposent certaines propositions qu'on ne sait pas démontrer; mais cela ne nuit en rien à la certitude mathématique. Une définition n'a pour but que de nous faire connaître parfaitement l'objet que l'on veut définir. Or, quiconque s'est occupé de géométrie s'est fait, avant d'entendre parler des figures non euclidiennes, une idée claire et précise des propriétés de la ligne droite et du plan (4). C'est par les considérations que nous venons d'indiquer que, peut-être à notre insu, nous avons acquis la connaissance de ces propriétés, et que nous voyons que *ce qui caractérise le plan c'est qu'on peut en détacher une partie quelconque et l'appliquer partout ailleurs sur le même plan ou sur tout autre*, SANS FLEXION ET AVEC OU SANS RENVERSEMENT.

Les géomètres non euclidiens établissent une distinction entre la *droite* et la *géométrie idéales*, et la *droite* et la *géométrie physiques*. Nous avouons ne pas comprendre la nécessité de faire cette distinction. Pour nous il n'y a qu'une droite; c'est celle dont nous venons de parler. Nous ne pouvons l'embrasser tout entière parce qu'elle peut se prolonger à l'infini et elle est idéale en ce sens que nous pouvons, en imagination, nous en représenter une portion plus ou moins étendue; il est d'ailleurs possible de réaliser matériellement celle-ci d'une manière très approchée et d'obtenir, par cette construction, ce que nous croyons être la droite physique des géomètres non euclidiens; mais il n'y a là qu'une distinction sans importance.

De même, la géométrie est idéale en ce sens qu'elle ne s'occupe pas

(4) Selons nous, on n'a jusqu'alors que l'idée générale de la ligne droite. Voir PGNE, III, XI. (P. M).

d'objets matériels, mais d'êtres abstraits; ceux-ci, à la vérité, dans notre entendement par la contemplation de la nature, et priétés dont ils jouissent sont applicables à l'étude des formes mesure des objets qui tombent sous nos sens; mais nous ne voy qu'il faille pour cela parler d'une géométrie physique, pas plus q parle d'une arithmétique physique parce que les nombres s trouvent leur application dans une foule de questions relatives au matériel.

Les propriétés de la ligne droite, telle que nous venons de la dérer, sont inconciliables, comme nous le verrons, avec celles q attribue aux droites non euclidiennes; celles-ci ne sont donc p lignes droites; elles sont autre chose et leurs propriétés s'acc parfaitement avec celles des lignes géodésiques tracées sur des su sphériques ou pseudosphériques. C'est ce qui nous fait dire q figures de la planimétrie non euclidienne, qui ne se comprennen dans l'hypothèse du plan, se conçoivent au contraire très bien e vent être réalisées à la condition qu'on substitue une sphère à ce nomme plan dans le système de Riemann et une pseudosphère à ce appelle plan dans le système de Lobatchefsky. A ce qu'on nomme droite dans le premier cas il faut substituer un grand cercle; à ce nomme ligne droite dans le second cas il faut substituer une ligne g sique de la pseudosphère et ce serait alors par une confusion de lan que l'on appliquerait les noms de droite et de plan.

M. E. Beltrami a très bien fait voir pourquoi cette confusio est possible et pourquoi l'on peut raisonner sur les surfaces pseudos riques et sur leurs lignes géodésiques comme si c'étaient des plan des droites situées dans ces plans. Cela tient à ce qu'une portion q conque d'une surface pseudosphérique peut être appliquée sur une a portion quelconque de cette même surface par simple *flexion*; et cel telle façon que si sur chacune des deux portions de surface que superpose il existe une ligne géodésique et que l'on fasse coïncider d points quelconques de l'une de ces lignes avec deux points de l'au ces lignes coïncident dans toute leur étendue. Cette règle ne sou d'ailleurs aucune exception, deux lignes géodésiques distinctes ne p vant jamais, sur ces surfaces, avoir deux points communs. Il n'y

(5) Voir PGNE, XX.

donc dans les démonstrations aucune différence entre ce cas et celui où l'on superpose deux plans en faisant coïncider deux points d'une droite située dans l'un de ces plans avec deux points d'une droite située dans l'autre, si ce n'est que la superposition ne peut se faire qu'avec flexion d'au moins une des surfaces dans le premier cas, tandis qu'il n'y a pas flexion dans le second.

Il résulte de là que dans tous les théorèmes de la planimétrie qui se démontrent par la superposition des figures égales, il est impossible d'établir une distinction entre le cas où il s'agit d'une surface plane contenant des figures formées par des droites et celui où il s'agit d'une surface pseudosphérique contenant des figures formées par des lignes géodésiques ; *la condition de la rigidité n'est pas impliquée par la définition qu'on donne du plan en géométrie non euclidienne*, et on ne la fait pas entrer dans les démonstrations ; on ne peut donc écarter, comme on devrait le faire pour rester dans la géométrie euclidienne, la possibilité de la superposition avec flexion. Pour citer un cas analogue et qui nous est plus familier, remarquons que tous les théorèmes de la planimétrie euclidienne, sans exception, resteraient vrais si l'on venait à considérer les figures comme tracées sur un cylindre, les droites des figures planes étant remplacées par des hélices sur le cylindre. Si l'on donnait au cylindre le nom de plan et aux hélices le nom de droites, on retrouverait tous les théorèmes de la planimétrie euclidienne. Il est bien entendu que, le plan s'étendant à l'infini dans tous les sens, il faudrait, dans le cas où la base du cylindre serait une courbe fermée, considérer la surface cylindrique comme pouvant être couverte d'une infinité de feuillets superposés.

Tout se passe d'une manière analogue dans la planimétrie de Lobatchefsky, mais avec cette différence que la somme des angles d'un triangle formé par trois lignes géodésiques sur une surface pseudosphérique est plus petite que deux droits, au lieu d'être égale à deux droits comme dans un triangle formé par trois lignes droites; dès lors on a l'explication des théorèmes en apparence étonnants de cette planimétrie. Tandis que, grâce à une fausse terminologie, on croit raisonner sur des plans contenant des droites, on raisonne, en réalité, sur des surfaces pseudosphériques et leurs lignes géodésiques ; par la confusion que l'on établit entre les noms de choses qui, tout en étant différentes, ont certaines propriétés communes, on rend identiques les démonstrations qui

s'appliquent aux deux cas et, par conséquent, ces démonstratio
nécessairement conduire à la conclusion que la somme des a
triangle est égale à deux droits ou qu'elle est moindre que de
suivant qu'on admet le postulatum d'Euclide ou qu'on le rejett

C'est pour cela qu'on ne pourra pas démontrer le dit postu
la superposition des figures égales aussi longtemps qu'on n'i
pas dans les démonstrations la condition de la rigidité du pla
semble bien difficile, sinon impossible (6).

En résulte-t-il que la vérité de ce postulatum doive être révo
doute (7)? Nullement, puisqu'on ne saurait *tout* démontrer; le
tum d'Euclide est une des vérités premières qu'il faut admettre
déduire les autres; il se présente à nous de la manière la plus na
deux droites perpendiculaires à une troisième dans un plan ne
se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge; mais si l'on
l'une d'elles vers l'autre, si peu que ce soit, on a l'intuition (8) qu
toujours finir, en les prolongeant suffisamment, par trouver un p
elles se coupent. On conçoit très bien que pour qu'il en fût aut
elles devraient avoir une forme différente de celle sous laquell
nous les représentons : elles devraient être courbes. Il est certai
nous avons, par intuition, la connaissance de la forme de la ligne dr
et que l'idée que nous nous faisons de cette forme exclut celle
courbure, puisque le caractère d'une ligne courbe est de n'être
dans aucune de ses parties. Il est certain aussi qu'on ne peut se r
senter des lignes ayant les propriétés que l'on attribue aux droi
Lobatchefsky sans leur supposer une forme qui permette à deux d
droites d'être asymptotes l'une de l'autre et qui les fasse ressemble
ou moins à des hyperboles, image qui entraîne avec elle l'idée de cour

Remarquons ensuite que si le postulatum d'Euclide n'est pas
on peut, en faisant croître suffisamment les trois côtés d'un tria
rendre la somme des angles aussi petite qu'on le veut, en même t
que sa surface tend vers un certain maximum déterminé, qu'i
impossible de dépasser. Cela ne peut se concilier avec notre manièr
concevoir la forme de la ligne droite et avec l'idée d'un espace infi
nous fait conclure que le postulatum est vrai (10).

---

(6) Voir PGNE, XXI. (7) Voir PGNE, XXII. (8) Voir PGNE, XXIII.
(9) Voir PGNE, XXIV. (10) Voir (3) et PGNE, II.

On fait valoir en faveur de la géométrie non euclidienne que les trois géométries peuvent s'établir par le raisonnement avec la même rigueur. Mais de ce que les raisonnements sur lesquels on fonde les systèmes non euclidiens n'impliquent aucune contradiction, il n'est pas permis de conclure qu'ils reposent sur des bases réelles. Nous sommes conduits, par intuition, à admettre l'existence des postulats qui caractérisent la géométrie d'Euclide; si ensuite, écartant ces postulats, nous suivons dans les deux géométries non euclidiennes toutes les conséquences des nouvelles hypothèses dans lesquelles nous nous plaçons ainsi, nous voyons plus clairement que nous trouvons des résultats manifestement contraires à la nature des choses et dès lors nous pouvons conclure, comme dans toute démonstration par la réduction à l'absurde, que le point de départ est faux et qu'en conséquence les deux postulats d'Euclide doivent être admis si l'on veut rester dans la géométrie réelle.

Nous reviendrons plus loin sur la question de la forme de la ligne droite qui a une importance capitale. C'est une de celles qui se trouvent à la base de la géométrie; car, si nous ne connaissions intuitivement cette forme, nous n'aurions aucun moyen de la déterminer, pas plus que celle d'aucune autre ligne, et la science des figures ne reposerait plus sur aucune donnée certaine.

D'après ce qui précède nous ne voyons aucun motif pour jeter sur le postulatum d'Euclide un doute (11) qui semblerait entourer la planimétrie de Lobatchefsky d'une sorte de mystère, alors que M. E. Beltrami en a donné une explication bien simple en prouvant que, si elle ne se comprend pas dans l'hypothèse du plan, elle devient très claire quand on substitue au plan une pseudosphère, ce qui permet de réaliser toutes les figures de cette planimétrie.

Mais, s'il est possible de construire ainsi les figures dites *planes* de Lobatchefsky, nous croyons qu'il n'en est pas de même des figures à trois dimensions de ce célèbre géomètre et nous avons indiqué(*) quelques motifs pour lesquels nous considérons la réalisation de ces figures comme une impossibilité.

En ce qui concerne la planimétrie de Riemann, plus singulière encore,

---

(11) Voir PGNE, note XXV.

(*) Voir : *Mathesis*, janvier 1896, p. 10 et *Cours de Méthodologie mathématique*, 2e éd., p. 213.

en apparence, que celle de Lobatchefsky, elle s'explique aussi, plus simplement que cette dernière. Il est aisé de voir que, dan également, on donne les noms de plans et de droites à des surfa des lignes qui ne sont ni planes ni droites (12).

Cette géométrie est fondée sur le rejet du postulat suivant droites ne peuvent entourer un espace ou, en d'autres terme droites distinctes ne peuvent avoir deux points communs sans fondre. Si, rejetant ce postulat, on admet qu'il existe deux distinctes ayant deux points communs, on est forcé d'admetti chaque point de l'espace il en correspond un autre, qui est opposé, qui est tel que toute droite passant par l'un de ces point aussi par l'autre et que la distance de ces deux points opposés, la même, constitue un maximum que ne peut dépasser la dista deux points quelconques de l'espace (**). On est aussi obligé d'a tre que la droite est une ligne fermée, rentrante sur elle-même ; s que s'il était possible de suivre indéfiniment une ligne droite l'espace, en cheminant toujours dans le même sens, on finira revenir au point de départ. Le plan serait, dans cette même hypo une surface fermée analogue à la sphère.

Ces notions ne sont-elles pas en contradiction avec notre manièr concevoir l'espace? Celui-ci étant infini, peut-on admettre qu'il impossible de s'éloigner d'un point donné, au moins par la pe jusqu'à une distance quelconque, quelque grande qu'elle soit?

Les propriétés que l'on attribue à la droite et au plan en géom riemannienne auraient sans doute été considérées comme absurdes savants géomètres ne leur avaient donné en apparence un certain dement en les démontrant à l'aide de raisonnements dont la rigueu peut être contestée quand on accepte le point de départ, c'est-à- quand on suppose que deux droites distinctes peuvent avoir deux p communs ; mais puisque ces démonstrations rigoureuses conduisent conséquences inacceptables, c'est que le point de départ n'est pas v

Il est à observer, d'ailleurs, que les démonstrations de la *planim* riemannienne et leurs conséquences deviennent parfaitement rigoure

---

(12) Voir PGNE, XX.

(**) Voir notamment : *Premiers principes de la Métagéométrie ou Géom générale* par P. Mansion, supplément au n° d'octobre 1896 de *Mathesis*.

quand on les interprète convenablement. Ce qu'on nomme plan dans ce système donnons-lui le nom de sphère; ce qu'on nomme ligne droite appelons-le grand cercle de la sphère et tout devient d'une parfaite clarté.

Mais ici encore, s'il est possible de concevoir et de construire les figures dites *planes* de Riemann, on ne voit pas comment on pourrait construire les figures à trois dimensions dans ce système(13).

Prenons, par exemple, cette définition de la ligne droite donnée par Cauchy et admise par les géomètres non euclidiens : *La ligne droite* AB *est une ligne telle que chacun de ses points est distant de* A *et de* B *comme ne l'est aucun autre point de l'espace.* Cette définition, ou plutôt cette proposition, exacte d'une manière absolue quand il s'agit d'une droite proprement dite, peut être étendue à un grand cercle d'une sphère, si l'on ajoute la restriction que l'on ne considère que l'espace à deux dimensions constitué par la surface de la sphère; on a alors une droite riemannienne; deux des droites ainsi définies se coupent en deux points opposés puisque ce sont deux grands cercles qui se coupent aux extrémités d'un diamètre, et toutes celles qui passent par l'un de ces points passent aussi par l'autre. Les grands cercles jouissent donc sur la sphère des propriétés attribuées aux droites riemanniennes dans le plan riemannien.

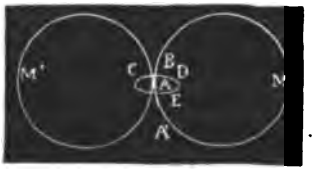
Prenons maintenant cette autre définition donnée par Leibnitz : *La droite est le lieu des points immobiles d'un corps qui se meut, deux de ses points restant fixes;* la considération des trois dimensions de l'espace intervient nécessairement ici et l'on ne voit pas que cette définition puisse s'accorder avec les propositions de la géométrie riemannienne, comme le voudraient les géomètres non euclidiens.

Conçoit-on qu'une ligne fermée puisse tourner autour de deux de ses points sans que ses autres points sortent du lieu qu'ils occupent(14)? C'est cependant ce qu'exige la définition et ce qu'on doit admettre en géométrie riemannienne. Et de plus, si l'on fait tourner autour de cet axe un système de points qui s'y trouvent invariablement liés, quelles que soient la forme et l'étendue de ce système, tous ses points doivent passer successivement dans l'intérieur de la ligne fermée autour de laquelle ils tournent comme au travers d'un anneau. Un tel mouvement est-il possible sans qu'il y ait déformation(15)? Pour mieux voir à quelles

(13) Voir PGNE, XXVI. (14) Voir PGNE, XXVII. (15) Voir PGNE, XXVIII.

étranges conséquences cela conduirait, considérons le solide terminé la surface fermée d'un plan riemannien comme invariablement lié à un droite située dans ce plan et faisons faire au plan une demi révolutio autour de cette droite regardée comme un axe fixe; le plan ainsi re versé doit s'appliquer sur lui-même, mais dans une position telle que l face qui était primitivement tournée vers l'intérieur se trouve maint nant à l'extérieur et réciproquement. Le solide invariablement lié l'axe de rotation, qui occupait l'intérieur du plan riemannien, doit don après cette demi révolution, occuper tout l'espace extérieur, tandis q l'espace qui était extérieur doit se trouver à l'intérieur. Ces deu espaces devraient donc pouvoir, par rotation autour d'un axe fix s'appliquer exactement l'un sur l'autre? On ne saurait échapper à cet absurdité qu'en soutenant, comme le fait notre savant contradicteu que la surface fermée qu'il appelle plan riemannien divise l'espa riemannien en deux parties identiques dont aucune ne peut être dite pl que l'autre intérieure ou extérieure à cette surface (16). Mais la rais se refuse à admettre qu'une surface fermée puisse ne pas entourer compl tement une région intérieure limitée de toutes parts, et nettement di tincte d'une région extérieure illimitée; et elle nous montre clairem que les deux régions ainsi séparées ne peuvent pas être identiques (17

D'autres propriétés des figures riemanniennes à trois dimensions s semblent pas moins contraires à la réalité des choses. Soit un éléme



linéaire infiniment petit AB et, pour fix les idées, plaçons-le verticalement. Si on prolonge indéfiniment on obtient une droi qui, dans le système riemannien, est une lig fermée ABMA'. Comment se fait-il qu'u tel élément infiniment petit détermine com plètement cette ligne fermée et suffit pour fixer sa position à droi en AM plutôt qu'à gauche en AM', en avant plutôt qu'en arrière l'élément initial (18)? Cet élément pourrait suffire pour détermin complètement une ligne si celle-ci devait satisfaire à la condition d'êt tracée sur une surface, comme un grand cercle sur une sphère; mais n'en est pas de même quand cette condition n'est pas imposée. En outr

(16) Voir PGNE, XVII. (17) Voir PGNE, XVI. (18) Voir PGNE, XXIX.

on peut faire passer par A des éléments linéaires en nombre infini, dirigés dans tous les sens et déterminant une infinité de droites qui toutes passent par le point A′ opposé à A. De sorte que si l'on s'éloigne de A, dans une direction quelconque, d'une quantité égale au maximum de la distance qui, en géométrie riemannienne, peut séparer deux points quelconques de l'espace, on doit toujours se trouver au même point A′. Quand on dit que tous les chemins conduisent à Rome on ne sous-entend pas qu'il y vont tous en ligne droite. Ici, au contraire, si l'on s'éloigne indéfiniment d'un point quelconque A, dans quelque direction que ce soit, en cheminant en ligne droite, on arrive toujours finalement au point A′ et tous les chemins parcourus pour y aboutir sont égaux. Peut-on imaginer qu'une conception si bizarre soit l'expression de la réalité (19)?

On ne comprend pas non plus qu'une droite riemannienne puisse être perpendiculaire à un plan riemannien. En effet, si l'on considère autour de A un élément superficiel CDE, en prolongeant indéfiniment tous les éléments rectilignes passant par A dans cette surface infiniment petite, on obtient un plan riemannien qui contient le point A′ opposé à A. Si l'on considère maintenant une perpendiculaire élevée en B sur ce plan, lequel est une surface fermée, elle doit avoir une partie intérieure et une partie extérieure au plan; car après avoir parcouru un certain chemin ABM..., elle doit percer de nouveau le plan au point A′ opposé à A pour revenir finalement au point de départ; mais si l'espace est homogène comme on le suppose dans toutes les démonstrations sur les figures géométriques, le plan est semblable à lui-même tout autour du point A et l'espace au dessus de ce plan est aussi partout semblable à lui-même; de sorte qu'on ne voit pas que la perpendiculaire AB puisse choisir un chemin plutôt qu'un autre pour aller en A′ et que, par conséquent, s'il existe une telle perpendiculaire, il doit y en avoir une infinité(20).

Pour tous ces motifs, nous concluons que l'existence des figures riemanniennes à trois dimensions et, en particulier, celle d'une droite riemannienne perpendiculaire à un plan riemannien, est impossible.

Et cependant la démonstration (21) par laquelle M. Mansion établit, comme application du théorème de Simson-Stewart, qu'une droite perpendiculaire à deux autres qui se croisent à son pied dans un plan riemannien est perpendiculaire à ce plan, ne repose que sur des for-

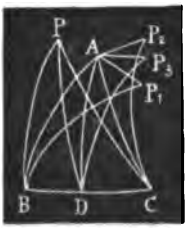
(19) Voir PGNE, XXX. (20)Voir PGNE, XXXI. (21) Voir PGNE, XXXII.

mules exactes et sur des calculs exacts également ; mais la tirée de ces calculs doit être rejetée (et elle devrait l'être alors l'on donnerait, comme on peut le faire, une autre forme à stration) parce que l'hypothèse sur laquelle on se fonde doit ê elle-même comme une impossibilité. Les calculs en question leurs susceptibles d'une interprétation géométrique (**) très entièrement satisfaisante.

Nous allons, en effet, les reprendre en y attachant une au fication et ils nous donneront alors la démonstration d'un thé géométrie euclidienne.

Considérons le triangle sphérique ABC où l'on a mené du som arc du grand cercle AD, rencontrant le côté BC au point D, si B et C. Soient, sur la même sphère, deux arcs de grands cercl $AP_1 = AP_2$, respectivement perpendiculaires à AB et AC e les arcs de grands cercles BP_1 et CP_2 ; construisons ensuite un BPC dans lequel les côtés BP et CP soient respectivement égau et CP_2 et tirons PD ; enfin construisons le triangle ADP_3 dan $AP_3 = AP_1 = AP_2$ et $DP_3 = DP$. Je dis que ce triangle est rectang

En effet, dans le triangle ABC on a, d'après le théorème de métrie sphérique analogue à celui de Simson-S



$$\cos AD \cdot \cos BC = \cos AB \cdot \sin DC + \cos AC \cdot$$

Le triangle PBC donne la relation analogue

$$\cos PD \cdot \cos BC = \cos PB \cdot \sin DC + \cos PC \cdot$$

Multiplions la première de ces relations par cos $\cos AP_1 = \cos AP_2$ et retranchons-en ensuite la se en remarquant que dans les triangles rectangles ABP_1 et ACP_2 o relations

$\cos BP_1$ ou $\cos BP = \cos AB \cdot \cos AP_1$ et $\cos CP_2$ ou $\cos CP = \cos AC \cdot c$

il viendra, après division par cos BC,

$$\cos AD \cdot \cos AP_3 = \cos PD = \cos DP_3 ;$$

par conséquent, le triangle ADP_3 est rectangle en A.

On obtient donc ainsi trois triangles sphériques rectangles ayan hauteurs égales $AP_1 = AP_2 = AP_3$, ayant pour bases respectivement

---

(**) Voir PGNE, XXXIII.

AC, AD et dont les hypoténuses sont respectivement égales à PB, PC, PD ; mais il n'est pas possible de les placer de manière à faire coïncider les hauteurs tout en laissant invariables les positions des bases ; et c'est cette coïncidence qu'il faudrait pouvoir réaliser pour obtenir la perpendiculaire commune à ces bases que suppose la démonstration de M. Mansion.

En résumé, nous pensons que les figures non euclidiennes à trois dimensions sont impossibles, à moins qu'au lieu de considérer l'espace comme homogène (33) on ne lui attribue des propriétés toutes différentes et qu'il serait peut-être bien difficile de définir. En cela nous sommes d'un avis opposé à celui des mathématiciens qui prétendent que, parce qu'on ne peut pas démontrer le postulatum d'Euclide, ce sont peut-être les figures euclidiennes, aussi bien planes que solides, qui ne peuvent pas être réalisées.

A ce compte nous ne pourrions plus être sûrs de rien, puisqu'il est impossible de *tout* démontrer et que l'on est forcé d'admettre certains postulats sans démonstration ; par exemple, si quelqu'un s'avisait de dire qu'il n'est pas certain qu'une droite qui pénètre dans un triangle doit en couper une deuxième fois le périmètre pour en sortir ; ou bien encore s'il prétendait qu'il se peut que les figures géométriques ne soient réalisables dans aucun des trois systèmes de géométrie, parce qu'il n'est pas certain qu'une figure dont nous supposons l'existence dans une région déterminée de l'espace puisse exister aussi dans toute autre région, on ne pourrait lui répondre qu'en invoquant le sentiment de l'évidence (34) ; or, c'est ce sentiment qui nous fait aussi admettre les deux postulats (35) qui distinguent la géométrie euclidienne des deux autres ; et ce sentiment persiste en nous, fortifié plutôt qu'affaibli, après une étude attentive des théorèmes de la planimétrie non euclidienne. Cette étude nous montre que tous les théorèmes dont il s'agit sont susceptibles d'une interprétation très simple quand on admet les propositions suivantes que les géomètres non euclidiens ne veulent pas accepter : le plan, en géométrie lobatchefskienne, est une pseudosphère et, en géométrie riemannienne, c'est une sphère (36). Si, comme les non euclidiens, on rejette ces propositions, les notions de droite et de plan deviennent incompréhensibles et l'on est conduit à des conséquences qui semblent contraires à toute conception rationnelle (37) des figures géométriques et qui démon-

(33) Voir PGNE, XXXIV. (34) Voir PGNE, XXXIV. (35) Voir PGNE, XXII. (36) Voir PGNE, XX. (37) Voir PGNE, XIX.

trent indirectement la vérité des deux postulats fondamentaux de la géométrie euclidienne.

Pour terminer, faisons observer que les moyens proposés pour vérifier expérimentalement quel est le système de géométrie sont complètement illusoires. L'un de ceux-ci consisterait à *déterminer la forme de la ligne droite*(*). Mais pour déterminer une ligne et, par conséquent, parvenir à la connaître sa forme, on doit la rapporter à des lignes droites(38). Comment pourrait-on déterminer la forme d'une ligne quelconque et en particulier celle d'une ligne droite, si celle-ci nous était elle-même inconnue ?

Un autre moyen consisterait à s'assurer par des mesures, celui des trois systèmes de géométrie dont les formules trigonométriques sont vérifiées. Or, la première condition pour pouvoir mesurer les côtés d'un triangle est de posséder une unité de longueur bien définie et pouvoir tracer les côtés du triangle pour y appliquer cette unité de longueur. On se demande comment on pourrait s'assurer qu'un triangle est bien une ligne et que l'unité de longueur est droite et bien divisée alors qu'on ne peut même y avoir doute sur la forme de la ligne droite. Voici comment M. Mansion s'exprime à propos de la mesure d'une distance : « Nous disons que deux points sont à telle ou telle distance quand nous pouvons « porter entre ces points une règle divisée, supposée elle-même irréprochable, un nombre minimum de fois »(**). Mais on ne pourra pas savoir si cette règle est droite et bien divisée puisqu'on ignore la forme de la ligne droite. M. Mansion fait observer, il est vrai, qu'un fil tendu donne l'image de la ligne droite et la surface d'une eau dormante celle d'un plan(***). Mais nous pensons qu'un mathématicien qui, avec raison, tient à la rigueur et qui n'admet pas qu'on puisse connaître par intuition la forme d'une ligne droite et celle d'un plan, ne saurait considérer ces images comme susceptibles de nous en donner, à défaut de tout autre moyen, une idée exacte. Car il sait trop bien qu'un fil tendu

---

(*) De Tilly : *Essai de Géométrie analytique générale*, p. 38.

(38) Voir PGNE, XXXV.

(**) P. Mansion : *Premiers principes de la Métagéométrie ou Géométrie générale*, p. 42.

(***) P. Mansion : *Premiers principes de la Métagéométrie*, p. 34, et *Mathesis*, janvier 1896, p. 13.

n'est pas droit et que la surface d'une eau dormante n'est pas plane(29).

Concluons donc que si, par impossible, les postulats sur lesquels repose la géométrie euclidienne n'étaient pas vrais, nous n'aurions aucun moyen expérimental de nous en assurer(30).

Mais, selon nous, il n'en est pas ainsi. Pour établir les bases de la science de l'étendue nous devons forcément faire une certaine part à l'intuition; en voulant, sous prétexte de rigueur, trop restreindre cette part, on en vient fatalement à obscurcir les premières notions. La ligne droite et le plan sont des abstractions qui n'existent que dans notre entendement, bien que l'idée nous en soit suggérée par les objets matériels qui nous entourent. Nous avons expliqué plus haut comment, par intuition, nous saisissons quelles en sont les formes et les propriétés fondamentales; et c'est sur ces propriétés que repose la géométrie d'Euclide dont les propositions, si claires, servent de bases à tant d'applications utiles et nous permettent d'obtenir des représentations matérielles des figures géométriques; elles nous permettent de construire, du moins approximativement, toutes les figures de la géométrie euclidienne et nous font concevoir en même temps la possibilité de réaliser les figures des deux *planimétries* non euclidiennes parce que celles-ci rentrent, comme cas particuliers, dans la géométrie euclidienne.

Quant aux propositions de la *stéréométrie* non euclidienne nous sommes loin de prétendre qu'il soit impossible d'y attacher un sens raisonnable(31). Il en est de ceci comme de l'espace à n dimensions(32) dont les analystes ont établi les formules en y adaptant une terminologie analogue à celle de la géométrie analytique, bien que l'espace réel n'ait que trois dimensions. On connaît déjà des applications de ces formules et on trouvera sans doute beaucoup d'autres. De même, les formules de la géométrie non euclidienne peuvent être d'un puissant secours en analyse et, comme l'a fait remarquer notre savant collègue, Lobatchefsky a pu trouver des intégrales définies nouvelles en se fondant sur la géométrie non euclidienne solide; mais cela ne prouve pas que ces solides existent, pas plus que les formules de l'espace à n dimensions ne prouvent que l'espace réel peut en avoir plus de trois. Il ne faut pas oublier que nos formules peuvent bien, quand elles sont exactes et quelle que soit la

(29) Voir PGNE, XXXVI. (30) Voir PGNE, XIV. (31) Voir PGNE, XVIII. (32) Voir PGNE, XXXVII.

manière dont elles ont été établies, s'appliquer aux choses mais qu'elles ne peuvent ni créer ces choses, ni les modifi prouver, par elles-mêmes, que ces choses existent. Il ne su d'invoquer des formules algébriques réelles pour démontr des figures non euclidiennes qui les ont fait trouver. Ne dé pas, à l'aide des imaginaires, des formules rigoureuses, n que des grandeurs réelles ?

Toutefois, comme nous le rappelons plus haut, tous les théo planimétrie non euclidienne sont déjà expliqués et on parvi être à expliquer aussi ceux de la stéréométrie; nous venon donner un exemple d'interprétation d'un théorème de st riemannienne et nous pensons que, comme dans ce cas parti simple, toute saine interprétation des propositions de la géo euclidienne à trois dimensions, devra toujours reposer les pr la géométrie euclidienne.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que nous considérons l'é géométrie non euclidienne comme indispensable à ceux qu connaître à fond les bases de la science des figures. Nous avon signalé, dans notre enseignement, la facilité avec laquelle l sance des théorèmes de Lobatchefsky fait découvrir les postul dans les prétendues démonstrations du postulatum d'Euclid sommes les premiers à rendre hommage au génie du grand géo a réussi à démontrer, par une admirable synthèse, mais sous nom, les principales propriétés des lignes géodésiques des surfa dosphériques (22).

SUR LES GROUPES POLAIRES DES SYSTÈMES DE P0

par M. Stuyvaert (Gand).

1. Soit, sur une droite, un système (P) de n points P_1, P_2, P Le premier système polaire (R) d'un point O de la droite est u de $n-1$ points R dont chacun satisfait à la relation

$$\Sigma\left(\frac{1}{OR}-\frac{1}{OP_i}\right)\left(\frac{1}{OR}-\frac{1}{OP_j}\right)\ \cdots\ =0,$$

le nombre des parenthèses étant $n-1$; et réciproquement, to

---

(22) Voir PGNE, XXXVIII.

R qui satisfait à cette relation appartient au premier système polaire de O; donc l'égalité précédente, si l'on y regarde $\frac{1}{OR}$ comme inconnue, a pour racines les inverses des distances OR_i. Le terme en $\left(\frac{1}{OR}\right)^{n-1}$ a pour coefficient $C_{n,1} = n$, et le terme tout connu est

$$(-1)^{n-1} \Sigma \frac{1}{OP_i} \cdot \frac{1}{OP_j} \quad \cdots \quad (n-1 \text{ facteurs}).$$

Donc on a

$$n \times \frac{1}{OR_1 \,.\, OR_2 \,.\, OR_3 \ldots OR_{n-1}} = \Sigma \frac{1}{OP_i} \cdot \frac{1}{OP_j} \quad \cdots \quad (n-1 \text{ facteurs}).$$

On trouvera de même, pour le système polaire (ρ) d'ordre k du point O,

$$C_{n,k} \frac{1}{O\rho_1 \,.\, O\rho_2 \,.\, \ldots \,.\, O\rho_{n-k}} = \Sigma \frac{1}{OP_i} \cdot \frac{1}{OP_j} \quad \cdots \quad (n-k \text{ facteurs}).$$

3. D'après ce qui précède, un groupe (P) de n points est déterminé quand on se donne un de ces points, ainsi que le premier système polaire d'un point donné O.

En effet, les données déterminent les groupes polaires successifs de O par rapport à (R); or ceux-ci coïncident avec les groupes polaires, d'ordre 2 à $n-1$, du point O relativement au système cherché P; donc ils déterminent, d'après la dernière égalité, les divers coefficients de l'équation ayant pour racines les valeurs de $\frac{1}{OP}$, à l'exception du terme tout connu de cette équation. Mais ce dernier terme est déterminé par le fait que l'une des racines de l'équation est donnée.

Plus généralement, si l'on donne k points du groupe inconnu (P) et le système polaire, d'ordre $n-k$, de O par rapport à (P), ce groupe (P) est déterminé (sauf dans des cas exceptionnels).

Analytiquement, si le groupe (P) est représenté par une forme, les groupes polaires le sont par des formes dérivées successives, et, pour remonter des dernières à la première, il faut une série d'intégrations, dont chacune introduit une constante arbitraire; ces constantes seront déterminées en général, si l'on donne un nombre égal de points-racines du groupe (P).

3. Théorème. — *Si, sur $n+1$ droites issues d'un point* O, *on a des groupes de n points* P, *et si les premiers systèmes polaires* R *de* O *par rap-*

port à tous ces groupes sont sur une même courbe d'ordre $n+1$ *groupes de points* P *sont sur une même courbe d'ordre*

En effet, prenons, sur les deux premières droites, n poin troisième $n-1$ points, sur la quatrième $n-2$ points, et ai jusqu'à la dernière droite sur laquelle on considère un seul po $\frac{n(n+1)}{2}+n$ ou $\frac{n(n+3)}{2}$ points qui déterminent une d'ordre n.

La droite polaire de O par rapport à la courbe (C) passe pa polaires de O relativement aux deux premiers groupes de poi aussi par le point analogue sur la troisième droite, car ces t sont sur une même droite, polaire de O relativement à la cou mais alors (C) passe par le dernier point du troisième groupe, peut compléter de deux façons différentes un groupe de n poi seul est inconnu, quand le point polaire de O est donné.

Ensuite, la conique polaire de O relativement à (C) passe pa couples polaires de O relatifs aux trois premiers groupes de donc aussi par le couple polaire de O relatif au quatrième grou a là huit points situés sur une même conique, polaire de O pa à la courbe des R. Donc (C) doit passer par les deux p complètent le quatrième groupe P, puisque l'on ne peut com deux manières un groupe de n points dont deux sont inconnu le couple polaire de O est donné.

Le même raisonnement se poursuit de proche en proche.

4. Cas particuliers. — I. On joint un point O aux sommets d'un triangle par des droites qui rencontrent les côtés opposés tivement en A_1, B_1, C_1. Les côtés du triangle forment un sys troisième ordre; si la droite polaire de O par rapport à ce systè contre OA, OB, OC en M, N, P, on a

$$\frac{2}{OA}+\frac{1}{OA_1}=\frac{3}{OM}, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{\frac{2}{3}OA}+\frac{1}{OA_1}=\frac{2}{\frac{2}{3}OM},$$

et deux autres relations semblables. Donc si A_2, B_2, C_2 sont les n de OA, OB, OC, les conjugués harmoniques de O sur A_1A_2, B_1B_2 sont en ligne droite (aux $\frac{2}{3}$ de OM, ON, OP); donc *les six* A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 *sont sur une conique.*

Si O est l'orthocentre, cette conique est le cercle des neuf p

si O est le barycentre, c'est l'ellipse passant par les milieux des côtés et ayant pour centre O, etc.

II. Une conique touche les côtés BC, OB, OC d'un triangle respectivement en D, E, F; OD coupe encore la conique en G; en considérant la courbe et sa tangente BC comme un système du troisième ordre, on démontre, comme ci-dessus, que B, G, C et les milieux de OD, OE, OF sont sur une même conique.

Les deux propriétés précédentes peuvent être généralisées par projection.

III. Si l'on a deux points A, B, et si l'on veut trouver un terne AAX, ayant un point double en A, et tel que A, B soit le couple polaire d'un point O de la droite par rapport à AAX, on doit avoir

$$\frac{3}{OA \cdot OB} = \frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{2}{OA \cdot OX} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{OX} = \frac{1}{\frac{1}{3}OB} - \frac{1}{OA}$$

X est le conjugué harmonique de O sur A'B', A' étant symétrique de A par rapport à O et OB' étant le tiers de OB.

Si l'on fait cette construction sur quatre droites issues d'un point O, et rencontrant une conique en quatre points A et quatre points B, il existe une cubique touchant ces quatre droites aux points A et les coupant ensuite aux points X.

On pourrait imaginer encore d'autres cas particuliers.

PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE;

par M. A. Boutin.

I. *Trouver 47 entiers positifs en progression arithmétique, et tels que la somme de leurs carrés soit un carré.* L'équation du problème est :

$$x^2 + (x+r)^2 + (x+2r)^2 + \cdots + (x+46r)^2 = k^2,$$

ou bien, en posant $k = 47k'$,

$$x^2 + 2.23rx + 23.31r^2 - 47k'^2 = 0\,; \quad \text{d'où} \quad x = y - 23r,$$

avec
$$47k'^2 - 46z^2 = y^2, \tag{1}$$

où
$$z = 2r. \tag{2}$$

L'équation (1) est complètement résolue par les formules :

$$k' = 46(a-b)^2 + a^2, \quad z = 47(a-b)^2 - b^2, \quad y = 46b^2 - 47a^2,$$

où a et b sont des entiers indéterminés; toutefois, à cause de (2) il faut prendre a pair.

Le problème a donc une infinité de solutions. Ainsi $a = 8$, $b = 7$ donnent

$$731^2 + 732^2 + 733^2 + \cdots + 777^2 = 5170^2;$$

De même, $a = 6$, $b = 5$ donnent

$$289^2 + 300^2 + 311^2 + \cdots 795^2 = 3854^2$$

II. *Trouver* 59 *entiers positifs en progression arithmétique, et tels que la somme de leurs carrés soit un carré.* L'équation du problème est

$$x^2 + (x + r)^2 + \cdots + (x + 58r)^2 = 59^2k^2$$

qui se ramène à

$$59k^2 = y^2 + 290r^2 \qquad (3)$$

où

$$x = y - 29r.$$

L'équation (3) admet les solutions :

$$r = 1, \quad y = 51, \quad k = 7 \quad \text{d'où} \quad x = 22,$$
$$r = 1, \quad y = 67, \quad k = 9 \quad \text{d'où} \quad x = 38,$$

qui donnent

$$22^2 + 23^2 + 24^2 + \cdots + 80^2 = 413^2,$$
$$38^2 + 39^2 + 40^2 + \cdots + 96^2 = 531^2.$$

Connaissant une solution de (3), il est aisé d'avoir les formules générales qui résolvent cette équation.

Le problème proposé a donc une infinité de solutions.

III. *Trouver* 107 *entiers positifs en progression arithmétique et tels que la somme de leurs carrés soit un carré.* L'équation du problème :

$$x^2 + (x + r)^2 + (x + 2r)^2 + \cdots + (x + 106r)^2 = 107^2k^2$$

se ramène à

$$107k'^2 = y^2 + 106r^2 \qquad (4)$$

où

$$k = 3k' \quad \text{et} \quad x = 3y - 53r.$$

L'équation (4) est complètement résolue par les formules :

$$r = 107b^2 - (a - b)^2, \quad y = 106(a - b)^2 - 107a^2, \quad k' = a^2 + 106b^2.$$

Le problème a donc une infinité de solutions.

Exemple : $b = 3$, $a = 34$, donnent :

$$r = 2, \quad y = 21826, \quad k' = 2110;$$

divisant ces nombres par 2, on a :

$$32\ 686^2 + 32\ 687^2 + 32\ 688^2 + \cdots + 32\ 792^2 = 338\ 655^2.$$

IV. *On ne peut trouver* 55, 71, 83 *entiers positifs en progression arithmétique et tels que la somme de leurs carrés soit un carré.*

Le problème général qui consiste à trouver n entiers en progression arithmétique et tels que la somme de leurs carrés soit un carré, n'est possible jusqu'à $n = 47$, que pour les nombres : 4, 9, 11, 16, 23, 24, 25, 26, 33, 36, 47. (Voir JME., années 1894, 1895, *Exercices divers*, n^{os} 302 à 308, 369 à 372, 396).

J'ai démontré que le problème est toujours possible quand n est un carré; mais c'est là la seule proposition générale que j'aie trouvée. Il serait intéressant de connaître, à priori, pour quelles valeurs de n le problème est possible. On peut remarquer que jusqu'à 55, le problème est impossible quand n est un triangulaire, sauf, 36 qui est en même temps un carré.

DEUX NOUVELLES DÉMONSTRATIONS DU POSTULATUM D'EUCLIDE.

1. Soit t la valeur, en angle droit, de l'angle d'un triangle équilatéral dont le côté est égal à 1 mètre. Si t n'est pas égal à 2/3, 1 mètre, quantité concrète, est déterminé par la quantité abstraite t, *ce qui est absurde*; donc $t = \frac{2}{3}$ (*Démonstration* de M. G. Tarry).

Cette démonstration n'est au fond qu'une variante de la démonstration analytique de Legendre (*Éléments*, note II). En réalité, il existe entre t et le *rapport* de 1 mètre à la constante lobatchefskienne l, la relation parfaitement légitime

$$1 = 2\mathrm{Ch}\frac{1}{2l}\sin\frac{t}{2},$$

où n'entrent que des nombres abstraits. Si t était connu, on pourrait déterminer l, voilà tout.

Si l'on n'exclut pas à priori la géométrie riemannienne, on aurait

$$1 = 2\cos\frac{1}{2r}\sin\frac{t}{2},$$

r étant la constante riemannienne.

2. M. Wickersheimer a publié (JMS., oct. 1897, p. 20-24) un *Essai de démonstration du postulatum d'Euclide*, où il s'appuie inconsciemment sur un postulatum beaucoup plus compliqué et d'ailleurs indémontrable : *Deux perpendiculaires* AB, CD, *à deux autres droites* BE, CE, *perpendiculaires entre elles se rencontrent toujours.* (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 909.

(Voir *Mathesis* (2), IV, p. 55).

Soit ABCD *un trapèze dont la diagonale* AC *égale la base* AB. *On projette* D *en* E *sur* BC ; *la perpendiculaire élevée au milieu de* BE *rencontre* AC *au point* G ; *la parallèle à* BC *menée par* G *coupe en* H *la droite qui unit les milieux des bases* AB, CD. *Démontrer que* HG = BE. (A.C.).

Solution par MM. Poort (Groningue), François (La Haye), J. Jonesco, Déprez, Cristesco, Laurens. Soient M, N, P, Q les milieux des droites AB, DC, BC, BE; GH rencontre AB en un point R, et la parallèle à BC par N coupe AB en un point S. Cela posé, démontrons d'abord que GR = EC. On a $BP = \frac{1}{2}BC$, $BQ = \frac{1}{2}BE$; d'où, par soustraction : $PQ = \frac{1}{2}CE$. Comme AP passe au milieu de GR, on a aussi $PQ = \frac{1}{2}RG$. Il en résulte CE = RG.

Ensuite, le triangle DEC étant rectangle en E, on a DN = NC = NE; donc le triangle NEC est isoscèle et, par suite, équiangle à ARG, et même égal à ARG, à cause de RG = CE. On en conclut AR = NC = SB, MR = SM. Les triangles RMH, SMN sont donc égaux, et l'on a RH = NS = CB.

M Déprez accompagne sa solution de plusieurs remarques intéressantes sur les lieux décrits par les points H et G lorsque la base AB est fixe et l'angle BAD constant; il considère aussi les enveloppes des droites GH, etc. Nous regrettons que le défaut d'espace ne nous permette pas de reproduire ces développements.

Question 1014.

(Voir *Mathesis*, (2), V, p. 104).

Soit ABCD *un quadrilatère articulé dans lequel* AB + BC = AD + DC. *Appelons* E *l'ellipse qui a pour foyers les points* A, C *et qui passe par* B *et* D. *Si l'on fixe les sommets* A *et* B *et qu'on déforme ensuite le quadrilatère, les directrices de* E *enveloppent deux coniques ayant pour foyer commun le point* B ; *l'ellipse* E *a pour enveloppe une ellipse qui a pour foyers les points* A *et* B. (J. Neuberg).

Solution par M. Collette. Le point C se meut sur une circonférence de centre B. Si P désigne le pied de la perpendiculaire abaissée de B sur

la directrice qui correspond au foyer C, on a, d'après une propriété bien connue de l'ellipse,

$$BP : BC = AC : (AB + BC);$$

il en résulte que, pendant la déformation, BP, qui est parallèle à AC, est aussi proportionnelle à AC, de sorte que les points P et C décrivent des courbes semblables; le lieu du point P est donc une circonférence, et comme P décrit la podaire de B par rapport à l'enveloppe de la directrice, cette enveloppe est une conique de foyer B.

On trouve d'une manière analogue l'enveloppe de l'autre directrice.

Pour déterminer l'enveloppe de l'ellipse E, considérons une ellipse E′ infiniment voisine de E et correspondant au foyer C′ infiniment voisin de C. Pour qu'un point O appartienne aux deux ellipses, il faut que l'on ait la relation

$$AO + OC = AO + OC', \quad \text{d'où } OC = OC'.$$

Le point O se trouve donc sur la perpendiculaire élevée au milieu de CC′; si l'on fait tendre C′ vers C, le point caractéristique ω de l'ellipse E est, par suite, situé sur la droite BC, et l'on a

$$\omega A + \omega B = \omega A + \omega C + CB = AB + 2BC,$$

quantité constante. Le lieu de ω est par conséquent une ellipse dont A et B sont les foyers.

Remarque. Le lieu du centre de courbure de l'ellipse variable E au point fixe B est une ligne droite. En effet, le point Q où la bissectrice de l'angle ABC rencontre l'axe AC, divise AC dans le rapport constant AB : BC; or A est fixe et C décrit une circonférence de centre B; donc le lieu de Q est une circonférence dont le centre est sur AB. Comme le point B fait d'ailleurs partie de ce lieu, la perpendiculaire élevée en Q sur la droite QB rencontre AB en un point fixe H. Par conséquent, en vertu de la construction bien connue du centre de courbure, celui-ci se trouve sur la perpendiculaire menée par H sur la droite AB.

Ont résolu la même question : MM. Droz Farny et Buysens.

---

*Question 1019.

(Voir *Mathesis* (2), V, p. 128).

Trouver les nombres qui, multipliés par 9, *donnent pour produits les mêmes nombres renversés.* (J. Jonesco.)

Solution d'après MM. Barbette, François, Droz Farny et Mandart.

Soient $N = abc \ldots ikl$, $N' = lki \ldots cba$

le nombre cherché et ce nombre renversé. La relation $N' = 9N$ exige $a = 1$, $b = 0$ ou 1 sans quoi 9N aurait plus de chiffres que N. L'hypothèse $b = 1$ est exclue ; car si N commençait à gauche par 11, 9N commencerait à gauche par 99 (le produit partiel $9c$ ne pouvant donner de retenue sans augmenter le nombre de chiffres de 9N); on aurait alors $l = 9$, $k = 9$, de sorte que 9N se terminerait à droite par 91 au lieu de 11.

D'après cela, on peut écrire

$$N = 10c \ldots k9.$$

On voit facilement que N a au moins 4 chiffres. De plus, N' étant divisible par 9, la somme des chiffres l'est également. Donc si l'on suppose $N = 10c9$, on a nécessairement $c = 8$. Ainsi, le plus petit nombre de l'espèce cherchée est 1089.

Si N a plus de 4 chiffres, on a encore $k = 9$; car la somme $9k + 8$ doit se terminer par zéro, ou $9k$ par 2, donc $9k = 72$, $k = 8$. Supposons $N = 10c89$; alors comme N est un multiple de 9, on a $c = 0$ ou $c = 9$; la première hypothèse ne convient pas, mais la seconde satisfait à la question.

Soit $N = 10cd89$; l'égalité

$$10cd89 \times 9 = 98dc01$$

montre que le produit partiel $9c$ donne pour retenue 8, d'où l'on conclut $c = 9$; mais le nombre $d \times 9 + 8$ doit se terminer par c, donc $d \times 9$ par 1. Il en résulte $d = 9$, et on vérifie aisément que le nombre 109989 satisfait au problème.

Cette vérification suggère immédiatement une première solution de la forme 1099 .. 989, les chiffres compris entre 10 et 89 étant des 9.

Soient maintenant N_n, $N_{n'}$, $N_{n''}$... des nombres de cette forme et composés respectivement de $n, n', n'', \ldots$ chiffres. Tout nombre de la forme

$$N_n N_{n'} N_{n''} \ldots N_{n''} N_{n'} N_n,$$

(on suppose les nombres N_n, $N_{n'}, \ldots$ remplacés par leur expression en chiffres) constitue encore une solution. — On pourrait remplacer $N_{n'}$, $N_{n''}$ ... par un nombre quelconque de zéros. Exemples :

1089, 10891089, 1089000 1089,
108900 109890 1098900 1089, etc.

M. Barbette a traité la même question dans un système quelconque de numération. Il fait remarquer que N est divisible par 9 et par 11 (si la base est 10).

Question 1097.

(Voir *Mathesis*, 2, VI, p. 280).

Un mobile A *parcourt une droite fixe* Δ. *On le vise au moyen d'un théodolite bien réglé. La lunette de longueur* 2*a est mobile autour de son milieu, dans un cercle vertical situé à une distance d de l'axe vertical de l'instrument. On demande la courbe décrite dans l'espace par le centre de l'objectif. Cas particuliers et vérifications diverses.* (H. Brocard).

Solution par M. Soons. Prenons pour axe Ox la perpendiculaire commune à Δ et à l'axe de l'instrument, pour Oz l'axe de l'instrument, les axes étant rectangulaires. Soient b la distance de Δ et Oz, A l'angle de Δ avec Oz, α l'angle que fait avec Ox la perpendiculaire abaissée de O sur le plan du cercle vertical. Ce plan a pour équation

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = d. \tag{1}$$

Les équations de Δ sont

$$x = b, \quad y = z\operatorname{tg} A;$$

et celle du plan passant par Δ et le point milieu de la lunette :

$$\frac{x-b}{d\cos\alpha - b} = \frac{y - z\operatorname{tg} A}{d\sin\alpha}. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) déterminent la position de l'axe de la lunette ; en éliminant α on obtient la surface engendrée par l'axe de la lunette.

De (1) et (2) tirons $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$, puis substituons dans

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 ;$$

ce qui donne

$$\left.\begin{vmatrix} x & d \\ d(y - z\operatorname{tg} A), & b(y - z\operatorname{tg} A) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & y \\ b(y - z\operatorname{tg} A), & d(b-x) \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} x & y \\ d(y - z\operatorname{tg} A), & d(b-x) \end{vmatrix}^2 \right\} \tag{3}$$

Cette équation jointe à

$$x^2 + y^2 + z^2 = d^2 + a^2, \tag{4}$$

représente le lieu du centre de l'objectif. En combinant les égalités (3) et (4) on obtient la suivante :

$$\begin{aligned}&(b-x)^2(d^2z^2 - d^2a^2 - d^2y^2 + 2d^2yz\operatorname{tg} A)\\ &+ (y - z\operatorname{tg} A)^2[(b^2 - d^2)y^2 + b^2x^2 - 2bd^2x + d^4] = 0.\end{aligned} \tag{5}$$

Cas particuliers. I. Si l'on a $d = 0$ les équations (4) et (5) deviennent

$$y = z \operatorname{tg} A, \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2;$$

le centre de l'objectif décrit la circonférence déterminée par le plan passant par Δ et O, sur la sphère de centre O et de rayon a.

II. Si $b = d$, on a

$$x = b \quad \text{ou} \quad z = \pm a \cos A, \quad x^2 + y^2 + z^2 = d^2 + a^2.$$

Le résultat $x = b$ convient si l'on suppose la lunette immobile, son axe coïncidant avec Δ.

L'hypothèse $z = \pm a \cos A$ convient au cas où le milieu de la lunette n'est pas sur Δ. En effet, le rayon visuel et Δ se projettent suivant des tangentes à une même circonférence, les projections se coupent sur la projection du mobile; on a donc deux triangles égaux et l'axe de la lunette fait avec Oz, un angle constant et égal à A.

III. $A = 90$, $\operatorname{tg} A = \infty$. En faisant la substitution après avoir divisé par $\operatorname{tg}^2 A$, on obtient $z = 0$.

×Question 1127.

(Voir *Mathesis*, (2), t. VII, p. 175).

Eliminer x entre les équations

$$\frac{a_1x + b_1}{c_1x + d_1} = \frac{a_2x + b_2}{c_2x + d_2} = \frac{a_3x + b_3}{c_3x + d_3}. \qquad \text{(J. Neuberg).}$$

Solution par M. J. Degueldre. Représentons par m la valeur commune de ces rapports; nous aurons

$$\begin{aligned} -a_1x + c_1mx + d_1m &= b_1, \\ -a_2x + c_2mx + d_2m &= b_2, \\ -a_3x + c_3mx + d_3m &= b_3. \end{aligned}$$

Considérons ces équations comme formant un système de trois équations dont les inconnues sont respectivement x, mx et m; on en tire,

$$x = -\frac{|\,b, c, d\,|}{|\,a, c, d\,|}, \quad m = -\frac{|\,a, b, c\,|}{|\,a, c, d\,|}, \quad mx = \frac{|\,a, b, d\,|}{|\,a, c, d\,|}.$$

L'élimination de x et m entre ces dernières égalités conduit donc à la condition

$$|\,a, b, d\,\|\,a, c, d\,| = |\,a, b, c\,\|\,b, c, d\,|.$$

La même question a été résolue par M. Colart.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1151. Trouver deux cubes entiers consécutifs dont la différence soit un nombre triangulaire. Démontrer que la différence de deux cubes entiers consécutifs de même parité n'est jamais un nombre triangulaire. (DE ROCQUIGNY.)

1152. Démontrer que l'équation

$$12x^5 - 7x^4 + x^2 - 3000 = 0$$

n'admet qu'une seule racine réelle positive. Trouver cette racine avec six décimales exactes. (H. BROCARD.)

1153. Démontrer que pour $x = 0$, on a

$$\lim \frac{\text{tang}\,(\sin x) - \sin(\text{tang}\, x) - \frac{1}{30}x^7}{x^9} = \frac{29}{756}$$

(Emprunté à CAYLEY, *Math. Pap.*, 1897, t. XII, n° 842, ou *Mess. of Math.*, 1885, IV, 191-192).

1154. Soit ABC un triangle inscrit dans une conique Σ. Représentons par α le point de Frégier de A (point de concours des hypoténuses des triangles rectangles inscrits à Σ et ayant le sommet de l'angle droit en A), par α' le pôle de BC.

1° Les droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ concourent en un point P.

2° La conique Σ est la transformée isogonale (par points inverses) de la polaire de P. (DROZ FARNY).

1155. On considère les paraboles qui touchent deux côtés AB, AC d'un triangle et sont normales au troisième BC. Chercher 1° l'enveloppe de la directrice; 2° les enveloppes des cordes joignant les points de contact de AB et AC ou joignant ces points au point d'incidence de BC; 3° le lieu du foyer. (J. NEUBERG).

1156. On considère dans un cercle de centre O, un rayon fixe OA et un rayon mobile OM.

1° Le lieu du centre S des symédianes du triangle OAM est une ellipse;

2° Il existe, outre le point S, trois autres points du plan du triangle OAM, tels que leurs distances aux côtés de ce triangle sont proportionnelles aux longueurs de ces côtés. Le lieu de ces points se compose d'une hyperbole équilatère et de deux lignes droites. (E. N. BARISIEN.)

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. *Choix de Problèmes d'Algèbre et d'exercices de calcul algébrique*, avec les solutions, à l'usage des Athénées, des Collèges et des Écoles normales, des Candidats aux Écoles spéciales, des Universités et à l'École militaire, par BAUGARD. Namur, A. Wesmael, 1897 (279 p. gr. in-12). Prix : 2 fr. 50.

L'ouvrage contient 896 questions. Dans le chapitre XVIII, il y a des solutions reposant sur un emploi abusif de séries divergentes.

2. *Handboek der Rekenkunde*, door J. VERSLUYS. Derde Deel. Amsterdam, 1897, A. Versluys (142 p. in-8°). Prix : 1 florin 25.

Traité spécialement destiné aux aspirants au diplôme d'instituteur en chef. Beaucoup d'exercices sont empruntés aux examens pour ce grade. Le Traité d'Arithmétique de Tannery a été largement mis à contribution. La divisibilité des nombres est exposée avec des développements intéressants.

3. *Notes de Bibliographie des Courbes géométriques*, par H. BROCARD, Bar-le-Duc, Comte-Jacquet (Autographie de 20-296, XXX pages in-8°).

Ces Notes, tirées à un petit nombre d'exemplaires, sont en quelque sorte l'esquisse d'un répertoire complet des courbes remarquables. L'auteur les a autographiées pour les communiquer aux personnes qui s'intéressent à la question et voudraient bien lui envoyer leurs observations critiques ou des renseignements complémentaires.

Le travail définitif de M. Brocard rendra de grands services aux professeurs de mathématiques; mais, même sous sa forme actuelle, il sera très utile à tous ceux qui s'intéressent aux spéculations géométriques.

QUESTION D'EXAMEN.

221. On donne trois points fixes A, B, C en ligne droite; on considère une circonférence variable passant par les points B et C; on mène par A les deux tangentes AT, AT′ et la corde des contacts. On demande :

1° les lieux géométriques des milieux des côtés du triangle ATT′;

2° le lieu du centre du cercle circonscrit à ce triangle;

3° les lieux des points d'intersection de la tangente AT avec les tangentes parallèles à la droite ABC.

1° Soient M, M′, N, les milieux de AT, AT′, TT′. M et M′ décrivent la circonférence tracée du centre A avec le rayon $\frac{1}{2}\sqrt{AB.AC}$. Soient O le centre du cercle TBT′C et P le point où TT′ coupe BC; comme BC est divisée harmoniquement par A et P, P est fixe, et le lieu de N est la circonférence de diamètre AP.

2° Le centre du cercle ATT′ est le milieu de AO, etc.

3° Supposons qu'une tangente parallèle à BC touche le cercle TBC en D et rencontre la tangente AT en I. On a :

IA — ID = AT, donc I décrit une parabole qui a pour foyer A et pour directrice une perpendiculaire à BC et distante du milieu de BC de la quantité $\sqrt{AB.AC}$.

POUR LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE,

par M. P. MANSION, professeur à l'Université de Gand.

L'article de M. Dauge publié en tête de la livraison de janvier est, en réalité, un essai de réduction de la géométrie non euclidienne plane à la géométrie euclidienne sur certaines surfaces, en même temps qu'une tentative pour établir que la géométrie non euclidienne solide ne peut correspondre à aucune réalité.

Nous croyons avoir répondu d'avance aux objections de notre savant collègue, dans différents articles publiés depuis quelques années dans *Mathesis*. Mais il n'est pas inutile de reproduire ici nos arguments en les appropriant plus spécialement aux considérations que fait valoir M. Dauge pour défendre une thèse opposée à la nôtre.

Pour cela, nous donnons d'abord un aperçu d'ensemble des premiers principes de la géométrie non euclidienne en renvoyant pour les démonstrations à nos écrits antérieurs; puis des notes sur des points spéciaux abordés par notre contradicteur.

I. Exposé général des principes de la géométrie non euclidienne.

I. *Définitions générales de la droite et du plan.* LA DROITE *est une ligne illimitée ou indéfinie homogène déterminée par deux de ses points suffisamment rapprochés.*

LE PLAN *est une surface illimitée ou indéfinie dans laquelle, prenant deux points à volonté et les joignant par une ligne droite, cette ligne est toute entière dans le plan.*

Ces définitions sont des définitions du *genre* droite et du *genre* plan et sont dites à cause de cela, *définitions* GÉNÉRALES. Plus bas, nous distinguerons trois *espèces* de droites et de plans.

Ainsi, dans la théorie habituelle des coniques, on définit le GENRE *conique* comme il suit : *Une conique est le lieu des points dont les distances à un point fixe appelé foyer et à une droite fixe, appelée directrice, sont dans un rapport constant k.* On distingue ensuite trois *espèces* de coniques.

II. *Sens du mot illimité ou indéfini.* Dans la définition générale de la droite et du plan, nous employons, avec Riemann, (*) le mot *illimité* ou

(*) L'observation, dit en substance ce grand géomètre, nous apprend que l'espace réel est, non pas infini, mais illimité.

indéfini dans son sens étymologique : *illimité = qui n'a pas d'extrémité, de limite ou de borne.* Ainsi, une circonférence, une sphère sont illimitées ou indéfinies, parce que l'on n'y rencontre pas d'extrémité, de limite ou de bornes.

III. *Les soi-disant postulats.* La définition générale de la droite et du plan permet d'établir une grande partie de la géométrie élémentaire ; mais, arrivé à un certain point, on est forcé de particulariser ces définitions, ou de diviser les genres droite et plan, au moyen des deux propositions suivantes, appelées *improprement* postulats :

Postulat des deux droites. *Deux droites ne peuvent enclore un espace.*

Postulat des trois droites. *Deux droites d'un plan qui font, d'un même côté, avec une troisième, des angles dont la somme est inférieure à deux droits, se rencontrent de ce côté.*

On prouve que l'on *doit* nécessairement admettre, soit le premier, soit le second, soit enfin le premier et le second de ces postulats.

De même, dans la théorie des coniques, on est forcé, pour établir certaines propriétés, de supposer que le rapport k est supérieur, égal ou inférieur à l'unité.

IV. *Les trois espèces de droites et de plans.* La droite *euclidienne* est celle qui jouit des deux propriétés exprimées par les (soi-disant) postulats ; la droite *lobatchefskienne*, celle qui ne jouit que de la première ; la droite *riemannienne*, celle qui ne jouit que de la seconde. Un plan est *euclidien*, *lobatchefskien* ou *riemannien* selon que les droites qu'il contient sont euclidiennes, lobatchefskiennes ou riemanniennes.

De même, dans la théorie des coniques, la parabole est la conique où $k = 1$, l'hyperbole celle où l'on a $k > 1$, l'ellipse celle où l'on a $k < 1$.

V. *Les trois géométries.* En *géométrie euclidienne*, on ne considère que des droites euclidiennes et des figures dont la définition dépend de celle de la droite euclidienne ; de même la *géométrie lobatchefskienne* et la *géométrie riemannienne* étudient respectivement des droites de même nom et des figures qui en dépendent.

VI. *Les soi-disant postulats sont des définitions.* Le postulat des deux droites *seul* caractérise la droite lobatchefskienne.

Le postulat des trois droites *seul* caractérise la droite riemannienne.

Réunis, ces deux postulats caractérisent la droite euclidienne.

Ces soi-disant postulats sont donc au fond des définitions (ou plutôt

des compléments de définitions, nécessaires pour préciser la définition générale de la droite) absolument comme les relations $k>1$, $k<1$, $k=1$, caractérisent respectivement l'hyperbole, l'ellipse et la parabole.

VII. *Relations analytiques caractérisant les trois géométries.* En partant des définitions précédentes, on démontre qu'il existe entre l'hypoténuse a et les côtés b et c d'un triangle rectangle, l'une des relations suivantes :

$$\operatorname{Ch}\frac{a}{l}=\operatorname{Ch}\frac{b}{l}\operatorname{Ch}\frac{c}{l}, \tag{L}$$

$$a^2=b^2+c^2, \tag{E}$$

$$\cos\left(\frac{a}{r}\right)=\cos\left(\frac{b}{r}\right)\cos\left(\frac{c}{r}\right), \tag{R}$$

suivant que l'on est en géométrie lobatchefskienne, euclidienne ou riemannienne. Les quantités constantes l et r sont dites respectivement *constante lobatchefskienne, constante riemannienne.*

Réciproquement, au moyen de la définition générale de la droite et des relations (L), (R) ou (E), on peut établir le postulat des deux droites seul ou celui des trois droites seul, ou enfin, les deux réunis.

Les relations (L), (R), (E) caractérisent donc respectivement les trois géométries lobatchefskienne, riemannienne, euclidienne.

VIII. *Relation* (M) *équivalente* à (L), (E), (R). Posons $b+c=s$, $b-c=d$. Les relations (L), (E), (R) sont contenues dans la suivante :

$$a^2-b^2-c^2=$$

$$-p\frac{s^4+d^4-2a^4}{1.2.3.4}+p^2\frac{s^6+d^6-2a^6}{1.2.3.4.5.6}-p^3\frac{s^8+d^8-2a^8}{1.2\ldots8}-\text{etc.} \tag{M}$$

où l'on suppose $p=-\frac{1}{l^2}$, $p=0$, $p=\frac{1}{r^2}$. On peut donner à p (ou si l'on veut à son inverse), le nom de *paramètre* du système de géométrie considéré; p est négatif en géométrie lobatchefskienne, positif en géométrie riemannienne, nul en géométrie euclidienne.

IX. *Il y a une infinité de géométries lobatchefskiennes et de géométries riemanniennes ayant la géométrie euclidienne pour cas limite.* En effet, on peut donner à p toutes les valeurs négatives ou positives; de plus, pour $p=0$, on obtient la relation qui caractérise la géométrie euclidienne.

X. *Indémontrabilité des postulats.* Les postulats ne peuvent être déduits de la définition générale de la droite, puisque cela reviendrait à

prouver que la relation (M), quel que soit p, équivaut à (E) seul, tandis que (M) équivaut à (E), (L), (R).

XI. *Géométrie physique.* Dans l'étude de la nature et dans les arts, on considère des *droites physiques*, qui réalisent approximativement le concept *général* de la droite défini au n° I. De même, on mesure approximativement des distances, au moyen de droites physiques. C'est ainsi que l'on constate que la *géométrie physique* est *à peu près euclidienne*, c'est-à-dire que les côtés des triangles rectangles sont liés *à peu près* par la relation (E), ou bien par la relation (M), où l'on suppose p nul ou très petit, en valeur absolue.

C'est parce que la géométrie physique est à peu près euclidienne que l'on s'est imaginé que les postulats des deux et des trois droites sont des vérités absolues régissant fatalement le monde physique.

Par une illusion semblable, celui qui n'aurait jamais rencontré, dans les applications des arts, que des coniques presque paraboliques, regarderait, pour toutes les coniques, la relation $k = 1$, comme un postulat absolument sûr, mais indémontrable.

XII. *Il est impossible de déterminer exactement p :* il faudrait, pour cela, pouvoir mesurer exactement des distances entre des points mathématiques. De même, on ne peut déterminer k exactement pour une conique tracée sur un plan.

XIII. Par suite, *il est impossible de savoir si le monde actuel est euclidien.* En effet, pour cela, il faudrait pouvoir prouver expérimentalement que $p = 0$. De même, en pratique, on ne peut jamais savoir si une conique dessinée sur un plan est une parabole.

XIV. *Peut-être pourra-t-on savoir un jour si le monde est lobatchefskien ou riemannien.* Il suffira, pour cela, que l'on puisse mesurer des distances avec assez d'exactitude pour en déduire, non la grandeur, mais le signe de p. De même, sans pouvoir mesurer exactement k pour une conique donnée, on peut parfois savoir si l'on a $k > 1$, ou $k < 1$.

XV. En géométrie lobatchefskienne, il existe des surfaces *courbes*, appelées *horisphères*, sur lesquelles se trouvent des courbes, appelées *horicycles* ayant, sur ces surfaces, les mêmes propriétés que les droites euclidiennes dans le plan euclidien (*).

(*) Nous n'avons pas démontré ce théorème dans nos articles sur la géométrie non euclidienne; mais on le trouve dans les écrits de Lobatchefsky et de Bolyai.

XVI. *En quel sens la droite riemannienne est dite fermée, le plan riemannien fermé.* La droite riemannienne peut être divisée en un nombre fini de segments dont le dernier est adjacent au premier. Le plan riemannien peut être divisé en un nombre fini de parties dont les lignes limitantes, dans toute leur étendue, servent de limites à deux ou plusieurs fragments. A cause de cela, on dit que la droite riemannienne est une *ligne fermée*, le plan riemannien, une *surface fermée*. Mais *on ne doit attacher aucun autre sens à ce mot* FERMÉ.

XVII. *Pas d'espace extérieur ou intérieur à une droite riemannienne, à un plan riemannien.* Un grand cercle d'une sphère euclidienne la divise en deux parties identiques dont aucune (si l'on veut employer les mots dans leur sens usuel) ne peut être dite plus que l'autre, intérieure ou extérieure à ce grand cercle. De même, une droite riemannienne divise un plan riemannien en deux parties identiques dont aucune en peut être dite plus que l'autre intérieure ou extérieure à cette droite; un plan riemannien divise l'espace riemannien en deux parties identiques dont aucune ne peut être dite plus que l'autre intérieure ou extérieure à cette surface.

XVIII. *Rigueur logique des trois géométries.* Les trois géométries s'établissent concurremment avec la même rigueur, en partant des mêmes représentations sensibles et des mêmes notions fondamentales, sauf la distinction des trois espèces de droites, laquelle est imposée par la logique.

Par suite, *on ne peut faire au nom de la raison ou de l'observation, contre la géométrie lobatchefskienne ou la géométrie riemannienne une seule objection qui ne puisse être faite également contre la géométrie euclidienne.*

XIX. *Impuissance de l'imagination en géométrie.* On fait souvent à la géométrie riemannienne et même à la géométrie lobatchefskienne des objections basées au fond sur ce postulat :

Tout ce qui, en géométrie, est intelligible, tout ce qui est conçu par la raison, *doit être imaginable,* doit pouvoir être représenté d'une manière physique, aux sens ou à l'imagination.

Ce postulat, suivant nous, est manifestement faux. Ainsi, pour ne citer que des exemples empruntés à la géométrie euclidienne, qui peut s'imaginer la manière dont varie la courbure d'une cycloïde aux environs de son point de rebroussement ?— Qui peut se représenter la courbe

continue de Weierstrass qui n'a de tangente en aucun de ses points ? — Qui peut imaginer la courbe continue de M. Köpke, qui, elle, a une tangente en chacun de ses points, mais en même temps a une infinité de maxima et de minima entre deux quelconques de ses points ? — Comment se figurer la courbe continue de M. Peano, dont tous les points sont situés à des hauteurs z différentes et comprises entre 0 et 1, au-dessus du plan des xy et dont la projection sur ce plan des xy remplit *entièrement* un carré de côté 1 ?

En réalité, notre imagination, bien qu'indispensable pour que notre raison puisse avoir des concepts géométriques (Voir n° XXXVII), est une faculté tellement débile que, *sans l'aide de cette raison*, elle ne pourrait pas même se représenter *cent* points physiques marqués sur une feuille de papier ; elle peut tout au plus constater qu'il y en a un assez grand nombre sur cette feuille, mais rien de plus.

La raison conçoit, mais l'imagination est impuissante à se représenter : 1° la droite infinie, le plan infini, l'espace infini de la géométrie d'Euclide ou de Lobatchefsky, à cause de leur *infinitude* même ; 2° la droite finie, le plan fini, l'espace fini, en géométrie riemannienne ; *il est impossible d'attacher à ces trois dernières notions, l'image d'une forme précise quelconque*, parce que si le monde est riemannien, nous en faisons partie et nous ne pouvons nous mettre, même par la pensée, en dehors de ce monde, pour nous en faire une représentation sensible.

II. Notes sur des points spéciaux de l'article de M. Dauge.

XX. *Sur une prétendue confusion.* La confusion entre le plan non euclidien et la sphère ou la pseudosphère euclidienne, signalée par M. Dauge, n'existe pas. En réalité,

plan euclidien et horisphère lobatchefskien ;
droite euclidienne et horicycle lobatchefskien ;
plan lobatchefskien et pseudosphère euclidienne ;
droite lobatchefskienne et géodésique de pseudosphère euclidienne ;
plan riemannien et sphère euclidienne ;
droite riemannienne et grand cercle de la sphère euclidienne,

quoique ayant beaucoup de propriétés communes, sont choses distinctes. *Car elles ont aussi des propriétés différentes* et cela suffit pour renverser toute l'argumentation de ceux qui les confondent. De même, les plans et les cylindres euclidiens, dont les géodésiques ont des pro-

priétés identiques, ont aussi des propriétés différentes qui suffisent pour ne pas les confondre.

D'ailleurs, en reprenant les termes de M. Dauge, nous pourrions dire : « Tandis que, grâce à une fausse terminologie, on croit raisonner sur des plans euclidiens contenant des droites euclidiennes, on raisonne en réalité sur des horisphères et des horicycles ». *Toutes les objections de M. Dauge contre la géométrie lobatchefskienne peuvent donc se retourner contre la géométrie euclidienne.*

XXI. *Inutilité de la démonstration de M. Beltrami.* La démonstration de M. Beltrami (incomplète d'ailleurs) n'est pas élémentaire, puisque elle suppose connue la théorie des surfaces applicables les unes sur les autres sans déchirure ni duplicature.

Mais elle peut être simplifiée et rendue indépendante de toute idée de flexion ; il suffit d'y remplacer la considération de la pseudosphère et de ses géodésiques par celle du plan lobatchefskien, *qui est rigide*, et des droites lobatchefskiennes.

Si, en 1868, on eût connu les écrits de Lobatchefsky et de Bolyai, la démonstration de Beltrami eût été complètement inutile, comme elle l'est maintenant.

Nous croyons avoir donné, n^os^ VII-X, la vraie raison de l'indémontrabilité absolue des postulats ; au fond, elle est empruntée à M. De Tilly.

XXII. *En quel sens on peut douter de la vérité du postulatum des trois droites.* En géométrie *physique*, affirmer du postulatum d'Euclide qu'il est vrai, revient à dire que la géométrie euclidienne est réalisée dans la nature. Nous avons dit plus haut (n^os^ XI-XIV) que l'on n'en sait rien ; que l'on ne peut jamais rien en savoir, même si c'est vrai ; que si ce n'est pas vrai, au contraire, on pourra peut-être le savoir un jour.

En *géométrie idéale*, on peut, à propos du postulatum d'Euclide « se poser les trois questions suivantes : 1° Est-il une suite de la définition ordinaire de la droite? 2° Est-il en contradiction avec cette définition de la droite? 3° En est-il indépendant? » Les géomètres non euclidiens, spécialement M. De Tilly, ont prouvé que l'on doit « répondre *non* à la première question ; *non* à la seconde ; *oui* à la troisième ». Ce sont donc eux qui, en réalité, ont les premiers rendu la géométrie euclidienne inattaquable, en établissant la compatibilité logique du postulatum d'Euclide avec la définition classique de la droite.

XXIII. *Sur l'intuition.* Que signifient au juste ces mots : *avoir l'intuition*, employés ici et plus bas par M. Dauge?

Signifient-ils *concevoir*, *voir au moyen de notre raison*, *avoir l'intuition* INTELLECTUELLE ? Mais notre raison conçoit les trois espèces de droites : euclidienne, lobatchefskienne et riemannienne. Ce n'est donc pas notre raison qui peut affirmer que deux droites perpendiculaires à une troisième dans un plan ne peuvent se rencontrer, car les droites riemanniennes ne jouissent pas de cette propriété; ce n'est pas notre raison non plus qui voit que si l'on incline l'une des perpendiculaires vers l'autre, elle la rencontrera, car cela n'arrive pas toujours en géométrie lobatchefskienne.

Avoir l'intuition signifie-t-il *voir de nos yeux*, ou *reproduire par l'imagination ce que nous avons vu de nos yeux*, autrement dit, *avoir l'intuition* SENSIBLE? Mais qui a vu, sur une surface très approximativement plane, deux perpendiculaires à une même droite, dessinées avec soin et ayant seulement dix mètres de longueur? Qui sait, par suite, si elles restent équidistantes, si elles divergent ou si elles se rencontrent, autrement dit, si elles sont euclidiennes, lobatchefskiennes ou riemanniennes? Jusqu'à présent, l'expérience n'a rien décidé à cet égard.

Les notions que l'on obtient d'abord, par le concours des sens et de la raison, ce sont les notions *générales* de la droite et du plan, mais non les notions *spéciales* de droite euclidienne et de plan euclidien. La raison (ou l'intuition intellectuelle), nous permet ensuite de concevoir trois droites, trois plans, trois géométries; mais nos sens (ou l'intuition sensible) ne nous font voir sur une faible étendue, qu'une droite physique, qu'un plan physique et ne nous montrent réalisée qu'une seule seule géométrie physique. Nous ne savons pas auquel de nos trois *concepts* de la géométrie idéale correspond *l'image* donnée par nos sens trop imparfaits; nous savons seulement que si l'image est euclidienne, nous ne pourrons jamais le prouver expérimentalement.

Donc, la raison, ni les sens, autrement dit, ni l'intuition intellectuelle, ni l'intuition sensible ne peuvent nous conduire légitimement à la conclusion de M. Dauge.

XXIV. *Sur la forme de la ligne droite.* Il faut faire, à propos de la forme de la ligne droite, une distinction analogue à celle de la note précédente. La droite *idéale*, être de raison étudié par l'intelligence, peut être euclidienne, lobatchefskienne ou riemannienne; on prouve

rigoureusement que deux droites lobatchefskiennes peuvent être asymptotes, sans leur supposer nulle part aucune ressemblance avec une hyperbole.

Quant à la droite *physique*, réalisée approximativement dans la nature et dont nos sens nous font connaître la *forme* sur une faible étendue, personne ne sait, jusqu'à présent, si elle est une droite lobatchefskienne ou riemannienne, et encore moins si elle est euclidienne pour les raisons rappelées aux nos XI-XIII.

XXV. *Sur la vérité du postulatum.* Comme nous l'avons dit, note XXII, en géométrie *idéale*, on *peut*, mais on ne *doit* pas admettre le postulatum. En géométrie *physique*, on ne sait pas, et l'on ne peut pas savoir, si l'on doit l'admettre.

XXVI. *Sur la construction des figures dans les divers systèmes de géométrie.* En géométrie *idéale*, on démontre que l'on peut construire les figures euclidiennes, lobatchefskiennes, ou riemanniennes, si l'on admet la possibilité de certaines lignes fondamentales : droite, circonférence, équidistante, etc.

En géométrie *physique*, on ne sait pas, pour les raisons données plusieurs fois, dans quel système de géométrie on opère.

XXVII. *Défense de la définition de Leibniz.* D'après la définition de Leibniz, une droite (euclidienne, lobatchefskienne ou riemannienne) est *immobile* quand des points *en dehors* de cette droite et qui y sont invariablement liés tournent autour de cette droite ; donc on ne peut pas dire que *la droite elle-même tourne autour de deux de ses points* : ces mots n'ont aucun sens pour une ligne immobile.

XXVIII. *Suite.* D'après les premiers principes sur l'égalité des triangles, les distances mutuelles de tous les points en dehors de la droite restent les mêmes, pendant la rotation ; donc il n'y a pas déformation.

XXIX. *Sur la droite riemannienne.* Ce raisonnement relatif à une prétendue indétermination de la droite riemannienne, est inexact, selon nous, pour toute ligne, dans n'importe quel système de géométrie. Ainsi, un arc de circonférence, quelque petit qu'il soit, détermine la circonférence toute entière.

XXX. *Prétendue bizarrerie de la géométrie riemannienne.* L'existence d'un second point de rencontre, pour deux droites riemanniennes qui en ont un premier, ne paraît bizarre que si l'on oublie la définition de cette ligne et si, sans s'en douter, l'on raisonne sur des droites euclidiennes ou

lobatchefskiennes. — Tout chemin conduit à Rome, pourvu que l'on parte du point antipode sur la sphère et que l'on marche toujours dans une même direction; il en est de même en géométrie riemannienne plane ou solide ; mais, dans ce dernier cas, les chemins sont des droites riemanniennes et non des grands cercles.

XXXI. *Perpendiculaire à un plan riemannien.* Voir nos XIX et XXX. On ne peut pas s'*imaginer* la droite *complète* qui est perpendiculaire à un plan riemannien. Mais *la représentation partielle que nous en avons suffit pour démontrer qu'elle est unique dans les trois systèmes de géométrie*, comme on le fait dans les Traités.

XXXII. *Sur la démonstration de la propriété fondamentale d'une perpendiculaire à un plan.* Cette démonstration analytique n'est nullement nécessaire dans notre mode d'exposition; car la démonstration donnée dans la plupart des Traités de géométrie (par exemple, dans les *Éléments* de LEGENDRE-BLANCHET), et celle de M. DEBOUIS (*Mathesis*, novembre 1897, t. XVII, p. 248) appartiennent à la géométrie générale et ne renferment aucun calcul : elles sont aussi bonnes en géométrie lobatchefskienne ou riemannienne qu'en géométrie euclidienne.

XXXIII. *Il n'y a pas d'interprétation nouvelle de nos calculs, mais interprétation d'autres calculs.* Dans nos calculs, P_1, P_2, P_3 coïncident avec P et le théorème démontré appartient à la géométrie (riemannienne) *solide*; dans ceux de M. Dauge, P_1, P_2, P_3, P sont quatre points différents et le théorème démontré, qui appartient à la géométrie sphérique euclidienne, pourrait s'interpréter entièrement en géométrie riemannienne *plane*. — La démonstration d'Euclide et de Legendre de la propriété fondamentale de la perpendiculaire à un plan euclidien peut être transformée en une *autre* propriété des horicycles sur une horisphère, par le procédé de M. Dauge.

XXXIV. *Sur l'homogénéité de l'espace.* L'espace riemannien et l'espace lobatchefskien étudiés en géométrie non euclidienne sont supposés homogènes, d'après la définition même de la droite.

Selon nous, on admet, en géométrie *physique*, que l'espace est homogène, parce qu'aucune observation n'a jamais contredit cette hypothèse. Mais, en géométrie *idéale*, rien n'empêche d'étudier un espace non homogène et on l'a déjà fait.

XXXV. *Comment on pourrait savoir si la géométrie physique est non euclidienne.* Il suffirait de constater, avec une exactitude suffisante, que

deux perpendiculaires à une même droite divergent ou convergent pour savoir que la géométrie physique, dans les limites d'exactitude que comportent nos mesures, est lobatchefskienne ou riemannienne. On arriverait encore à cette dernière conclusion si l'on constatait qu'une droite est composée d'un nombre fini de segments finis dont le dernier est contigu au premier.

XXXVI. *Possibilité expérimentale de cette recherche.* Les expériences et les observations dont nous parlons devront être faites avec des *droites physiques*, réalisant autant que faire se peut, le concept général de la droite, tel qu'il est défini au n° I. Mesurer des distances, réaliser approximativement des plans et des droites ne sont pas des utopies, cela se fait tous les jours. Mais on ne sait pas si le monde où l'on opère est euclidien, lobatchefskien ou riemannien.

XXXVII. *Sur la soi-disant géométrie à plus de trois dimensions.* La soi-disant géométrie à quatre dimensions (ou plus) est de l'analyse pure où l'on applique les noms de point, ligne, surface, solide, etc., à un ensemble de quatre variables liées entre elles par 4, 3, 2 ou 1 relation; on n'y utilise nullement (et l'on ne peut y utiliser) les notions de *à droite* et *à gauche, en avant et en arrière, en haut et en bas*, qui, selon Gauss, sont l'apport que l'observation ajoute aux concepts arithmétiques pour constituer la géométrie à une, deux ou trois dimensions. Au contraire, en géométrie non euclidienne, comme en géométrie euclidienne, on recourt à ces notions essentiellement géométriques : la seule différence qu'il y ait entre la géométrie euclidienne et la géométrie non euclidienne, c'est que la première particularise la définition générale de la droite au moyen de *deux* soi-disants postulats, la seconde au moyen de *l'un* ou de *l'autre* de ces *compléments de définition* (Voir n° XVIII).

XXXVIII. *La géométrie non euclidienne solide.* Il n'est pas inutile de faire remarquer que, dans le système de notre ingénieux contradicteur, on ne peut concevoir comment Lobatchefsky a pu, dès avant 1840, écrire un système complet de géométrie non euclidienne solide (fondé sur le seul postulat des deux droites et les notions expérimentales dont il est question dans la note précédente), et même s'en servir, pour trouver des intégrales définies nouvelles. Si l'on assimile cette géométrie lobatchefskienne solide à de l'analyse pure, rien n'empêche de faire la même chose pour la géométrie euclidienne solide, d'après les n°s XVIII et XX.

PRIX LOBATCHEFSKY (PREMIER CONCOURS, 1897).

La *Société physico-mathématique de Kasan* a décerné, dans sa séance solennelle du 3 novembre (22 octobre) 1897, le prix Lobatchefsky à M. SOPHUS LIE, professeur ordinaire à l'Université de Leipzig, pour son ouvrage: *Theorie der Transformationsgruppen*. Band III. Leipz. 1893.

Les mentions honorables ont été accordées : 1° à M. L. GÉRARD, professeur au Lycée Ampère (Lyon), pour sa *Thèse sur la géométrie non euclidienne*. Paris. 1892; 2° à M. E. CESARO, professeur ordinaire à l'Université royale de Naples, pour ses *Lezioni di Geometria intrinseca*. Napoli. 1896; 3° à M. G. FONTENÉ, professeur au collège Rollin, pour son ouvrage *L'hyperespace à* n-1 *dimensions*. Paris. 1892.

La médaille d'or de Lobatchefsky, destinée, d'après le règlement du prix Lobatchefsky, à récompenser le travail des personnes qui aident à la Société physico-mathématique de Kasan à examiner les ouvrages, présentés au concours, a été décernée, dans la même séance solennelle du 3 novembre 1897, à M. F. KLEIN, professeur ordinaire à l'Université de Gœttingue, pour son rapport sur l'ouvrage de M. Lie. Le rapport de M. Klein vient d'être imprimé à Kasan sous le titre : *Zur ersten Verteilung des Lobatschewsky-Preises* (Gutachten, betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie).

Les rapports sur les ouvrages de M. Gérard, Cesàro et Fontené ont été faits par MM. les Prof. T. Souvorof, D. Seiliger et P. Nasimof, membres de la Commission. En outre, ont pris part aux travaux de la Commission, MM. les Prof. D. Doubiago, A. Kotelnikof, D. Sintzof, secrétaire.

Le nombre total des ouvrages présentés au concours a été égal à neuf.

Le prix Lobatchefsky est décerné tous les trois ans. Il est d'une valeur de 500 roubles papier. La Société peut en augmenter la valeur, si l'état du capital le permet.

Le prix Lobatchefsky est destiné aux ouvrages relatifs à la géométrie, et de préférence à la géométrie non euclidienne.

Sont admis à concourir à ce prix les ouvrages imprimés en russe, français, allemand, anglais, italien et latin, adressés à la *Société Physico-Mathématique*, par leurs auteurs et publiés dans le cours des six années qui auront précédé le jugement de la Société concernant le prix.

Dans aucun cas, le prix ne peut être partagé entre deux ou plusieurs auteurs concurrents. Dans le cas où plusieurs ouvrages seront d'égale valeur, c'est le sort qui décidera celui auquel le prix sera accordé.

Le prix sera décerné pour la seconde fois le 3 novembre 1900. Selon le § 11 du règlement, les ouvrages destinés au concours doivent être adressés à la *Société Physico-mathématique* de Kasan jusqu'au 3 novembre 1899.

Le Président de la *Société Physico-mathématique* :

A. VASSILIEF.

20 décembre 1897.

NOTES MATHÉMATIQUES.

1. *Sur une enveloppe.* Un correspondant nous transmet la question suivante :

On donne un angle droit xOy et un point I *du plan. Soient* P *et* Q *deux points situés l'un sur* Ox *et l'autre sur* Oy, P′ *et* Q′ *les projections de* P *et* Q *sur la droite* OI. *Montrer que si* OP′ + OQ′ = OI, *la droite* PQ *enveloppe une parabole.*

On voit immédiatement que la perpendiculaire au milieu de la droite OI passe par le milieu de PQ. La question est donc un cas particulier de la suivante, assez connue :

On donne un triangle ABC. *L'enveloppe des droites dont les segments compris entre les côtés des angles* B *et* C *sont dans un rapport constant, est une parabole touchant les trois côtés du triangle* ABC.

Pour démontrer *directement* cette dernière proposition, soient A′, B′, C′ les points où une sécante rencontre BC, CA, AB. Menons par A′ une droite parallèle à AC et rencontrant AB en M. Si le rapport A′B′ : A′C′ a une valeur constante, il en est de même du rapport MA : MC′ ; par suite, les points A′, M, C′ décrivent des ponctuelles semblables, etc.

(J. N.).

2. *Propriétés du triangle.* Soient A′, B′, C′ les milieux des côtés du triangle ABC. Les perpendiculaires élevées en B′ sur AC et en C′ sur AB rencontrent AA′ respectivement en D et E. Les droites BE et CD se coupant en L, la droite AL est la bissectrice de l'angle BLC.

En effet, appelons β, γ les perpendiculaires abaissées de A sur les droites BE, CD et désignons par β', γ' celles menées de B et C sur AA′. Les triangles ABE, ACD étant isoscèles, on a $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Or il est facile de voir que $\beta' = \gamma'$; donc $\beta = \gamma$.

Plus généralement, si A′ est un point quelconque de BC, on a :

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta'}{\gamma'} = \frac{BA'}{CA'}.$$

Par exemple, si AA′ est la bissectrice de l'angle BAC, on a :

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{AB}{AC}.$$

(A. C.).

3. *Note de géométrie* par M. A. Goulard. *Étant donné un angle* XOY, *le lieu du milieu* M *d'une sécante* AB, *telle que le produit* OA . OB *reste constant, est une hyperbole.*

Ce théorème bien connu a été démontré par M. Rebuffel (*Journal de M. Vuibert*, 15e année, p. 54), à l'aide de considérations purement géométriques. La démonstration de M. Rebuffel a été modifiée par M. Ch. Michel (*Bulletin de Mathématiques spéciales*, 1re année, p. 124). Je me propose de traiter de nouveau cette question, en la simplifiant encore, si c'est possible.

1° *Dans un triangle* OAB, *on porte sur la bissectrice de l'angle* O, *de part et d'autre du sommet, une longueur* OF = OF′ *moyenne proportionnelle entre les côtés* OA *et* OB : *en désignant par* M *le milieu de* AB, *l'angle* FMF′ *a pour bissectrice* AB.

Cette proposition remarquable a été démontrée par M. Rebuffel (*loc. cit.*).

2° *Dans un triangle* FMF′, *soient* O *le milieu du côté* FF′, D *le pied de la bissectrice de l'angle* M, *et* P *le pied de la hauteur issue du sommet* M; *on a*

$$OD \cdot OP = \tfrac{1}{4}(MF' - MF)^2.$$

Cette proposition est bien connue. (Voir, par exemple, Rouché et de Comberousse, exercice 170).

3° *Dans un triangle* OAB, *soit* OP *la projection de la médiane* OM *sur la bissectrice* OD; *on a*

$$OD \cdot OP = OA \cdot OB \cdot \cos^2 \tfrac{1}{2} AOB.$$

En effet, en posant $OA = a$, $OB = b$, $AOB = \theta$, on voit facilement que

$$OP = \tfrac{1}{2}(a + b) \cos \tfrac{1}{2} \theta.$$

D'autre part, on sait que

$$OD = \frac{2ab}{a+b} \cos \tfrac{1}{2} \theta.$$

Donc

$$OD \cdot OP = ab \cos^2 \tfrac{1}{2} \theta.$$

Cela étant, soit $OA \cdot OB = m^2$. Portons sur la bissectrice de l'angle XOY, de part et d'autre du sommet O, une longueur $OF = OF' = m$.

D'après 1°, la droite AB est bissectrice de l'angle FMF′; et, d'après 2° et 3°, on a alors

$$MF' - MF = 2m \cos \tfrac{1}{2} XOY.$$

4. *Sur l'hyperbole équilatère*, par M. A. Goulard (professeur au lycée de Marseille). Les propriétés suivantes étant peu connues, il n'est peut-être pas inutile de les rappeler.

Soient B *et* C *les sommets d'une hyperbole équilatère,* A *un point quelconque de la courbe. Dans le triangle* ABC,

1° *La hauteur issue du sommet* A *est une moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur le côté* BC ;

2° *Les carrés des côtés* AB *et* AC *sont entre eux comme leurs projections sur le côté* BC ;

3° *La différence des angles* B *et* C *est égale à un droit* ;

4° *On a, entre les côtés* a, b, c, *la relation*

$$(b^2 - c^2)^2 = a^2 (b^2 + c^2).$$

Soit AD la hauteur issue du sommet A.

1° L'équation de l'hyperbole, rapportée à ses axes de symétrie, est

$$x^2 - y^2 = \tfrac{1}{4} a^2, \quad \text{ou} \quad y^2 = (x + \tfrac{1}{2} a)(x - \tfrac{1}{2} a),$$

c'est-à-dire $\overline{AD}^2 = BD \times CD$(*).

2° L'égalité précédente peut s'écrire

$$\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD},$$

ce qui montre que les triangles ABD et ACD sont semblables. Donc

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD},$$

d'où, en éliminant AD,

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{CD}{BD}.$$

3° De la similitude des triangles ABD et ACD, on déduit encore

$$\text{angle ABD} = \text{CAD},$$

ou, en supposant le point A du côté du sommet B,

$$2dr. - B = 1dr. - C,$$

d'où

$$B - C = 1dr.$$

4° De la proportion

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{CD}{BD},$$

(*) Soit B' le symétrique de B par rapport au pied de la hauteur AD. L'égalité $\overline{AD}^2 = BD.CD = B'D.DC$ montre que le triangle AB'C est rectangle en A ; on en conclut la 2me et la 3me partie du théorème. (J. N.).

on tire

$$\frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2} = \frac{BC}{CD + BD}.$$

Mais

$$\overline{CD}^2 - \overline{BD}^2 \quad \text{ou} \quad BC(CD + BD) = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2.$$

Donc

$$\frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2},$$

ou

$$(b^2 - c^2)^2 = a^2(b^2 + c^2).$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 857.

(Voir *Mathesis*, (2) III, p. 176).

On considère les ellipses osculatrices à un cercle donné en un point donné de ce cercle et ayant même aire que le cercle. Montrer que 1° le lieu du centre des ellipses est une ligne droite; 2° l'enveloppe des axes est une parabole; 3° le lieu des projections du point donné sur les axes est une cissoïde; 4° le lieu des sommets est une courbe unicursale du 5° degré; 5° le lieu des foyers est une strophoïde droite; 6° la tangente à l'ellipse au second point de rencontre avec le cercle a pour enveloppe une hyperbole. (E. N. Barisien).

Solution par M. Absolonne. 1° Soient a, b les demi-axes d'une ellipse osculatrice au cercle au point O(*); a', b' le demi-diamètre passant par O et son conjugué. On aura $R = \frac{b'^2}{ab}$; mais $ab = R$ puisque l'ellipse doit avoir même aire que le cercle, donc $b' = R$ et comme $a'b' \sin\theta = ab = R^2$, on a $a' \sin\theta = R$ (θ est l'angle du diamètre a' avec son conjugué ou avec la tangente en O). Il résulte de là que le centre de l'ellipse appartient à une parallèle à la tangente en O menée par le centre du cercle.

2° Soient C le centre du cercle et C'M, C'E les axes de l'ellipse qui rencontrent en M, E la tangente menée en O; P la projection de C' sur cette tangente; on aura, d'après un théorème connu, $MP.PE = R^2 = MO.OE$, ce qui exige $MO = PE$.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Par conséquent, si nous menons par M une perpendiculaire à MC' elle coupera OC en un point F tel que OF = R, car les triangles C'PE, MOF sont égaux. La perpendiculaire à C'E en E passera également par F et l'on voit que les axes sont tangents à une parabole de sommet O et de foyer F.

3° Prenons le symétrique F' de F par rapport à C'M, projetons O en I sur cet axe et menons CH perpendiculaire à OI. On voit facilement que OH rencontre la droite CC' en un point D tel que DC = PE = MO; les triangles DHC, MIO étant égaux, on a DH = IO. Le lieu de I est donc une cissoïde dont le cercle générateur est décrit sur OC comme diamètre.

5° Menons par le foyer f de l'ellipse osculatrice une perpendiculaire à la tangente en O qui rencontre celle-ci en Q et la tangente parallèle au point R. On aura

$$fQ.fR = b^2 = fQ.(2R - fQ),$$

d'où, la projection OK de OC sur Of étant égale à b,

$$fQ = R - \sqrt{R^2 - b^2} = R - KC.$$

Désignons l'angle GOC par φ, G étant le point où Of coupe C'C; il viendra

$$Gf = \frac{R - fQ}{\cos\varphi} = \frac{KC}{\cos\varphi} = GC.$$

Le point S obtenu en prolongeant OG de GS = GC, est évidemment le symétrique du second foyer de l'ellipse par rapport à OC; on voit que les deux foyers sont sur une strophoïde droite dont O est le sommet et C le point double.

6° La tangente au second point de rencontre de l'ellipse avec le cercle marque sur les tangentes au cercle aux extrémités du diamètre OC deux divisions homographiques; elle enveloppe donc une conique qui est, dans ce cas, une hyperbole.

4° Si l'on prend pour axes la tangente et la normale au point donné O, le cercle et l'ellipse seront représentés par

$$y^2 + x^2 - 2Ry = 0, \quad x^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey = 0,$$

et puisqu'au point O on a

$$y' = 0, \quad y'' = \frac{1}{R}, \quad D = 0, \quad E = -R,$$

le produit des carrés des axes de l'ellipse est

$$-\frac{\Delta^2}{\delta^2}=\frac{R^4}{(C-B^2)^2},\quad \text{d'où}\quad ab=\frac{R^2}{\sqrt{(C-B^2)^2}}=R^2;$$

par conséquent,

$$C-B^2=1.$$

L'équation aux axes de la courbe est

$$(x+By)^2-(y-R)(Bx+cy-R)=0.$$

Si l'on remplace C par B^2+1 dans l'équation de l'ellipse, on trouve :

$$(x+By)^2+y^2-2Ry=0,$$

d'où l'on tire la valeur de B et par suite celle de C qu'il suffit de remplacer dans l'équation aux axes.

Le lieu des sommets est représenté par

$$y(Ry+R^2-y^2)^2=x(y-R)^2(2R-y).$$

6° La corde commune au cercle et à l'ellipse a pour équation

$$By+2x=0;$$

les coordonnées du point où elle coupe le cercle sont

$$x'=-\frac{4BR}{4+B^2},\quad y'=\frac{8R}{4+B^2},$$

ce qui donne pour la tangente à l'ellipse en ce point, après avoir remplacé C par $1+B^2$

$$4Bx+y(4+3B^2)-8R=0.$$

Dérivons par rapport à B, il vient

$$2x+3By-0;$$

en éliminant B entre les 2 dernières équations on trouve l'équation de l'enveloppe

$$3y^2-2x^2+x-3R^2=0,$$

qui prend la forme

$$\frac{y^2}{R^2}-\frac{x^2}{3R^2}=1,$$

quand on transporte l'origine au centre du cercle. Elle représente une hyperbole dont les foyers sont à une distance 2R de C.

Solutions analogues par MM. Dépres, Brocard et Servais.

×Question 1114.

(Voir *Mathesis*, (2), t. VII, p. 80).

Construire un parallélogramme ABCD *semblable à un parallélogramme abcd et tel que les sommets* A *et* C *se trouvent sur une circonférence* O *et les deux autres sommets* B *et* D *sur une seconde circonférence donnée* O'.

Cas particulier où ABCD *est un carré.* (Soons).

Solution par MM. E. Colart et J. Déprez. Soit I le centre du parallélogramme cherché, *i* celui du parallélogramme donné; l'angle OIO', dont les côtés sont perpendiculaires à AC et BD sera égal à l'angle connu AIB. D'ailleurs, en désignant par R et R' les rayons des cercles donnés, on aura

$$\frac{R^2 - \overline{OI}^2}{R'^2 - \overline{O'I}^2} = \frac{\overline{AI}^2}{\overline{BI}^2} = \frac{\overline{ai}^2}{\overline{bi}^2} = k^2,$$

d'où

$$\overline{OI}^2 - k^2 . \overline{O'I}^2 = R^2 - k^2 R'^2.$$

Le point I se trouve donc sur une circonférence ayant son centre Q sur OO' à une distance $O'Q = \frac{OO'}{1 - k^2}$, et est, par conséquent, déterminé par cette circonférence et l'arc du segment capable de l'angle *aib* décrit sur OO'. Le parallélogramme s'achève alors facilement.

Dans le cas du carré, on a $k = 1$ et, par suite,

$$\overline{OI}^2 - \overline{O'I}^2 = R^2 - R'^2,$$

équation qui détermine la projection de I sur OO'. Le point I se trouve, d'autre part, sur la circonférence de diamètre OO'.

×Question 1116.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 102).

Etant donné un triangle ABC, *la bissectrice de l'angle intérieur* ACB *rencontre le côté* AB *en* C'; *la bissectrice extérieure du même angle rencontre le côté* AB *en* C'_1. *On prend sur* AB : 1° *le point* C'' *vers l'intérieur du triangle, tel que* C''B = AC'; 2° *le point* C''_1 *vers l'extérieur du triangle, tel que* $C''_1B = C'_1A$. *Démontrer les relations*

$$\overline{CC''}^2 - \overline{CC'}^2 = (BC - AC)^2$$

$$\overline{CC''_1}^2 - \overline{CC'_1}^2 = (BC + AC)^2$$

(E. N. Barisien).

Solution par M. J. Degueldre, Droz Farny, François. Représentons par a, b, c les côtés du triangle ABC. Le théorème de Stewart donne successivement :

$$a^2 \cdot AC'' + b^2 \cdot BC'' = c\,(\overline{CC''}^2 + AC'' \cdot BC'')$$
$$a^2 \cdot AC' + b^2 \cdot BC' = c\,(\overline{CC'}^2 + AC' \cdot BC')$$

d'où par soustraction

$$(a^2 - b^2)(BC' - AC') = c\,(\overline{CC''}^2 - \overline{CC'}^2).$$

Or

$$BC' - AC' = \frac{ac}{a+b} - \frac{bc}{a+b} = \frac{c(a-b)}{a+b}.$$

On a donc

$$\overline{CC''}^2 - \overline{CC'}^2 = (a-b)^2.$$

2° Menons CH perpendiculaire à AB. On a

$$\overline{CC_1''}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HC_1''}^2$$
$$\overline{CC_1'}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HC_1'}^2$$

d'où, par soustraction :

$$\overline{CC_1''}^2 - \overline{CC_1'}^2 = (HC_1'' - HC_1')(HC_1'' + HC_1') = (HB - HA)(c + 2AC_1').$$

en supposant A, B aigus et A > B; or

$$HA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}, \quad HB = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}, \quad AC_1' = \frac{cb}{a-b};$$

il en résulte

$$\overline{CC_1''}^2 - \overline{CC_1'}^2 = (a+b)^2.$$

Autres solutions par MM. Déprez, Soons, Libert, Colart et Delahaye.

On démontre encore facilement la relation

$$\overline{CC'}^2 + \overline{CC_1'}^2 = \left(\frac{2abc}{a^2 - b^2}\right)^2. \qquad \text{(Delahaye).}$$

---

*Question 1147.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 279).

Trouver deux entiers consécutifs dont l'un soit un carré et l'autre un triangulaire. (de Rocquigny).

Solution par M. A. Goulard (Marseille) et M. Emmerich (Mulheim s/ Ruhr). On doit avoir

$$x^2 - \tfrac{1}{2}y(y+1) = \pm 1,$$

d'où, en posant $2x = z$ et $2y + 1 = t$,

$$2z^2 - t^2 = 7 \quad \text{ou} \quad -9.$$

I. Considérons d'abord l'équation

(1) $$2z^2 - t^2 = 7.$$

Comme z est premier avec 7, on peut poser

$$t = \lambda z - 7v,$$

v étant une nouvelle inconnue, et λ étant un coefficient à déterminer, qu'on peut supposer positif et $< \frac{7}{2}$. L'équation (1) devient alors

$$\frac{2 - \lambda^2}{7} z^2 + 2\lambda z v - 7v^2 = 1.$$

Pour que $\frac{2 - \lambda^2}{7}$ soit entier, on doit faire $\lambda = 3$; donc

$$z^2 - 6zv + 7v^2 = -1,$$

ou enfin, en posant $z - 3v = u$,

$$u^2 - 2v^2 = -1.$$

Les valeurs positives de u et v qui vérifient cette équation sont données par l'égalité

$$u + v\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^{2n+1}.$$

Pour que les valeurs correspondantes de z et t soient positives, on doit prendre

$$\left.\begin{aligned} z &= 3v + \varepsilon u, \\ t &= 3u + 2\varepsilon v, \end{aligned}\right\} \quad \varepsilon = \pm 1.$$

On obtient ainsi les deux séries de solutions :

$$\varepsilon = -1 \left\{\begin{aligned} x &= 1, \quad 4, \quad 23, \quad 134, \quad \ldots\ldots \\ y &= 0, \quad 5, \quad 32, \quad 189, \quad \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

$$\varepsilon = +1 \left\{\begin{aligned} x &= 2, \quad 11, \quad 64, \quad 373, \quad \ldots\ldots \\ y &= 2, \quad 15, \quad 90, \quad 527, \quad \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

II. Considérons maintenant l'équation

(2) $$2z^2 - t^2 = -9.$$

On voit facilement que $2z^2 - t^2$ n'est divisible par 3 que si z et t sont divisibles par 3. En posant

$$z = 3v, \quad t = 3u,$$

l'équation (2) devient

$$u^2 - 2v^2 = 1.$$

Les valeurs de u et v sont données par l'égalité

$$u + v\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^{2n},$$

d'où

$$\begin{cases} x = 0,\ 3,\ 18,\ 105,\ \ldots\ldots \\ y = 1,\ 4,\ 25,\ 148,\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Les trois séries de solutions satisfont aux formules de récurrence

$$x_{n+1} = 6x_n - x_{n-1},$$
$$y_{n+1} = 6y_n - y_{n-1} + 2.$$

Autres solutions par MM. Aübibert, Dintzl et H. Brocard.

Note, par M. Boutin. La question précédente peut être généralisée de cette façon : *Trouver deux entiers dont la différence soit n et tels que l'un soit un carré et l'autre un triangulaire.*

On a à résoudre les équations indéterminées :

$$x^2 \pm n = \frac{y(y+1)}{2}.$$

On constate que l'une, ou l'autre de ces équations, ou simultanément toutes les deux, admettent en général une infinité de solutions pour chaque valeur de n. — Les valeurs de n pour lesquelles aucune des deux équations indiquées n'a de solution sont telles que $8n+1$ et $8n-1$ admettent un ou plusieurs facteurs premiers de la forme $8k \pm 3$, affecté d'un exposant impair. — Ces premières valeurs de n, c'est-à-dire les premiers nombres qui ne sont jamais la différence d'un carré et d'un triangulaire, sont :

$$7,\ 18,\ 23,\ 31,\ 37,\ \ldots\ldots$$

Pour l'équation $x^2 - 1 = \frac{1}{2}y(y+1)$, on peut se reporter à la question 1009 (*Mathesis*, (2) VI, p. 28).

Note bibliographique par M. H. Brocard.

×Question 1149.

(Voir *Mathesis*, (2) VII, p. 279 et (2) II, p. 121).

Résoudre le système

$$(y+z)(y-z)^2 = (z+x)(z-x)^2 = (x+y)(x-y)^2$$

(Moore.)

Solution par M. Emmerich. On a évidemment les solutions

$$x = y = z,\quad x = y = -z,\quad x = -y = z,\quad -x = y = z.$$

En excluant ces cas où deux quelconques des inconnues sont égales, la valeur commune p des trois produits sera différente de 0. De

$$y^2 - z^2 = \frac{p}{y-z}, \quad z^2 - x^2 = \frac{p}{z-x}, \quad x^2 - y^2 = \frac{p}{x-z}\cdots,$$

on tire, successivement,

$$\frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x} + \frac{1}{x-y} = 0,$$

$$(y-z)^2 = (z-x)(x-y), \text{ etc.}$$

$$(z-x)(x-y)(y-z) = (y-z)^3 = (z-x)^3 = (x-y)^3.$$

En combinant par voie de division les dernières égalités avec le système donné, on trouve

$$\frac{y-z}{y+z} = \frac{z-x}{z+x} = \frac{x-y}{x+y},$$

$$\frac{y}{x} = \frac{z}{x} = \frac{x}{y},$$

$$x^2 = yz, \quad y^2 = zx, \quad z^2 = xy,$$

$$x^3 = y^3 = z^3,$$

ce qui montre que x, y, z sont proportionnels aux racines cubiques de l'unité dans un ordre quelconque.

La même question a déjà été proposée sous le n° 753 dans *Mathesis* et résolue, (2) 2, p 121. L'*Ed. Times* auquel nous l'avons empruntée, l'a également proposée deux fois. *Bis repetita placent.* (J. N.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

*1157. Résoudre, en nombres entiers, l'équation

$$2^{x+1} + 2^x + 1 = u^2. \qquad \text{(DE ROCQUIGNY.)}$$

1158. D'un point M on mène les deux tangentes à une ellipse; soient P et Q les points de contact. Trouver le lieu du point M tel que la circonférence MPQ soit tangente à l'ellipse. (E. LEMOINE.)

1159. Etant donnés trois points A, B, C situés sur une droite Δ, on prend un point M variable sur une droite Δ' passant par C. Trouver le lieu des centres de similitude des cercles circonscrits aux triangles MAC et MAB. (E. N. BARISIEN.)

1160. Soient A′, B′, C′ les pieds des hauteurs et A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés d'un triangle ABC. Démontrer que les côtés des deux triangles A′B′C′ et $A_1B_1C_1$ sont tangents à une même parabole ayant pour foyer le point de Steiner du triangle $A_1B_1C_1$. (Droz Farny).

QUESTIONS D'EXAMENS.

822. On dit qu'un polygone régulier convexe est une dalle de plan lorsque le plan indéfini peut être recouvert par des polygones égaux au premier qui sont réunis sans vides ni empiètements par des côtés communs ou autour de sommets communs. Cette définition étant posée, on demande quels sont les polygones dont chacun soit une dalle du plan.

Montrer que le problème revient à résoudre en nombres entiers x et y l'équation

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}.$$

(Baccalauréat, *Rennes*, 1896).

Si autour d'un même point on peut assembler y polygones réguliers de x côtés, on a la condition

$$\frac{2(x-2)}{x}\cdot y=4, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}, \quad \text{ou} \quad y=\frac{2x}{x-2}=2+\frac{4}{x-2}.$$

On en conclut $x-2=1$, 2 ou 4, etc.

823. Résoudre un triangle isoscèle, connaissant les rayons R et r des cercles circonscrit et inscrit.

Éliminer a ou B entre les équations

$$r=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}, \quad a=2R\sin 2B.$$

La dernière donne

$$a=8R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\left(\cos^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{B}{2}\right)=8R\,\frac{\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\right)}{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\right)^2};$$

d'où l'équation

$$(a^2+4r^2)^2=16Rr(a^2-4r^2).$$

Pour *construire* le triangle, on s'appuie sur la relation

$$OI=\sqrt{R(R-2r)}.$$

PROPOSITIONS SUR LES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES,

par M. DE ROCQUIGNY-ADANSON.

I. La question 149 (*Mathesis*, II, p. 144 et III, pp. 63 et 78), que nous avons proposée dans ce Journal, peut être généralisée ainsi :

« Soit donnée une progression arithmétique de raison quelconque r et commençant par l'unité.

On dispose les termes de cette progression en lignes étagées horizontales, de la manière suivante :

Sur la 1ère ligne	l'unité.
Sur la 2e ligne	les $2.r + 1$ termes suivants;
Sur la 3e ligne	les $4.r + 1$ termes suivants;
Sur la 4e ligne	les $6.r + 1$ termes suivants;
. . . . .	
Sur la $n^{ième}$ ligne	les $2(n-1).r + 1$ termes suivants.

La somme des termes de la $n^{ième}$ ligne est égale à :

$$[(n-1)r]^3 + [(n-1)r + 1]^3.$$

Si $r = 1$, on a la question 149.

II. Soit donnée une progression arithmétique de raison quelconque r et commençant par l'unité.

On dispose les termes de cette progression en lignes étagées horizontales, de la manière suivante :

Sur la 1ère ligne	les $2.r - 1$ premiers termes;
Sur la 2e ligne	les $4.r - 1$ termes suivants;
Sur la 3e ligne	les $6.r - 1$ termes suivants;
. . . . .	
Sur la $n^{ième}$ ligne	les $2n.r - 1$ termes suivants.

L'ensemble des termes d'une horizontale quelconque est la somme de deux cubes.

On trouve, pour la $n^{ième}$ horizontale :

$$(n.r)^3 + (n.r - 1)^3.$$

III. Soit donnée une progression arithmétique de raison paire $r = 2p$ et commençant par l'unité.

On dispose les termes de cette progression en lignes étagées horizontales, de la manière suivante :

Sur la 1ère ligne . . . . les $p - 1$ premiers termes ;
Sur la 2e ligne . . . . les $2.p - 1$ termes suivants ;
Sur la 3e ligne . . . . les $3.p - 1$ termes suivants ;
. . . . . .
Sur la $n^{ème}$ ligne . . . . les $n.p - 1$ termes suivants.

La somme des termes d'une horizontale quelconque est un cube parfait.

On trouve pour la $n^{ème}$ horizontale :

$$(n.p - 1)^3.$$

IV. Soit donnée une progression arithmétique de raison paire $r = 2p$ et commençant par l'unité.

On dispose les termes de cette progression en lignes étagées horizontales, de la manière suivante :

Sur la 1ère ligne . . . . l'unité ;
Sur la 2e ligne . . . . les $p + 1$ termes suivants ;
Sur la 3e ligne . . . . les $2.p + 1$ termes suivants ;
Sur la 4e ligne . . . . les $3.p + 1$ termes suivants ;
⋮ ⋮
Sur la $n^{ème}$ ligne . . . . les $(n-1).p + 1$ termes suiv.

La somme des termes d'une horizontale quelconque est un cube parfait.

On trouve, pour la $n^{ème}$ horizontale :

$$[(n-1)p + 1]^3.$$

V. Voici une généralisation de la Question 625 (*Mathesis*, T. VIII, p. 216 et T. IX, p. 102).

Soient données les deux progressions arithmétiques :

(A) $\quad 1, \quad 1 + p, \quad 1 + 2p, \ldots\ldots$
(B) $\quad 1, \quad 1 + 2p, \quad 1 + 4p, \ldots\ldots$

où p est un nombre entier quelconque.

On partage les termes de la seconde (B) en groupes de termes consécutifs, tels que le nombre des termes du $n^{ième}$ groupe soit égal au $n^{ième}$ terme de la première progression (A). Soit S_n la somme des termes de ce groupe.

Démontrer que S_n est un cube parfait.

Si l'on intervertit les rôles des deux progressions, la somme S'_n des termes du $n^{ième}$ groupe de la première progression (A) est la somme de deux cubes.

On trouve

$$S_n = [(n-1)p+1]^3,$$
$$S'_n = [(n-1)p]^3 + [(n-1)p+1]^3.$$

Si l'on fait $p = 2^m$, on a la question 625.

VI. Voici une remarque qui est peut-être nouvelle :

Si l'on intercale entre deux carrés entiers consécutifs n^2, $(n+1)^2$, tous les nombres pairs ou impairs naturels, suivant que n est pair ou impair, l'ensemble forme un cube.

On a

$$\begin{array}{rrrr} & & & 1,\ 3,\ 4, = 2^3 \\ & & & 4,\ 6,\ 8,\ 9, = 3^3 \\ & & 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 16, = 4^3 \\ & & \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ n^2,\ n^2+2,\ n^2+4,\ \ldots\ldots,\ n^2+2n,\ (n+1)^2, & = & (n+1)^3. & \end{array}$$

VII. Le cube 8, décomposable en (3,5), (2,6), (1,7), (0,8), donne quatre progressions correspondantes, décomposables en cubes :

$$\left.\begin{array}{rrrr} & & & 3,\ 5, \text{ somme } 2^3, \\ & & & 7,\ 9,\ 11, \quad » \quad 3^3, \\ & & & 13,\ 15,\ 17,\ 19, \quad » \quad 4^3, \\ & & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n^2-n+1,\ n^2-n+3,\ \ldots\ldots,\ n^2+n-1, & & » & n^3. \end{array}\right\} \text{(A)}$$

$$\left.\begin{array}{rrrr} & & & 2,\ 6, \text{ somme } 2^3, \\ & & & 10,\ 14,\ 18,\ 22, \quad » \quad 4^3, \\ & & & 26,\ 30,\ 34,\ 38,\ 42,\ 46, \quad » \quad 6^3, \\ & & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (2n-1)^2+1,\ (2n-1)^2+5,\ \ldots\ldots,\ (2n+1)^2-3, & & » & (2n)^3, \end{array}\right\} \text{(B)}$$

$$\left.\begin{array}{rrrr} & & & 1,\ 7, \text{ somme } 2^3, \\ & & & 13,\ 19,\ 25,\ 31,\ 37, \quad » \quad 5^3, \\ & & & 43,\ 49,\ 55,\ 61,\ 67,\ 73,\ 79,\ 85, \quad » \quad 8^3, \\ & & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (3n-3)(3n-2)+1,\ (3n-3)(3n-2)+7,\ \ldots\ldots,\ 3n(3n+1)-5, & & » & (3n-1)^3, \end{array}\right\} \text{(C)}$$

$$\left.\begin{array}{rl} 0,\ 8, & \text{somme } 2^3, \\ 16,\ 24,\ 32,\ 40,\ 48,\ 56, & \text{» } 6^3, \\ 64,\ 72,\ 80,\ 88,\ 96,\ 104,\ 112,\ 120,\ 128,\ 136, & \text{» } 10^3, \\ \vdots & \vdots \\ [4(n-1)]^2,\ [4(n-1)]^2+8, \ldots\ldots\ldots, (4n)^2-8, & \text{» } [2(2n-1)]^3. \end{array}\right\} \text{(D)}$$

Les horizontales générales sont de rang n, sauf pour (A), où l'horizontale est de rang $n-1$.

VIII. On peut généraliser les résultats du § précédent, par l'introduction d'un seul nombre *négatif :*

$$\begin{array}{rl} -1,\ 9, & \text{somme } 2^3, \\ 19,\ 29,\ 39,\ 49,\ 59,\ 69,\ 79, & \text{» } 7^3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 5[5(n-1)^2-n-1]+9, \ldots\ldots, 5(5n^2-n-2)-1, & \text{» } (5n-3)^3. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} -2,\ 10, & \text{somme } 2^3, \\ 22,\ 34,\ 46,\ 58,\ 70,\ 82,\ 94,\ 106, & \text{» } 8^3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 12[3(n-1)^2-n]+10, \ldots\ldots, 12(3n^2-n-1)-2, & \text{» } (6n-4)^3. \end{array}$$

IX. Soit la progression arithmétique générale :

$$-a,\quad a+8,\quad 3a+16,\quad 5a+24,\quad 7a+32,\quad \ldots\ldots$$

de raison $2a+8$ et commençant par le nombre entier *négatif* $-a$.

On dispose les termes de cette progression en lignes étagées horizontales, de la manière suivante :

Sur la 1ère ligne . . . . . les $(a+4)-(a+2)$ premiers termes.
Sur la 2e ligne . . . . . les $2.(a+4)-(a+2)$ termes suivants.
Sur la 3e ligne . . . . . les $3.(a+4)-(a+2)$ termes suivants.
⋮ ⋮ ⋮ . . . . . ⋮ ⋮ ⋮
Sur la $n^{ième}$ ligne . . . . . les $n(a+4)-(a+2)$ termes suivants.

La somme des termes d'une horizontale quelconque est un cube parfait.

On trouve, pour la $n^{ième}$ horizontale :

$$[(a+4)\,n-(a+2)]^3.$$

PROPRIÉTÉS DES CERCLES DE CHASLES,

Étude bibliographique, par M. H. BROCARD.

L'intérêt qui s'attache à l'étude géométrique des normales à l'ellipse et au rôle important que jouent les cercles Σ et Σ' concentriques à l'ellipse et de rayons $(a+b)$ et $(a-b)$, explique pourquoi plusieurs des propriétés signalées dans les monographies et additions publiées récemment dans *Mathesis* (1895, 129, 158, 241; 1896, 193) avaient été déjà obtenues depuis quelque temps par d'autres chercheurs.

L'objet du présent article est donc moins d'ajouter de nouvelles propositions que de signaler des travaux antérieurs qui avaient échappé à l'attention des auteurs des récents mémoires susmentionnés. Ce sera une sorte de bibliographie rétrosprective qui pourtant ne fera pas double emploi avec les résultats publiés.

Parmi les auteurs qui semblent avoir tenté une étude systématique des cercles Σ et Σ', je dois signaler MM. J. BRUNO, C. de POLIGNAC, et particulièrement M. BÖKLEN, à Reutlingen.

La proposition **2** (1895, 130) est l'énoncé de la question 1212 des N. A. M. (J. BRUNO), résolue 1876, 381 (*Laisant, Problèmes*, IV, n° 730).

Au sujet des énoncés **1** et **2**, voir aussi N. A. M., quest. 1114, 1115 et 1116 (C. de POLIGNAC) résolues 1873, 282-285 (*Laisant, Problèmes*, IV. N^{os} 418, 419, 420)(*) et un article de M. D'OCAGNE (N. A. M., 1888, 281-282).

Sur une propriété du rayon de courbure, voir N. A. M., question 1113 (C. de POLIGNAC), résolue 1873, 280-282 (*Laisant, Problèmes*, IV, n° 124).

Relativement à la proposition **17** (*Mathesis*, 1895, p. 158), voir N. A. M., question 1101 (J. BRUNO) résolue 1874, 247-250 (*Laisant, Problèmes*, IV, n° 75) et aussi une note de M. L. PAILLOTE (N. A. M., 1869, 269).

M. BÖKLEN a fait des recherches plus étendues et plus suivies, dont le résumé a été publié en 1884 dans le *Journal de Hoffmann* (*Zeitschrift f. Math., u. Nat. Unterricht*, XV, 21-23).

(*) Aux lecteurs qui n'ont pas à leur disposition immédiate la collection des N. A. M., nous donnons une facilité nouvelle par l'indication de la correspondance de ces questions avec le répertoire récemment édité par M. Laisant.

Nous avons pensé que leur adaptation au présent recueil serait d'une grande utilité et pourrait provoquer de nouveaux efforts dans une étude qui a déjà fourni une si abondante moisson de résultats géométriques.

On trouve, dans les *Œuvres complètes* de STEINER (t. II, p. 671), la proposition suivante (rédigée d'une manière un peu différente) :

« Etant donnée une ellipse E ayant O pour centre et a, b pour demi-« axes, du point O comme centre, avec $a + b$ pour rayon, on décrit une « circonférence Σ. Il existe une infinité de triangles (T) ABC, circons-« crits à l'ellipse E et inscrits à la circonférence Σ ou à la circonférence « Σ' (*Mathesis*, 1895, p. 248, n° 1081).

« Le produit des distances du point O à leurs côtés est égal à « $\frac{ab}{2}(a \pm b)$.

« Soient A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés du triangle (T) ABC. Le « produit des distances du point O aux côtés du triangle $A_1B_1C_1$ est « égal à $\frac{a^2b^2}{4(a \pm b)}$. Les cercles circonscrits aux triangles (T) (ou $A_1B_1C_1$) « sont égaux et leurs centres sont à une distance constante du point O, « aussi bien que l'orthocentre H de chaque triangle (T), que le barycen-« tre, etc. »

Dans ce qui va suivre nous considérons d'abord les propriétés où intervient le signe +.

1. $$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{ab}{2(a+b)^2}.$$

REMARQUE. Dans la Note de M. BÖKLEN, on a imprimé une somme de cosinus; cette erreur typographique provient probablement d'une confusion entre les signes + et ×. Cette formule a été donnée dans *Mathesis*, *loc. cit.*, p. 249, n° 1087.

2. $$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - \frac{2ab}{(a+b)^2}.$$

3. $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - \frac{ab}{(a+b)^2}.$$

4. $$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + \frac{ab}{(a+b)^2}.$$

Ces formules sont bien celles qui ont été données (*loc. cit.* p. 249, n° 1088).

5. La somme des carrés des distances de O aux trois côtés du triangle (T) a pour valeur $a^2 + ab + b^2$. (*Loc. cit.*, n° **108**).

6. Le produit des segments supérieurs des hauteurs du triangle (T) est égal à $4ab(a+b)$; la somme de leurs carrés est $4(a^2 + ab + b^2)$.

7. Le produit des segments inférieurs des hauteurs est $2\frac{a^2b^2}{a+b}$.

8. L'orthocentre H des triangles (T) décrit la circonférence Σ' de rayon $a - b$, le centre du cercle d'Euler $A_1B_1C_1$ décrit la circonférence de rayon $\frac{1}{2}(a-b)$, le barycentre décrit la circonférence de rayon $\frac{1}{3}(a-b)$, et l'orthocentre H′ des triangles dont A, B, C sont les milieux des côtés, décrit la circonférence Σ'. (*Loc. cit.* n° **102**, nouvelle rédaction, 1896, 194).

Les quatre points susmentionnés sont sur un diamètre de ce cercle ; H et H′ en sont les extrémités. Les hauteurs qui se rencontrent en H′ sont normales à l'ellipse E.

9. Considérons un triangle (T) circonscrit à l'ellipse E et inscrit au cercle Σ. Les normales à l'ellipse aux trois points de contact se rencontrent sur la circonférence Σ', de rayon $(a-b)$, en un point H′. Le pied de la quatrième normale qu'on peut mener du point H′ et le quatrième point d'intersection, avec l'ellipse, du cercle passant par les trois points de contact sont diamétralement opposés sur l'ellipse E.

10. Le cercle d'Euler du triangle (T) ABC est tangent aux cercles *principal* et *secondaire*; il rencontre l'ellipse E en quatre points A_2, B_2, C_2, D_2; trois forment un triangle $A_2B_2C_2$, dont les côtés sont tangents au cercle de rayon $\frac{ab}{a+b}$. Les normales à E aux sommets de ce triangle se rencontrent en un point H, situé sur l'ellipse ayant pour demi-axes $\frac{b}{a}(a-b)$ et $\frac{a}{b}(a-b)$. Cette ellipse est, comme le cercle Σ', inscrite et tangente à la développée de l'ellipse E (*Loc. cit.*, n° **36**). Le quatrième point D_2 et le pied de la quatrième normale issue du point H′, sont diamétralement opposés sur l'ellipse E.

11. Le cercle d'Euler du triangle T (ABC) est circonscrit à un autre triangle $A_3B_3C_3$, formé par les pieds des hauteurs du triangle (T). Le centre du cercle inscrit au triangle $A_3B_3C_3$ est sur la circonférence Σ' et son rayon a pour valeur $\frac{ab}{a+b}$. Si maintenant le triangle (T) se déplace en restant circonscrit à l'ellipse E et inscrit au cercle Σ, les deux trian-

gles $A_1B_1C_1$ et $A_1B_1C_1$ se déplacent en même temps. Représentant par R et r le rayon du cercle circonscrit et inscrit à l'un de ces triangles, on aura, pour les divers couples de triangles, $R = \frac{a+b}{2}$, et $r = \frac{ab}{a+b}$, c'est-à-dire deux constantes. Cela posé :

12. *a*) La somme des cosinus des angles est $1 + \frac{r}{R}$.

b) La somme des carrés des cosinus des demi-angles est $2 + \frac{r}{2R}$.

c) La somme des carrés des sinus des demi-angles est $1 - \frac{r}{2R}$.

d) Le produit des sinus des demi-angles est $\frac{r}{4R}$.

e) Le quotient du produit des côtés par le périmètre est $2Rr$.

f) La somme des médiatrices est $R + r$.

g) La somme des segments supérieurs des hauteurs est $2(R + r)$.

h) La somme des inverses des hauteurs est $\frac{1}{r}$.

i) La somme des rayons des cercles ex-inscrits est $4R + r$.

k) La somme des inverses de ces rayons est $\frac{1}{r}$.

l) La somme des carrés des distances du point O aux centres des trois cercles ex-inscrits est $11R^2 + 2Rr$.

m) Le produit des distances du centre du cercle inscrit aux trois sommets est $4Rr^2$.

n) Le produit des distances du centre du cercle inscrit aux centres des trois cercles ex-inscrits est $16R^2r$.

o) La somme des carrés de ces distances est $16R^2 - 8Rr$.

p) La somme des carrés des côtés au triangle ayant pour sommets les centres des cercles ex-inscrits est $32R^2 + 8Rr$.

Remarque. Les triangles $A_2B_2C_2$ sont ceux dont Steiner (II, p. 671 et suiv.) a signalé quelques propriétés. Dans ses propositions, le signe — doit intervenir lorsque a est $> 2b$. En dehors des triangles (T) ABC, ces variétés d'ellipse peuvent être circonscrites à d'autres triangles $A_0B_0C_0$ ayant leurs sommets sur la circonférence Σ'. Plusieurs des propriétés susmentionnées s'appliquent à ces triangles, mais avec modification. En combinant le théorème de Poncelet sur les triangles à la fois

inscrits et circonscrits à des coniques (STEINER, I, p. 356) avec la proposition (II, p. 629) dont voici l'énoncé : « Les tangentes à l'ellipse E, aux pieds des quatre normales issues d'un point P à cette courbe, forment avec les deux axes de l'ellipse six tangentes d'une même parabole »; on aura un point de départ pour la démonstration des propositions 9 et 10.

NOTES. Nous avons cru devoir donner communication de la présente étude à M. A. DROZ-FARNY, auteur de l'importante addition récemment publiée (*Mathesis*, 1896, 193-197). Notre savant correspondant a bien voulu nous signaler des rectifications de détail à y apporter, en même temps que différentes indications bibliographiques utiles à y ajouter. Nous en donnons ci-après un extrait.

1. Les théorèmes 86 et 88 de M. BARISIEN (*Mathesis*, 1895, 246-247) ont été démontrés dans un article intitulé : *Théorèmes relatifs à la parabole*, paru au n° 1 d'octobre 1894 du *Bulletin de Mathématiques spéciales* de M. B. NIEWENGLOWSKI.

2. Pour la propriété 1 (p. 130), voir aussi *Journal de Vuibert*, 11^me^ année, p. 155, et une généralisation de CATALAN (J. M. S., 1887, p. 83).

3. Autre propriété des cercles Σ et Σ' : on considère toutes les paraboles bitangentes à une ellipse et ayant leurs foyers sur l'ellipse. Le lieu du point d'intersection des tangentes aux points de contact se compose des cercles Σ et Σ'. (CH. MICHEL, *Bulletin de Niewenglowski*, année 1894-1895, p. 116).

4. Les propriétés énoncées au § 12 ($a, b, \ldots o, p$) sont valables pour un triangle quelconque.

5. La plupart des propriétés des triangles T ont été démontrées géométriquement dans la solution, par M. DROZ-FARNY, de la question 937 (Voir *Mathesis*, 1895, 258-260).

6. Le produit des diamètres de l'ellipse E parallèles aux côtés du triangle T est constant (*loc. cit.*, p. 260). M. DROZ-FARNY ajoute que cette constante est égale à $16\,\frac{a^2b^2}{a+b}$.

7. La plupart des théorèmes de STEINER (*Vermischte Sätze und Aufgaben*, t. II, p. 663) sont démontrés dans la thèse doctorale : *Ueber einem Dreieck um- und eingeschriebene Kegelschnitte* (sur les coniques inscrites et circonscrites à un triangle), par KARL DÖRHOLT, 1884.

SUPPLÉMENT. Pour abréger les recherches bibliographiques, nous croyons utile de reproduire ici les principaux énoncés de questions des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, dont il a été fait mention au début du présent article.

1101. a et b étant les demi-axes d'une ellipse, soient décrits deux cercles concentriques à cette courbe, ayant respectivement pour rayons $a+b$ et $a-b$. Si d'un point quelconque de l'un d'eux on mène deux tangentes à l'ellipse, les normales à cette courbe aux deux points de contact se rencontreront sur l'autre cercle. (J. BRUNO.)

1113. Le rayon de courbure en un point de l'ellipse, qui est égal au demi-diamètre conjugué de ce point, a son extrémité sur ce diamètre. Il est tangent au cercle concentrique à l'ellipse ayant la différence de ses axes pour rayon. (DE POLIGNAC.)

1114. Les cercles concentriques à l'ellipse, dont les rayons sont respectivement la somme et la différence de ses axes, interceptent, sur toute normale à l'ellipse, des segments dont deux sont toujours égaux. En donner l'expression. (DE POLIGNAC.)

1115. Montrer que l'on peut placer une infinité d'ellipses concentriques et co-axiales à une ellipse donnée, jouissant deux à deux de la même propriété. Les axes de l'ellipse peuvent être considérés comme deux ellipses (non correspondantes) de la série. (DE POLIGNAC.)

1116. Deux ellipses quelconques de la série interceptent, sur toute normale à l'ellipse donnée, deux segments dont le rapport est constant. (DE POLIGNAC.)

1119. Par les différents points m d'une ellipse on mène des normales à la courbe, et sur chacune de ces droites on prend à partir du point m et des deux côtés de ce point des segments mM, mM' égaux au demi-diamètre conjugué de celui qui passe en m; démontrer que les lieux géométriques des points M, M' sont des circonférences concentriques à l'ellipse dont les rayons sont respectivement égaux à la somme et à la différence des demi-axes de la courbe. (J. BRUNO.)

BIBLIOGRAPHIE; PUBLICATIONS RÉCENTES.

G. LAZZERI e A. BASSANI, Professori nella R. Accademia Navale. **Elementi di Geometria.** Con 312 figure intercalate Seconda edizione migliorata. Livorno, Giusti, 1898 (XVI-380 p. in-8°). Prix : 5 lire.

Dans la géométrie de MM. Lazzori et Bassani, les parties correspondantes de la planimétrie et de la stéréométrie sont rapprochées, ce qui est contraire aux programmes officiels italiens; malgré cela, leur livre a fait son chemin dans le monde de l'enseignement, sans doute à cause de sa valeur scientifique et pédagogique.

La première édition de cet ouvrage a paru en 1891 et a été annoncée dans *Mathesis* (1891, p. 274); la seconde dont nous venons de transcrire le titre contient quelques améliorations de détail surtout sur des questions de principes ; on

n'y a plus reproduit un certain nombre de questions qui ne sont pas enseignées dans les collèges (volume et surface du tore; théorie des centres, des axes et des plans radicaux et des centres de similitude).

Traité d'algèbre élémentaire à l'usage de l'enseignement moyen, par E. COLART, professeur de mathématiques supérieures à l'Athénée royal de Huy. 2e édition, Bruxelles, A. CASTAIGNE, 1898 (330 pp. in-8°). Prix : fr. 3,75.

La première édition de cet ouvrage a obtenu, en 1894, le prix de Keyn, et le rapport du jury s'exprimait en ces termes: « sans prétendre que le traité soit absolument irréprochable, le jury a jugé qu'il réalise un progrès considérable. »

La deuxième édition contient plusieurs changements. L'auteur a notamment utilisé les remarques de M. De Tilly sur les valeurs principales des radicaux; il a ajouté une théorie des rentes viagères plus scientifique que celle qui se base sur la vie probable; enfin il a introduit, dans les premières pages, quelques questions relatives à l'intérêt, à l'escompte, aux mélanges et aux alliages, afin de se conformer plus exactement au programme des classes inférieures des Athénées. A part une légère réserve à faire sur la définition du titre des alliages, ces changements sont heureux, et le traité qui était déjà très bon, s'approche davantage de la perfection. C'est un manuel qui rendra de grands services dans l'enseignement moyen.

(M. STUYVAERT).

Œuvres scientifiques de L. LORENTZ, revues et annotées par H. VALENTINER (publiées aux frais de la fondation Carlsberg). Tome premier. Deuxième fascicule. Copenhague, Lehman et Staze, 1898.

Ce second fascicule contient les travaux suivants : 1° Recherches expérimentales et théoriques sur les indices de réfraction (pp. 211-367). 2° Théorie de la dispersion (pp. 369-402). 3° Sur la lumière réfléchie et réfractée par une sphère transparente (403-509). Des notes savantes ajoutées à chaque mémoire par le consciencieux éditeur éclaircissent les points difficiles de l'œuvre du grand physicien danois. Grâce à cette belle publication, en français, les recherches sur l'optique du digne émule de MAXWELL sont mises à la portée de tous ceux qui s'intéressent à la philosophie naturelle.

Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes, par G. DARBOUX, Membre de l'Institut, Doyen de la Faculté des Sciences, Professeur de Géométrie supérieure à l'Université de Paris. Tome I. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1898 (IV-338 pages, gr. in-8°). Prix : 10 fr.

Nous ne pouvons donner une meilleure idée de ces savantes leçons qu'en en publiant la courte préface et la table des matières.

« L'Ouvrage dont je publie aujourd'hui le premier volume, dit M. Darboux, est consacré à l'exposition d'une théorie qui trouve son origine dans les travaux de Lamé, mais qui, dans ces derniers temps, a été l'objet d'un assez grand nombre de recherches.

Dans les *Leçons sur la théorie des surfaces*, j'avais déjà fait connaître, d'une manière incidente, différentes propriétés des systèmes triples orthogonaux et des coordonnées curvilignes ; mais j'avais réservé le développement régulier et systématique des théories qui se rattachent à ce beau sujet pour le nouveau Traité dont je commence aujourd'hui la publication. »

Sommaire du tome I. LIVRE I. *L'équation du troisième ordre.* — Chap. I. Les familles de Lamé. Théorème de Dupin et sa réciproque. — Chap. II. Systèmes triples comprenant une famille de plans ou une famille de sphères. — Chap. III. Étude d'une intégrale particulière de l'équation du troisième ordre. — Chap. IV. Formes diverses de l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre. — Chap. V. Les familles de Lamé formées avec des quadriques. — Chap. VI. Systèmes orthogonaux à n variables. Extension des méthodes précédentes.

LIVRE II. *Les coordonnées curvilignes.* — Chap. I. Systèmes orthogonaux à n variables. — Chap. II. Le trièdre mobile. — Chap. III. Recherche d'un système triple particulier. — Chapitre IV. Recherche d'un système triple particulier (*suite*). Examen du troisième type de solution. — Chap. V. Recherche des systèmes isothermes et d'autres systèmes qui se présentent dans la théorie de la chaleur. — Chap. VI. Les systèmes triples de M. Bianchi.

Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques avec tables numériques et applications, par L. Lévy, examinateur d'admission et répétiteur d'analyse à l'École polytechnique. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1898 (XII-237 p. gr. in-8°). Brux., fr. 7 50.

Sommaire : Chap. I. *Notions préliminaires.* Représentation des quantités imaginaires. Points critiques, fonctions holomorphes, méromorphes, uniformes. — Chap. II. *Des séries.* Étude préliminaire d'une fonction holomorphe, périodique de troisième espèce. La fonction θ : périodes, zéros ; équation à trois termes. Les fonctions θ_1, θ_2, θ_3 : développements en séries d'exponentielles ou de lignes trigonométriques, changement de signe de l'argument, addition des périodes et des demi-périodes, zéros, relations quadratiques, développements en produits. Exercices. — Chap. III. *Fonctions* σu, $\sigma_\alpha u$, ζu. Définitions : parité, zéros, développement suivant les puissances de u ; η_1, η_2, η_3 : addition des périodes et des demi-périodes. Equation à trois termes : formules d'addition. ζu : addition des périodes, parité, formule d'addition. Exercices. — Chap. IV. *Des fonctions elliptiques.* Premier point de vue : pu, double périodicité, parité, racines de la dérivée, introduction de pu dans les formules du Chapitre précédent. Deuxième point de vue : $\mathrm{sn}u$, $\mathrm{cn}u$, $\mathrm{dn}u$; parité, périodicité, zéros, pôles, relations fondamentales. Première formule d'addition de pu ; équation différentielle de pu. Les puissances de pu en fonction linéaire de pu et des dérivées. Deuxième formule d'addition de pu ; $\sqrt{pu - e_\alpha}$ est uniforme. Expression de e_α en fonction des θ. Rapprochement entre les différentes constantes. Relation entre pu et $\mathrm{sn}u$. Equa-

tions différentielles de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$. Variation de pu (valeurs réelles); formule d'homogénéité. Variation de $\operatorname{sn} u$. Exercices. — Chap. V. *Intégration par les formules elliptiques.* Intégration des fonctions qui sont rationnelles par rapport aux fonctions elliptiques. Inversion. Intégrales complètes de Legendre. Exercices. — Chap. VI. *Calculs numériques : usage des Tables.* Calcul de ω_1, ω_2, η_1, η_2 dans les deux cas du discriminant positif et du discriminant négatif. Connaissant u et k, calculer $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, pu, $p'u$, ζu et problème inverse. Exercices. — Chap. VII. *Applications mécaniques, géométriques, algébriques.* Exercices. — Chap. VIII. *Deuxième méthode de calcul : emploi des séries* θ. Les constantes K, K', q, ω_1, ω_2, η_1, η_2 Les fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, pu, ζu, σu connaissant u, et problème inverse. Mêmes problèmes avec le discriminant négatif. Exercices. — Chap. IX. *Compléments : décomposition en facteurs et en éléments simples; multiplication de l'argument; addition de* $\operatorname{sn} u$. Rappel des théorèmes relatifs à l'intégration le long de contours imaginaires. Application aux fonctions elliptiques; construire une fonction elliptique : 1° connaissant ses pôles et ses zéros; 2° ses pôles et ses parties infinies dans le voisinage de chaque pôle. Multiplication de l'argument pour pu. Deuxième démonstration des formules qui donnent $\operatorname{sn}(u+v)$, $\operatorname{cn}(u+v)$, $\operatorname{dn}(u+v)$.

Notes. I. Réduction de quatre intégrales aux fonctions elliptiques. — II. Dégénérescences. — III. Inversion en quantités réelles par les fonctions de Jacobi. — IV. Application numérique des fonctions elliptiques au mouvement presque vertical des projectiles.

Exercices divers. — Quelques valeurs des fonctions de Jacobi. — Résumé des principales formules. — Comparaison des notations du *Précis* avec celles de quelques Ouvrages. — Tables numériques.

Autant que nous pouvons en juger, le Précis de M. Lévy, plus court que les traités de Halphen, Molk et Tannery, Greenhill, plus pratique que celui d'Appell et Lacour, plus complet que l'ouvrage de Henry, est appelé à un grand succès en France et ailleurs; mais combien il aurait pu être plus élémentaire, si l'auteur avait davantage tenu compte du développement historique de la théorie des fonctions elliptiques. (P. M.).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 990.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 264).

Les points P, Q, R, S *divisent respectivement les côtés* AB, BC, CD, DA *d'un pseudocarré* ABCD *dans un rapport* γ : 1. *Démontrer que, si* γ *varie,* 1° *le quadrilatère* PQRS *est toujours un pseudocarré*; 2° *les enveloppes des diagonales* PR, QS *sont deux paraboles dont les axes sont rectangulaires*; 3° *le lieu du point d'intersection de* PR *avec* QS *est une strophoïde droite.* (P. H. Schoute.)

Solution analytique par M. V. Retali. Prenons pour axes coordonnés les diagonales AOC, BOD et posons $OA=a$, $CO=a'$, $OD=b$, $BO=b'$, $a+a'=b+b'=d$: les coordonnées des points P, Q, R, S sont

$$\begin{cases} x=a\gamma, \\ y=b(1-\gamma); \end{cases} \quad \begin{cases} x=a(1-\gamma), \\ y=-b'\gamma; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-a'\gamma, \\ y=-b'(1-\gamma); \end{cases} \quad \begin{cases} x=-a'(1-\gamma), \\ y=b\gamma; \end{cases}$$

et, par conséquent,

$$\overline{PR}^2=\overline{QS}^2=d^2[\gamma^2+(1-\gamma)^2].$$

En posant $\alpha=a-a'$, $\beta=b-b'$, $p=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, $q=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, les droites PR, QS ont pour équations

$$(1-\gamma)x-\gamma y=\gamma(1-\gamma)p, \tag{1}$$
$$\gamma x+(1-\gamma)y=\gamma(1-\gamma)q, \tag{2}$$

elles sont donc perpendiculaires. Pour trouver leurs enveloppes, nous en écrivons les équations sous la forme

$$p\gamma^2-(x+y+p)\gamma+y=0,$$
$$q\gamma^2+(x-y-q)\gamma+y=0,$$

et, égalant à zéro les discriminants, nous avons

$$(x+y+p)^2-4px=0,$$
$$(x-y-q)^2-4qy=0:$$

deux paraboles dont les tangentes aux sommets sont

$$2(x+y)+p=0,$$
$$2(x-y)-q=0,$$

c'est-à-dire les *médianes* du pseudo carré ABCD. Les coordonnées du *point-moyen* V sont $\frac{1}{4}\alpha$ et $\frac{1}{4}\beta$. Les deux paraboles ont les paramètres $-p\sqrt{2}$, $q\sqrt{2}$, et leurs axes sont les bissectrices des angles des axes coordonnés.

Les coordonnées du point ω commun aux droites (1), (2) sont

$$x=\frac{\gamma(1-\gamma)(p+\gamma\beta)}{\gamma^2+(1-\gamma)^2}, \quad y=\frac{\gamma(1-\gamma)(q-\gamma\alpha)}{\gamma^2+(1-\gamma)^2},$$

et si nous posons $t=\dfrac{q-\gamma\alpha}{p+\gamma\beta}$, nous aurons, pour les équations paramétriques du lieu du point ω,

$$x=\frac{(q-pt)(p+qt)}{(\alpha+\beta t)(1+t^2)}, \quad y=\frac{t(q-pt)(p+qt)}{(\alpha+\beta t)(1+t^2)}, \tag{3}$$

qui représentent une cubique circulaire avec un point double à l'origine. Les coefficients angulaires des tangentes (orthogonales) au point double sont $\frac{q}{p}$ et $-\frac{p}{q}$; les paramètres des points à l'infini sont $\pm i$, qui correspondent aux points cycliques, et $-\frac{\alpha}{\beta}$ qui donne la direction de l'asymptote réelle; cette asymptote est donc perpendiculaire à la droite

$$\beta x - \alpha y = 0$$

qui unit le nœud avec le *point-moyen* du pseudocarré. Les points à l'infini sont des points stationnaires de la cubique, qui est donc une strophoïde droite.

Si nous voulons l'équation de la courbe en coordonnées rectangulaires, il suffit d'éliminer t entre les deux équations (3); nous avons

$$pq(x^2 - y^2) + (q^2 - p^2)xy = (\alpha x + \beta y)(x^2 + y^2)$$

ou bien

$$\tfrac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2)(x^2 - y^2) + \alpha\beta xy = (\alpha x + \beta y)(x^2 + y^2);$$

faisons maintenant tourner les axes d'un angle θ, tel que $\operatorname{tg}\theta = \frac{\beta}{\alpha}$, ce qui revient à prendre pour nouvel axe des abscisses la droite OV; nous aurons

$$x = \xi\cos\theta - \eta\cos\theta,$$

$$y = \xi\sin\theta + \eta\cos\theta,$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 - y^2) = (\alpha^2 - \beta^2)(\xi^2 - \eta^2) - 4\alpha\beta\xi\eta,$$

$$\alpha x + \beta y = \xi\sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)xy = \alpha\beta(\xi^2 - \eta^2) - (\alpha^2 - \beta^2)\xi\eta;$$

et l'équation de la cubique prend la forme

$$(\xi^2 - \eta^2)\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 4\xi(\xi^2 + \eta^2),$$

équation d'une strophoïde droite avec le point double à l'origine et dont le sommet est le point moyen du pseudocarré donné.

Solution analytique par MM. Barisien, Colart, Klompers, Dépres et Jonesco.

Solution géométrique par M. Mandart. Soient P′, Q′, R′, S′ les points symétriques des points P, Q, R, S par rapport aux milieux des côtés correspondants. Les figures SP′QR′, S′PQ′R sont des rectangles égaux, car $SP' = \frac{DB}{\gamma + 1}$, $PQ' = \frac{AC}{\gamma + 1}$; de même $P'Q = Q'R$.

et par suite *le lieu du point* C *est le cercle ayant le centre* K *et le rayon* BK.

Lorsque BA tourne autour du point B, LA coupe le tangente en B au cercle donné en un point P qui marque sur cette tangente une ponctuelle projective au faisceau B(A...) : l'enveloppe de la perpendiculaire menée par P sur BA est une parabole P^2 ayant le foyer L et la directrice BK. Cela posé, BC est parallèle à AL, le quadrilatère ADBP est un trapèze isoscèle et ses diagonales DP, AB se coupent à angle droit en E (car $DAB + ABP = 90°$) : Le lieu du point E est donc la podaire de la parabole P^2 par rapport au point B de la directrice (sur l'axe), c'est-à-dire une focale à nœud, et précisément *la strophoïde ayant en* B *son nœud; le sommet est le milieu des segments* BL.

Ont résolu la même question MM. Barisien, Degueldre, Colart, Andrien, Soons, Déprez En prenant pour axe polaire ou axe des x le diamètre mené par A ou par B, pour origine A ou B, ils ont trouvé pour équations du lieu décrit par E :

1° $\rho = \dfrac{2R\cos^2\omega}{\sin\omega + \cos\omega}$, $(x^2+y^2)(x+y) = 2Rx^2$;

2° $\rho = \dfrac{2R\sin\omega\cos\omega}{\sin\omega + \cos\omega}$, $(x^2+y^2)(x+y) = 2Rxy$.

Question 1126.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 151).

On donne deux axes rectangulaires. Un cercle de rayon donné coupe OX *en* A *et* A', OY *en* B *et* B'. *Ce cercle se déplace de manière que la corde* AB *conserve la même longueur. On demande* : 1° *Le lieu du point de rencontre des droites* AB *et* A'B'. 2° *Le lieu du point de rencontre des droites* AB' *et* A'B. 3° *Le lieu du centre de ce cercle.*

(E. Romieux).

Solution par M. Barisien. La solution de cette question est rendue des plus faciles par la connaissance du théorème suivant, assez connu : *Si deux cordes d'un cercle,* AA' *et* BB' *se coupent perpendiculairement en* O, *on a,* R *étant le rayon du cercle,*

$$\overline{AB}^2 + \overline{A'B'}^2 = 4R^2.$$

Il en résulte donc que si AB a une longueur constante a, la droite A'B' a aussi une longueur constante b, telle que $a^2 + b^2 = 4R^2$.

Par conséquent, chacune des droites AB et A'B' enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements.

1° Soit maintenant φ l'angle variable BAO. On a, par suite,

$$OA = a\cos\varphi, \quad OB = a\sin\varphi, \quad OA' = -b\sin\varphi, \quad OB' = -b\cos\varphi.$$

Les équations des droites AB et A'B' sont :

$$\frac{x}{\cos\varphi}+\frac{y}{\sin\varphi}=a, \quad \frac{y}{\cos\varphi}+\frac{x}{\sin\varphi}=-b.$$

On en tire

$$\cos\varphi=\frac{x^2-y^2}{ax+by}, \quad \sin\varphi=-\frac{(x^2-y^2)}{bx+ay}.$$

L'équation du lieu du point de rencontre des droites AB et A'B' est donc

$$(x^2-y^2)^2\left[\frac{1}{(ax+by)^2}+\frac{1}{(bx+ay)^2}\right]=1.$$

Ce lieu est une courbe du 6^{me} degré.

2° Les équations des droites AB' et A'B sont

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\cos\varphi, \quad \frac{x}{b}-\frac{y}{a}=-\sin\varphi.$$

Le lieu du point de rencontre de ces droites a donc pour équation

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{x}{b}-\frac{y}{a}\right)^2=1. \tag{11}$$

C'est une ellipse ayant son centre en O.

3° Le centre C du cercle est le troisième sommet d'un triangle ABC dont les sommets A et B se déplacent sur les droites fixes OX, OY. On sait que le lieu de ce point est une ellipse.

Si on désigne par α l'angle CAB, qui satisfait aux égalités $\cos\alpha=\frac{a}{2R}$, $\sin\alpha=\frac{b}{2R}$, les coordonnées x et y de C ont pour expression

$$x=a\cos\varphi-R\cos(\varphi-\alpha), \quad y=R\sin(\varphi-\alpha)$$

ou, en posant $\varphi-\alpha=\psi$,

$$x=a\cos(\psi+\alpha)-R\cos\psi, \quad y=R\sin\psi.$$

Éliminant ψ entre ces deux équations, ce qui n'offre aucune difficulté, on trouve pour l'équation du lieu, l'ellipse

$$(2R^2x+aby)^2+(y^2-R^2)(a^2-2R^2)^2=0.$$

Remarque. Le cercle mobile peut occuper par rapport à la corde AB deux positions symétriques; par suite, chacun des lieux considérés se compose de deux courbes.

Ont résolu la même question MM. Degueldre, Soons, Audibert et Dépres.

×Question 1134.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 212).

Résoudre le système d'équations

$$\sin x = a \sin(y+z), \quad \sin y = b \sin(x+z), \quad \sin z = c \sin(x+y).$$

(Neuberg).

Solution par M. Audibert. Développant les seconds membres et éliminant tour à tour x, y et z on obtient les relations

$$(1) \qquad \begin{cases} c(ab-1)\sin^2 y - b(ac-1)\sin^2 z = 0, \\ c(ab-1)\sin^2 x - a(bc-1)\sin^2 z = 0, \\ b(ac-1)\sin^2 x - a(bc-1)\sin^2 y = 0. \end{cases}$$

Chacune d'elles est la conséquence des deux autres; mais si l'on introduit dans une des équations données, la dernière par exemple, les valeurs de sin x et de sin y en fonction de sin z, tirées de (1), on a

$$\left(\frac{ab-1}{c}\right)^{\frac{1}{2}} = (a(bc-1))^{\frac{1}{2}} \cos y + [b(ac \quad 1)]^{\frac{1}{2}} \cos x.$$

D'autre part, la dernière relation de (1) peut s'écrire

$$[b(ac-1)\cos^2 x - (a-b)]^{\frac{1}{2}} = [a(bc-1)]^{\frac{1}{2}} \cos y$$

et l'élimination de cos y donne finalement

$$\cos x = \frac{ab + ac - bc - 1}{2[bc(ab-1)(ac-1)]^{\frac{1}{2}}}.$$

On aurait de même

$$\cos y = \frac{ab + bc - ac - 1}{2[ac(ab-1)(bc-1)]^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos z = \frac{ac + bc - ab - 1}{2[ab(ac-1)(bc-1)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Solution par M. Lefèvre (Liége). Posons $x + y + z = s$; la première équation devient

$$\sin s = a \sin(s-x) = a(\sin s \cos x - \cos s \sin x).$$

De là :

$$\operatorname{tg} x = \frac{a \sin s}{1 + a \cos s}, \quad \operatorname{tg} y = \frac{b \sin s}{1 + b \cos s}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{c \sin s}{1 + c \cos s}$$

Portant ces valeurs dans la relation

$$\operatorname{tg} s = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z - \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x},$$

on trouve

$$\cos s = \frac{1 - (ab + bc + ca)}{2abc},$$

$$\operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{4a^2b^2c^2 - (1 - ab - bc - ca)^2}}{1 - ab - ac + bc}.$$

Autre solution. Posons

$$x + y + z = 2s,$$
$$-x + y + z = 2s_1, \quad x - y + z = 2s_2, \quad x + y - z = 2s_3;$$

la première équation prendra la forme

$$\frac{\sin x}{\sin (y + z)} = \frac{a}{1}, \quad \text{ou} \quad \frac{\operatorname{tg} s}{\operatorname{tg} s_1} = \frac{1 + a}{1 - a}.$$

On voit que le système proposé devient

$$\operatorname{tg} s_1 = \alpha \operatorname{tg} s, \quad \operatorname{tg} s_2 = \beta \operatorname{tg} s, \quad \operatorname{tg} s_3 = \gamma \operatorname{tg} s,$$

α, β, γ désignant des nombres connus. On a aussi

$$s = s_1 + s_2 + s_3;$$

d'où

$$\operatorname{tg} s = \frac{\operatorname{tg} s_1 + \operatorname{tg} s_2 + \operatorname{tg} s_3 - \operatorname{tg} s_1 \operatorname{tg} s_2 \operatorname{tg} s_3}{1 - \operatorname{tg} s_1 \operatorname{tg} s_2 - \operatorname{tg} s_2 \operatorname{tg} s_3 - \operatorname{tg} s_3 \operatorname{tg} s_1}.$$

Par conséquent, en supprimant la solution $\operatorname{tg} s = 0$, on a :

$$1 = \frac{\alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta\gamma \cdot \operatorname{tg}^2 s}{1 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \operatorname{tg}^2 s},$$

$$\operatorname{tg}^2 s = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \frac{1 - \alpha - \beta - \gamma}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - 1};$$

on peut donc calculer $\operatorname{tg} s_1$, $\operatorname{tg} s_2$, $\operatorname{tg} s_3$.

Connaissant s_1, s_2, s_3, on a : $x = s_2 + s_3$, etc. (J. N.)

*Question 1136.

(Voir *Mathesis*, (2), VII, p. 214).

Les circonférences décrites sur les diagonales AC, BD ***d'un quadrilatère*** ABCD ***se coupent en deux points*** ω, ω'. ***Démontrer que les projections de l'un de ces points sur deux côtés opposés et les diagonales sont situés sur une même circonférence.*** (A. C.)

Solution par MM. Emmerich *et* Fairon (Seraing). Soient M, N, P, Q les pieds des perpendiculaires abaissées de ω sur AB, CD, AC, BD; on a

$$\begin{aligned}
\text{angle MPN} &= \text{MP}\omega + \text{NP}\omega \\
&= \pi - \text{BA}\omega + \text{DC}\omega \\
&= \text{A}\omega\text{B} + \text{AB}\omega + \text{DC}\omega \\
&= \tfrac{1}{2}\pi - \text{B}\omega\text{C} + \text{AB}\omega + \text{DC}\omega; \\
\text{angle NQM} &= \text{NQ}\omega + \text{MQ}\omega \\
&= \pi - \text{CD}\omega + \text{AB}\omega \\
&= \text{C}\omega\text{D} + \text{DC}\omega + \text{AB}\omega \\
&= \tfrac{1}{2}\pi - \text{B}\omega\text{C} + \text{DC}\omega + \text{AB}\omega.
\end{aligned}$$

Donc angle MPN = MQN, *c. q. f. d.*

M. Fairon observe que la proposition est encore vraie lorsque les projetantes font un angle donné α avec les droites sur lesquelles on projette.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1161. Deux triangles ABC, A'B'C' sont inscrits à une même circonférence. 1° Les droites de Simson de ces triangles par rapport à un point quelconque de la circonférence se coupent sous un angle constant; 2° l'intersection de ces droites décrit une conique; 3° chercher les cas où cette conique dégénère. (Droz Farny.)

1162. Un bâton formé de deux branches rectilignes AC, CB, comprenant un angle donné ACB, est plongé dans l'eau à partir du point C. L'œil d'un observateur étant placé au point A, on demande le lieu des positions apparentes de l'extrémité B lorsque le bâton, affleurant dans l'eau en C, tournera autour de AC comme axe.

On se donnera les longueurs AC, CB, l'inclinaison i de AC, et l'indice de réfraction n du milieu réfringent.

Cas particuliers et vérifications. (H. Brocard.)

*1163. On considère deux cercles tangents en O et dont les extrémités des diamètres passant par O sont A et B. Une sécante mobile passant par O rencontre le cercle OA en A′ et le cercle OB en B′. Le lieu du point de rencontre des droites AB′ et BA′ est un cercle.

(E. N. Barisien).

*1164. On mène par les sommets A, B, C d'un triangle équilatéral trois droites passant par un point M et faisant les angles α, β, γ avec les côtés opposés. Démontrer les relations

$$\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)=0.$$

(Stanham).

Quelle est la relation analogue dans un triangle rectiligne ou sphérique quelconque?

QUESTIONS D'EXAMEN.

924. Construire le triangle ABC, connaissant : 1° les centres I, I′ du cercle inscrit et du cercle ex inscrit qui touche intérieurement le côté BC; 2° le rapport $m:n$ des rayons de ces cercles; 3° la hauteur h_a abaissée de A sur BC.

Le sommet A et le point de rencontre D de BC avec II′ divisent II′ additivement et soustractivement dans le rapport $m:n$. On obtient BC en menant par D une tangente au cercle décrit de A comme centre avec le rayon h_a, etc.

925. Résoudre les équations

$$(24m^2+8m+1)\,x+(15m^2+8m+1)\,y+3m^2=0,$$
$$(8m+2)\,x+(5m+1)\,y-m=0,$$

dans lesquelles m désigne un nombre donné.

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les équations forment un système impossible ou indéterminé.

Étudier les variations de y et du produit xy lorsque m croît de $-\infty$ à $+\infty$.

(*Agrégation de l'enseignement secondaire des jeunes filles. — 1897*).

926. Les égalités

$$x^3+y^3+z^3=x^2+y^2+z^2=x+y+z=1$$

entraînent $xyz=0$. (*Journal de Vuibert.*)

Des relations

$$x+y+z=1,\quad x^2+y^2+z^2=1,$$

on déduit

$$xy+yz+zx=0.$$

On a l'identité

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \Sigma x\,(\Sigma x^2 - \Sigma xy);$$

par suite, $xyz = 0$.

327. Vérifier que dans tout triangle ABC :

$$\sin A + \sin B + \sin C$$
$$= 2\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right)\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} - 1\right).$$

328. Pour toutes les valeurs de A, B, C, D :

$$\Sigma \sin A = 2\Sigma \cos\frac{A}{2}\,\Sigma \sin\frac{A}{2} - 4\sin\frac{A+B+C+D}{4} \times$$
$$\left\{\cos\frac{A+B-C-D}{4} + \cos\frac{A+C-B-D}{4} + \cos\frac{A+D-B-C}{4}.\right\}$$

329. Sur la demi-circonférence ABC on prend deux arcs égaux BD, BE et l'on mène les droites AB, AD,... ; démontrer que

$$\left(\frac{AD+AE}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AD-AE}{CB}\right)^2 = 4.$$

(Mitchesson.)

330. Soient AB, CD deux cordes rectangulaires passant par le point de rebroussement O d'un limaçon de Pascal. On a

$$OA.\,OB + OC.\,OD = \text{const.}$$

(E. N. Barisien.)

En effet, si OE et OF sont les cordes correspondantes du cercle directeur, l'égalité revient à

$$(OE + b)(OE - b) + (OF + b)(OF - b) = \text{const. etc.}$$

331. En un point M d'une parabole on mène la normale qui rencontre l'axe en N. On prolonge MN de NP = MN. Le lieu du point P est une parabole. (E. N. Barisien.)

Si x, y sont les coordonnées de M, celles de P sont $x + 2p$, $-y$; le lieu de P est donc la parabole primitive glissant parallèlement à son axe de la quantité $2p$. — P est le *point de Frégier* relatif à M ; car si M′ est le symétrique de M par rapport à l'axe et que Q est le point à l'infini sur le diamètre passant par M, P est sur l'hypoténuse du triangle rectangle inscrit M′MQ.

*RÉSOLUTION HYDROSTATIQUE DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ,

par M. DEMANET, ingénieur.

1. Le volume d'un cône étant donné par la formule $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, on peut construire un récipient conique A dans lequel

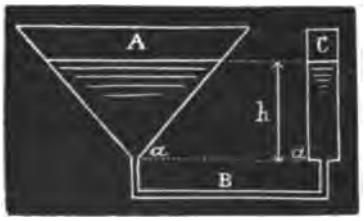
$$r = h\sqrt{\frac{3}{\pi}}.$$

Un volume de liquide remplissant une hauteur h de ce récipient A sera donc égal à

$$\left(h\sqrt{\frac{3}{\pi}}\right)^2 \times \frac{\pi h}{3} = h^3.$$

Supposons que ce récipient A soit relié par un tube B à un autre récipient cylindrique C ayant pour base 1 centimètre carré.

Ces deux vases communiquants vont nous permettre de trouver très facilement la racine réelle de l'équation $z^3 + pz = q$, p et q étant positifs.



En effet, si nous divisons toutes les racines de cette équation par $\sqrt{p}$, et posant $z = x\sqrt{p}$, elle prend la forme

$$x^3 + x = k,$$

k pouvant être fractionnaire ou irrationnel, ce qui est sans importance, vu qu'on pourra le calculer avec telle approximation que l'on veut.

Si nous mesurons dans une burette graduée k centimètres cubes d'un liquide et si nous versons ces k centimètres cubes dans un des deux vases communiquants (après avoir au préalable rempli de liquide le tube B jusqu'au niveau aa de façon à annuler l'influence de ce tube), le liquide s'élèvera dans les deux vases à une hauteur commune h centimètres au-dessus de la ligne aa et h sera la solution de l'équation $x^3 + x = k$; car la somme des volumes compris dans les 2 vases A et C est égale à k cm^3 et ces volumes étant respectivement h^3 cm^3 et h cm^3 nous pourrons écrire $h^3 + h = k$.

Nous aurions aussi pu obtenir directement la solution de $z^3 + pz = q$, si p est entier; mais il aurait alors fallu p vases C en communication avec

le vase A et dans ces $p+1$ vases communiquants, on aurait versé q centimètres cubes. La hauteur du liquide dans les $p+1$ vases exprimée en centimètres, aurait donné la solution de l'équation

$$z^3+pz=q.$$

2. Si l'équation était de la forme

$$z^3-pz=q,$$

l'appareil serait un peu différent.

Soit encore un récipient conique D identique au récipient A du problème précédent, c'est-à-dire que le volume remplissant une hauteur h centimètres cubes est de h^3 centimètres cubes.

On introduit dans ce récipient conique une pièce solide composée d'une partie supérieure cylindrique d'un centimètre carré de section et d'une base conique d'un centimètre de hauteur s'emboîtant exactement sur le fond du cône D. Le volume de cette base conique sera d'un centimètre cube. Le volume de h centimètres de hauteur de la pièce solide E sera donc de h centimètres cubes.

L'équation donnée étant mise sous la forme

$$x^3-x=k,$$

il suffira pour en obtenir une racine, de verser k centimètres cubes de liquide dans le récipient D contenant déjà la pièce solide. La hauteur h centimètres que prendra le liquide dans le vase D donnera la solution de

$$x^3-x=k$$

car le volume total h^3 diminué du volume du solide h est k centimètres cubes :

$$h^3-h=k.$$

3. D'une façon générale, on peut toujours construire un récipient R_n de révolution autour d'un axe vertical dont les courbes de section par l'axe soient telles que pour une hauteur de liquide h le volume soit h^n. Un tel récipient servira à matérialiser un terme x^n d'une équation.

Pour matérialiser un terme mx^n, il suffira de m vases R_n. De cette façon, une racine réelle de toute équation de la forme

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}\ldots=K.$$

A, B, ..., K étant entiers positifs, sera donnée par la hauteur commune que le liquide atteindra en versant K centimètres de liquide dans les

vases communiquants qui seraient : 1 récipient R_m, A récipients R_{m-1}, B récipients R_{m-2}.., etc.

SUR LES RELATIONS DE PTOLÉMÉE ET DE FEUERBACH(*);

par M. A. Krahé, professeur à Madrid.

Nous nous proposons d'établir, d'une manière simple, les relations de Ptolémée et de Feuerbach, sous la forme présentée par Cayley.

Relation de Ptolémée.

1. *Lemme I.* Considérons quatre points 1, 2, 3, 4 sur une même circonférence. Soit a le point où la droite 13 rencontre la droite 24. On aura pour un point x quelconque de l'espace (relation de Stewart)(**).

$$(x1).a3 + (x3).1a + (xa).(-13) = 1a.a3.13,$$
$$(x2).a4 + (x4).2a + (xa).(-24) = 2a.a4.24,$$

(ik) ou (ki) représentant le carré de la distance de deux points i, k.

Pour éliminer (xa), comme on a $1a.a3 = 2a.a4$, il suffit de retrancher de la première relation, multipliée par 24, la seconde multipliée par 13. Il vient :

$$\alpha(x1) + \beta(x2) + \gamma(x3) + \delta(x4) = 0, \qquad (1)$$

α, β, γ, δ désignant des constantes proportionnelles, comme il est facile de le voir, aux aires des triangles 234, 341, 412, 123 prises avec des signes alternés.

2. *Relation entre les distances de quatre points sur une même circonférence.* Faisons coïncider successivement le point x avec 1, 2, 3, 4. La relation (1) donnera

$$\alpha(11) + \beta(12) + \gamma(13) + \delta(14) = 0$$
$$\alpha(21) + \beta(22) + \gamma(23) + \delta(24) = 0$$
$$\alpha(31) + \beta(32) + \gamma(33) + \delta(34) = 0$$
$$\alpha(41) + \beta(42) + \gamma(43) + \delta(44) = 0.$$

(*) La lecture de la communication faite par M. P. Mansion à la *Société scientifique de Bruxelles*, le 3 avril 1895, m'a suggéré cet article. Voir *Mathesis*, décembre 1897. Supplément.

(**) Chasles, dans sa *Géométrie supérieure*, p 231, écrit cette relation ainsi

$$\frac{\overline{am}^2}{ab.ac} + \frac{\overline{bm}^2}{ba.bc} + \frac{\overline{cm}^2}{ca.cb} = 1, \text{ ou } \overline{am}^2.bc + \overline{bm}^2.ca + \overline{cm}^2.ab + ab.bc\ ca = 0.$$

On déduit de là, à cause de $(ii) = 0$,

$$\begin{vmatrix} 0 & (12) & (13) & (14) \\ (21) & 0 & (23) & (24) \\ (31) & (32) & 0 & (34) \\ (41) & (42) & (43) & 0 \end{vmatrix} = 0(*)$$

ce qui est la relation cherchée.

Relation de Feuerbach.

3. *Lemme* II. Considérons cinq points 1, 2, 3, 4, 5 sur une même sphère. Il est toujours possible, d'en choisir trois, par exemple 1, 2, 3, qui déterminent un cercle ayant avec le cercle 345 un point commun a autre que 3.

On aura (*lemme* I), x étant un point quelconque de l'espace,

$$\alpha(x1) + \beta(x2) + \gamma(x3) + \delta(xa) = 0,$$
$$\alpha'(x3) + \beta'(x4) + \gamma'(x5) + \delta'(xa) = 0,$$

d'où, en éliminant (xa),

$$A(x1) + B(x2) + C(x3) + D(x4) + E(x5) = 0; \qquad (2)$$

A, B, C, D, E étant des constantes.

4. ***Relation entre les distances de cinq points situés sur une même sphère.*** Faisons coïncider successivement le point x avec 1, 2, 3, 4, 5. L'élimination de A, B, C, D, E donnera

$$\begin{vmatrix} 0 & (12) & (13) & (14) & (15) \\ (21) & 0 & (23) & (24) & (25) \\ (31) & (32) & 0 & (34) & (35) \\ (41) & (42) & (43) & 0 & (45) \\ (51) & (52) & (53) & (54) & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est la relation cherchée.

(*) Cette démonstration est due à M. Antomari (*Nouvelles Annales*, 1882, p. 462). Cayley emploie la multiplication de deux déterminants. (J. N.).

QUELQUES PROPRIÉTÉS TRIGONOMÉTRIQUES DES QUADRILATÈRES GAUCHES;

par M. J. WASTEELS, professeur à l'Athénée royal de Gand.

I. Considérons trois droites de l'espace auxquelles nous attribuons des directions positives; nous appellerons *angle trièdre de ces droites* le trièdre obtenu en menant par un point quelconque de l'espace des demi-droites parallèles à ces directions.

II. Soit un quadrilatère gauche(*) dont les côtés AB, BC, CD, DA seront désignés respectivement par a, b, c, d; la direction de ces côtés sera celle dans laquelle il faut les parcourir pour se transporter de A en B, de B en C, de C en D et de D en A.

Construisons l'angle trièdre des trois droites a, b, c et nommons α l'angle des parallèles à b et c, β celui des parallèles à c et a, γ celui des parallèles à a et b.

Nous aurons

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\gamma + 2ac\cos\beta + 2bc\cos\alpha.$$

III. Laissant b, α, β, γ constants, déterminons a et c de manière que la valeur de d soit minima; nous obtenons

$$a = \frac{b(\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma)}{\sin^2\beta}, \tag{1}$$

$$c = \frac{b(\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha)}{\sin^2\beta}. \tag{2}$$

Si δ est le minimum de d, nous aurons

$$\delta = \frac{2b\sqrt{\sin p\sin(p-\alpha)\sin(p-\beta)\sin(p-\gamma)}}{\sin\beta}. \tag{3}$$

δ désigne la longueur de la perpendiculaire commune aux droites AB et CD ou leur plus courte distance, et les valeurs de a et c déterminent les pieds de cette perpendiculaire commune par rapport aux points B et C: suivant que a est positif ou négatif, cette perpendiculaire rencontre AB du même côté du point B que A ou du côté opposé. On peut faire une observation analogue pour c.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

IV. On appelle *sinus de l'angle trièdre* ayant pour faces α, β, γ, l'expression

$$\sqrt{\sin p \sin(p-\alpha) \sin(p-\beta) \sin(p-\gamma)}.$$

Cette expression ne change pas de valeur, si certaines arêtes du trièdre sont remplacées par leurs prolongements.

Nous désignerons le sinus de l'angle trièdre des droites a, b, c par $\sin(a, b, c)$.

La formule (3) deviendra alors :

$$\delta = \frac{2b \cdot \sin(a, b, c)}{\sin \beta}. \tag{4}$$

Cette formule donne la plus courte distance des deux droites a et c, en fonction de l'*angle de ces droites, des angles qu'une troisième droite qui les rencontre forme avec elles et de la longueur de la portion de cette 3e droite comprise entre les deux premières.*

V. Dans le quadrilatère gauche considéré plus haut, nous pouvons, pour trouver la plus courte distance des côtés a et c, employer la formule (4) ou bien celle que nous obtenons en y remplaçant b par d ; alors, nous trouvons :

$$\delta = \frac{2d \cdot \sin(a, d, c)}{\sin \beta}.$$

Il en résulte

$$\frac{b}{d} = \frac{\sin(a, d, c)}{\sin(a, b, c)}. \tag{5}$$

VI. Désignons les diagonales AC et BD du quadrilatère gauche respectivement par e et par f. En considérant le quadrilatère gauche ACBD, formé par les deux diagonales et par les côtés AD et BC, nous arrivons alors aux formules suivantes :

$$\frac{b}{d} = \frac{\sin(e, d, f)}{\sin(e, b, f)}, \tag{6}$$

$$\frac{e}{f} = \frac{\sin(b, f, d)}{\sin(b, e, d)}. \tag{7}$$

Dans le quadrilatère gauche ACDB, nous aurons de même :

$$\frac{e}{f} = \frac{\sin(a, f, c)}{\sin(a, e, c)}. \tag{8}$$

Des formules (5) et (6), nous déduisons :

$$\frac{\sin(a, d, c)}{\sin(a, b, c)} = \frac{\sin(e, d, f)}{\sin(e, b, f)}$$

et de (7) et (8) :

$$\frac{\sin(b, f, d)}{\sin(b, e, d)} = \frac{\sin(a, f, c)}{\sin(a, e, c)}.$$

Nous trouverions de la même manière :

$$\frac{\sin(b, a, d)}{\sin(b, c, d)} = \frac{\sin(e, a, f)}{\sin(e, c, f)}.$$

VII. Reprenons le quadrilatère gauche défini au n° II et supposons droits les angles A et D; soient toujours α l'angle de b et c, β celui de c et a, γ celui de a et b; AD étant alors la perpendiculaire commune aux côtés a et c, ceux-ci seront donnés par les formules (1) et (2). Ces formules pourraient s'obtenir directement en projetant le contour du quadrilatère gauche successivement sur les côtés a et c, égalant les projections obtenues à zéro et résolvant le système ainsi obtenu par rapport à a et c.

Des valeurs de a et de c, nous tirons la relation suivante :

$$\frac{a^2 - c^2}{b^2} = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\gamma}{\sin^2\beta}.$$

NOTES MATHÉMATIQUES.

×5. *Sur l'inverseur de Hart*, d'après M. MANNHEIM (*Messenger of Mathematics*, nov. 1896, p. 151). Soit ACBD un quadrilatère tel que AD = CB, AB = CD. Soit PQRS une parallèle à AC coupant AD, DC, AB, CB respectivement en P, Q, R, S. La circonférence passant par A, C, Q passera par R; soit I son point d'intersection avec AD. On aura DI.DA = DQ.DC; le point I sera fixe, si l'on déforme le quadrilatère, pourvu que P, Q, R, S soient des points fixes sur les lignes AD, DC, AB, CB. On a donc PQ.PR = PI × PA = *constante*. C'est la propriété fondamentale de l'inverseur de Hart.

×6. *Rectification approchée de la circonférence.* — I. Considérons une circonférence de rayon 1. La somme des côtés du triangle équilatéral et du carré inscrits a pour expression

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=3{,}1462;$$

elle est donc égale à la demi-circonférence, avec une erreur par excès moindre qu'un demi-centième.

II. Prenons sur la demi-circonférence terminée au diamètre AB une corde AC égale au plus grand segment de AB divisé en moyenne et extrême raison; la corde BC sera sensiblement égale au quart de la circonférence. En effet,

$$BC=\sqrt{4-(\sqrt{5}-1)^2}=\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}=1{,}5723.$$

(E. Sanchis Barrachina.)

III. Élevons par le centre O une perpendiculaire OH sur le diamètre AB, égale à la corde du quadrant; prenons sur la demi-circonférence située du même côté que OH, une corde BD égale au rayon, puis à la suite (dans le même sens) une corde DF égale à la distance DH; la corde BF est sensiblement égale au quart de la circonférence. Cette construction a été indiquée par Mascheroni. Pour la démontrer, observons que le quadrilatère ABDF donne, en posant $BF=x$, $DF=a$:

$$x.AD=2a+\sqrt{4-x^2}.$$

Or $AD=\sqrt{3}$, $a^2=\overline{DH}^2=\frac{1}{4}+(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3})^2=3-\sqrt{6}$; par conséquent,

$$x\sqrt{3}-2\sqrt{3-\sqrt{6}}=\sqrt{4-x^2},$$

$$x=\frac{\sqrt{9-3\sqrt{6}}+\sqrt{\sqrt{6}+1}}{2}=1{,}571.$$

7. *Propriétés des coniques*, par M. Cazamian. Etant donnés une conique S et trois points A, B, C dans son plan, les polaires de ces trois points par rapport à la conique déterminent un triangle A'B'C' (triangle réciproque de ABC). On sait que ces deux triangles sont homologiques. Soit D le centre d'homologie, c'est-à-dire le point de concours des droites joignant les sommets correspondants AA', BB', CC'.

1° Les quatre points A,B,C,D, forment un groupe tel que l'un quel-

conque d'entre eux est le centre d'homologie du triangle formé par les trois autres et de son réciproque. Les points A', B', C', D, forment un semblable groupe.

2° Les diagonales et les côtés opposés du quadrilatère ABCD sont des droites conjuguées par rapport à la conique.

3° Appelant groupe homologique un groupe de points tels que A, B. C, D, on trouve que, par ces quatre points, on peut faire passer une infinité de coniques harmoniquement circonscrites à la conique S. Inversement toutes les coniques passant par trois points A, B, C et harmoniquement circonscrites à une conique S passent par un quatrième point fixe qui est le centre d'homologie du triangle ABC et de son réciproque par rapport à S.

4° Une conique Σ étant harmoniquement circonscrite à une conique S, le centre d'homologie d'un triangle quelconque inscrit dans Σ et de son réciproque par rapport à S est situé sur Σ.

5° Énoncer les théorèmes corrélatifs des précédents et examiner les cas particuliers où la conique S, est constituée par les deux points cycliques du plan et par les droites isotropes issues d'un point.

BIBLIOGRAPHIE.

La Mathématique. *Philosophie, Enseignement*, par C.-A. Laisant, Répétiteur à l'École Polytechnique, Docteur ès-Sciences. Paris, Carré et Naud, 1898 (in-8° carré de 296 pages, avec 5 figures, cartonné à l'anglaise). Prix : 5 fr.

I. Nous extrayons d'une notice publiée par les éditeurs, en les modifiant çà et là, les lignes suivantes qui donneront une idée générale assez exacte du livre dont nous venons de transcrire le titre.

« Cet ouvrage, d'après ce que l'auteur annonce dès le début, n'est destiné, dans son esprit, ni aux savants, ni aux personnes dépourvues de toute instruction mathématique. Il s'adresse à ceux qui ont étudié ou qui étudient, qui enseignent ou appliquent la science mathématique; mais il n'est pas douteux, malgré les déclarations de l'auteur, que beaucoup de personnes même non initiées à la haute culture mathématique, liront avec profit une œuvre qui appprend beaucoup et qui oblige à penser.

Le point de départ de M. Laisant c'est que toutes les sciences sont expérimentales, et que la Mathématique ne fait pas exception. Ceci admis, toutes les notions générales sur les diverses branches de la Science mathématique se présentent successivement sous les yeux du lecteur avec une méthode rigoureusement logique.

L'ouvrage se divise en trois parties. Deux sont consacrées à l'exposé philosophique : *La Mathématique pure, la Mathématique appliquée.* La troisième partie concerne l'*Enseignement*.

On se convainc, en lisant la première partie, que la *Mathématique pure* n'opère que sur des abstractions fournies par le monde réel, et résultant d'une opération intellectuelle antérieure à la constitution de la science.

La *Mathématique appliquée*, ayant pour objet le retour de l'abstrait au concret, ne donne en conséquence que des solutions approchées, lesquelles n'en sont pas moins précieuses pour cela; c'est une idée qui réapparaît à chaque instant et sur laquelle il est utile d'insister, car c'est faute de la comprendre qu'on a répandu tant de sophismes et de paradoxes sur le rôle de la Science mathématique.

Dans la troisième partie relative à l'*Enseignement*, il est surtout question de l'enseignement en France. L'auteur s'y exprime avec un profond accent de sincérité, approuve ce qu'il juge bon, sans aucun parti pris, mais ne ménageant pas les critiques lorsqu'elles lui paraissent justifiées Cette troisième partie est accessible à ceux-là mêmes qui n'auraient aucune préparation mathématique antérieure, et mérite d'être étudiée par quiconque s'intéresse à cette grande question de l'Enseignement.

Tout l'ouvrage est écrit, nous l'avons dit, avec une grande clarté et aussi avec le souci d'éviter autant que possible les louanges inutiles et tout étalage d'érudition. C'est plutôt une causerie facile qu'une étude ardue sur des notions philosophiques obscures et compliquées Mais dans cette causerie, qui fait un appel constant au bon sens et à la raison, on trouvera matière à bien des méditations utiles. »

II. Il faudrait beaucoup de temps et beaucoup de place pour faire connaître à nos lecteurs sur quels points nous sommes d'accord ou non avec M. Laisant, car il effleure rapidement dans son livre une foule de questions parfois très ardues. Contentons nous de quelques remarques historiques.

Pour nous, l'autorité de Kant et de Darwin (p. 27), soit en mathématiques, soit en philosophie des mathématiques, est pratiquement nulle, parce que pour parler d'une science, il faut en connaitre plus que les premiers éléments. Nous en dirions volontiers autant de Comte (p. 17 et *passim*), qui fermant volontairement les yeux aux prodigieux progrès de l'analyse et de la géométrie pendant la première moitié du 19e siècle, ignore Gauss, Cauchy, Dirichlet, Abel, Jacobi, Poncelet, Möbius, Steiner, et reste toute sa vie un bon élève de l'École polytechnique, mais rien de plus.

Selon nous, Leibniz (comme Newton) avait pleine conscience de la rigueur de son nouveau calcul et de ses notations (p. 66). Archimède n'a pas fait du calcul intégral (calcul intégral = calcul inverse du calcul différentiel), mais du calcul de limite de somme d'infiniment petits, ce qui est tout différent pour les géomètres antérieurs à Newton (p. 63). Il en est de même de Fermat, et c'est pour cela que, à notre point de vue, on ne peut dire qu'il soit l'inventeur du calcul infinitésimal, si près qu'il s'en soit approché (p. 62).

Newton a trouvé, cent ans avant Lagrange et sous une forme meilleure, la

formule d'interpolation attribuée à Lagrange (p. 86). Il nous semble que le rôle de Chasles en géométrie supérieure est surfait. Cette partie de la science est surtout la création de Poncelet, précurseur de Steiner et de Möbius, devanciers eux-mêmes de Chasles (p. 97. Nous croyons que c'est Lamarle, un français qui a été pendant trente ans professeur à l'Université de Gand, qui a créé la géométrie cinématique (p. 101). — Sur les imaginaires en géométrie (p. 124), il nous semble que Von Standt aurait dû être cité en première ligne. — Sur la culture de la science pure en Amérique (p. 143; ligne 3 de cette page, lire *Baltimore* au lieu de *Boston*), nous pensons que le mot de Houël est encore assez vrai : la science mathématique aux États-Unis est en grande partie une importation allemande.

III. Voici un sommaire plus détaillé des sujets abordés, dans la *Mathématique* de M. Laisant. *Introduction* (p 1-12) Aperçu général des grandes subdivisions du livre. *La mathématique pure Philosophie* 1. La mathématique et ses subdivisions (pp. 13-27). 2. Arithmétique et arithmologie (pp. 28-45). 3. Algèbre (pp. 46-68). 4. Calcul infinitésimal (pp. 62-76). 5. Théorie des fonctions (pp. 77-87). 6. Géométrie (pp. 88-105). 7. Géométrie analytique (pp. 106-122). 8. Mécanique (pp. 123-138). *La mathématique appliquée.* 1. Généralités (pp. 139-147). 2. Application du calcul (pp. 148-157). 3 Application de la géométrie (pp. 158-171). 4. Application de la mécanique (pp. 172-183). *Enseignement.* 1. Vue générale (pp. 185-199). 2-6. Enseignement de l'arithmétique (pp. 200-208), de l'algèbre et du haut calcul (pp. 209-219), de la géométrie (pp. 220-234), de la géométrie analytique (pp. 235-247), de la mécanique (pp. 248-261). 7. La hiérarchie des enseignements (pp. 261-283) Index bibliographique; table des noms et des matières (pp. 284-292).

Enfin, pour donner une idée des subdivisions d'un chapitre, voici les titres des sujets abordés dans le chapitre 6 de la première partie (Géométrie) : Origine des notions géométriques. — Les axiomes et les diverses géométries. — Divisions de la géométrie. — La géométrie des anciens. — La géométrie moderne. — Les transformations géométriques. — La géométrie cinematique. — La géométrie du triangle. — La géométrographie. — Les géométries à *n* dimensions. — La géométrie de situation. (P. M.)

Récréations et problèmes mathématiques des temps anciens et modernes par W W. Rouse Ball, Fellow and Tutor of Trinity College, Cambridge. Troisième édition, revue et augmentée par l'auteur, traduite par J. Fitz-Patrick. Paris, A. Hermann, 1898 (In-8° de IV-352 pages). Prix : 9 fr.

Traduction revue et augmentée de plusieurs récréations algébriques d'un intéressant ouvrage dont la première édition anglaise a été signalée dans *Mathesis* (1893, pp. 65-66). Rappelons les titres des douze chapitres. 1. Questions d'arithmétique. 2. Questions géométriques. 3. Questions de mécanique. 4. Questions diverses (géométrie de situation, combinaisons, jeux de cartes). 5. Les carrés magiques. 6-7. Les problèmes sur les tracés continus. 8. Duplication du cube; trisection de l'angle; quadrature du cercle. 9. Astrologie. 10. Hyperespace. 11. Du temps et de sa mesure. 12. Matière et éther.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Questions 1105 et 1117(*).

(Voir *Mathesis*, (2) VII, pp. 32 et 102).

On donne un demi-cercle AB. C *étant un point quelconque du diamètre* AB, *on décrit deux autres cercles* I *et* I′ *sur* AC *et* BC *comme diamètres, puis un cercle* I″ *tangent aux trois précédents. Appelons* I, I′, I″ *les centres des derniers cercles. Lorsque* C *se meut sur la droite* AB :

1° *Le point* I″ *décrit une ellipse;* 2° *le centre* I‴ *du cercle inscrit au triangle* II′I″ *décrit une parabole;* 3° *les côtés* II″, I′I″ *enveloppent un cercle;* 4° *les droites* II‴, I′I‴ *enveloppent une parabole;* 5° *le cercle* I‴ *enveloppe un cercle;* 6° *le cercle des neuf points du triangle* II′I″ *enveloppe un cercle.*

Solution par M. E. N. Barisien. Soient : R le rayon du cercle AB, ρ et ρ' les rayons des cercles AC et BC, ρ'' le rayon du cercle tangent aux trois précédents; O le milieu de AB, r la longueur OI″, θ l'angle I″OB, k la longueur OC.

Prenons des axes rectangulaires en O, OB étant l'axe des x positifs.

1° Déterminons tout d'abord le rayon ρ'' en fonction de ρ, ρ' et R.

Les triangles IOI″ et I′OI″ donnent les relations

$$\overline{II''}^2 = \overline{IO}^2 + \overline{I''O}^2 + 2.IO.I''O\cos\theta,$$
$$\overline{I'I''}^2 = \overline{I'O}^2 + \overline{I''O}^2 - 2.I'O.I''O\cos\theta,$$

ou

$$(1)\qquad (\rho+\rho'')^2 = \rho'^2 + (R-\rho'')^2 + 2\rho'(R-\rho'')\cos\theta,$$
$$(2)\qquad (\rho'+\rho'')^2 = \rho^2 + (R-\rho'')^2 - 2\rho(R-\rho'')\cos\theta.$$

Éliminant θ entre ces deux équations et tenant compte de la relation $\rho+\rho'=R$, on trouve

$$(3)\qquad \frac{1}{\rho''} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} - \frac{1}{R}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\rho''} + \frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'};$$

donc

$$(4)\qquad \rho'' = \frac{\rho\rho' R}{R^2 - \rho\rho'}.$$

(*) Nous réunissons ici les questions 1105 (Barisien) et 1117 (Déprez); la première comprend le n° 1 de l'énoncé actuel, et la seconde les n°s suivants.

(*Rédaction*).

Ajoutant (1) et (2), on trouve aussi

$$\cos\theta = \frac{R(R-3\rho'')}{(\rho-\rho')(R-\rho'')}. \tag{5}$$

Exprimons maintenant ρ, ρ', ρ'', r et θ en fonction de k. On a d'abord

$$\rho = \frac{R+k}{2}, \quad \rho' = \frac{R-k}{2}; \tag{6}$$

par suite, l'égalité (4) se transforme en

$$\rho'' = \frac{R(R^2-k^2)}{3R^2+k^2}. \tag{7}$$

Donc $r = R - \rho''$, c'est-à-dire

$$r = \frac{2R(R^2+k^2)}{3R^2+k^2}. \tag{8}$$

Portant les valeurs (6) et (7) dans (5), on trouve

$$\cos\theta = \frac{2Rk}{R^2+k^2}; \tag{9}$$

$$\sin\theta = \frac{R^2-k^2}{R^2+k^2}. \tag{10}$$

Éliminant k^2 entre (8) et (10), on trouve

$$r = \frac{2R}{2+\sin\theta}, \tag{11}$$

ce qui indique que *le lieu du centre* I'' *est une ellipse ayant un foyer en* O *et passant par* A *et* B. En passant aux coordonnées cartésiennes ou en cherchant la distance focale, on trouve que le second foyer est sur une perpendiculaire élevée en O sur AB du côté opposé au demi-cercle AB et égale à $\frac{2}{3}$ R.

2° *Lieu du centre* I'''. Soient a, b, c les côtés du triangle II'I'', tels que

$$a = \rho' + \rho'', \quad b = \rho + \rho'', \quad c = \rho + \rho'.$$

Alors

$$p = \rho + \rho' + \rho'', \quad p - a = \rho, \quad p - b = \rho', \quad p - c = \rho''.$$

Le cercle inscrit dans le triangle II'I'' est tangent en C au côté II'. L'abscisse de ce centre est donc $x = OC$ ou $x = k$. Quant à l'ordonnée y de I''', elle est égale au rayon du cercle inscrit. Sa valeur est donc

$$y = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-c)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{\rho\rho'\rho''}{R+\rho''}}$$

ou, en introduisant les valeurs (6) et (7),

$$y = \frac{R^2 - k^2}{4R}.$$

Remplaçant k par x, on trouve pour le lieu de I''' la parabole

$$x^2 + 4Ry - R^2 = 0. \tag{12}$$

qui passe par A et B.

3° *Enveloppe des côtés* II'', I'I''. Étudions le cercle exinscrit au triangle II'I'' situé dans l'angle I''.

De ce que $IO = CI'$, on conclut que le centre de ce cercle est sur la perpendiculaire élevée en O à AB. Son rayon r_0 est donné par la formule

$$r_0 = \frac{S}{p - c} = \frac{S}{\rho''}. \tag{13}$$

Or, on a

$$S = \sqrt{p(p-c)(p-c)(p-c)} = \sqrt{\rho\rho'\rho''(R + \rho'')} = \frac{R(R^2 - k^2)}{3R^2 + k^2}$$

ou $S = R\rho''$. En rapprochant cette égalité de la relation (15), on voit que $r_0 = R$.

Par conséquent, le cercle exinscrit dans l'angle I'' est un cercle fixe ayant pour équation

$$x^2 + y^2 + 2Ry = 0. \tag{14}$$

Il en résulte immédiatement que ce cercle est l'enveloppe des droites II'' et I'I''.

3° *Enveloppe des droites* II''', I'I'''. Cherchons l'équation de la droite I'I'''. Les coordonnées de I' en fonction de k sont

$$x = \frac{R + k}{2}, \quad y = 0;$$

celles de I''' sont

$$x = k, \quad y = \frac{R^2 - k^2}{4R}.$$

L'équation de I'I''' est donc

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ R + k & 0 & 2 \\ k & \dfrac{R^2 - k^2}{4R} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou en développant, et faisant disparaître le facteur $(R - k)$

$$(R + k)^2 - 2x(R + k) - 4Ry = 0.$$

$(R + k)$ est un paramètre qui entre au second degré. L'enveloppe de cette droite est donc la parabole

$$x^2 + 4Ry = 0. \tag{15}$$

5° *Enveloppe du cercle* I'''. L'équation de ce cercle est

$$(x - k)^2 + \left[y - \frac{(R^2 + k^2)}{4R}\right]^2 = \frac{(R^2 - k^2)^2}{16R^2};$$

ou, en développant et ordonnant par rapport à k,

$$k^2(y + 2R) - 4kRx + 2R(x^2 + y^2) - R^2y = 0.$$

En exprimant que l'équation en k a ses deux racines égales, on a

$$4Rx^2 - (y + 2R)[2(x^2 + y^2) - Ry] = 0,$$

ou

$$y[2(x^2 + y^2) + 3Ry - 2R^2] = 0.$$

L'enveloppe se compose donc de la droite II' et du cercle

$$x^2 + \left(y + \frac{3R}{4}\right)^2 = \left(\frac{5R}{4}\right)^2.$$

6° *Enveloppe du cercle des neuf points du triangle* II'I''. Elle me paraît difficile à obtenir par le calcul(*).

Remarques. Voici d'autres propriétés et lieux géométriques concernant cette intéressante question de M. Déprez.

1. Dans le triangle II'I'', la hauteur I''H est égale à deux fois le rayon ρ''.

2. Le lieu du point de rencontre du cercle I'' avec la hauteur I''H est une ellipse.

3. On a la relation

$$II' + I''H = II'' + I'I''.$$

4. Le lieu du centre des cercles exinscrits au triangle II'I'' dans chacun des angles I et I', se compose pour chacun d'une cubique.

Soient K le point de contact des cercles I et I''; K' le point de contact

(*) Voir, à ce sujet, la solution de M. Droz-Farny, donnée ci-après. L'enveloppe 6° n'est autre que le cercle trouvé au n° 8. (*Rédaction.*)

des cercles I' et I''; K'' le point de contact du cercle AB et du cercle I''.

5. La droite I''C passe par un point fixe.

6. La droite K''C passe par un point fixe.

7. La droite K''I''' passe par un point fixe.

8. Le lieu du point d'intersection de I''H et K''C est une ellipse.

9. Le lieu du point d'intersection des droites I''C et K''I''' est une ellipse.

10. Le lieu du centre de gravité du triangle II'I'' est une cubique.

11. Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle II'I'' est une quartique.

12. Le lieu des milieux des droites II''' et I'I''' se compose de deux paraboles.

13. La droite I''I''' passe par un point fixe.

14. Le lieu de chacun des points K et K' est une quartique.

15. Le lieu du centre de similitude externe des cercles I' et I'' est la tangente en A au cercle AB.

16. Le lieu du centre de similitude externe des cercles I et I'' est la tangente en B au cercle AB.

17. Le lieu des centres de similitude des cercles AB et I'' se compose du cercle AB et d'une parabole.

18. Le lieu des centres de similitude des cercles AB et I''' se compose de deux coniques.

19. Le lieu des centres de similitude des cercles I et I''' se compose d'une ligne droite et d'une quartique.

20. Le lieu des centres de similitude des cercles I' et I''' se compose d'une ligne droite et d'une quartique.

21. Le centre de similitude externe des cercles I'' et I''' est un point fixe.

22. Le lieu du centre de similitude interne des cercles I'' et I''' est une ellipse.

23. La droite KK' et la tangente en K'' au cercle AB se rencontrent sur le diamètre AB.

24. La droite KK' enveloppe une ellipse.

25. Chacune des droites CK et CK' passe par un point fixe.

26. Les polaires du point I''' par rapport à chacun des cercles I, I' et I'' enveloppent, chacune, une conique.

27. Les polaires du point I'' par rapport aux deux cercles I et I' enveloppent, chacune, une ellipse.

28. Soient P le milieu de II', Q le milieu de I'I'' et T le milieu de PH. La projection de la droite TQ sur AB est constante et égale à $\frac{1}{4}$ R.

29. Les droites K''A et K''B enveloppent une ellipse.

(E. N. Barisien.)

MM. Colart (Huy), Déprez, Droz-Farny, Delahaye (Roye), ont résolu la question 1105, en cherchant d'abord le rayon du cercle I''; ce rayon résulte du théorème de Stewart appliqué aux droites I''I, I''O, I''I'.

M. Colart a résolu la question 1117, à l'exception de la dernière partie.

M Droz a donné une solution simple et complète de la question 1117. Le lecteur remarquera l'élégance avec laquelle il démontre les propositions de M. Déprez. Les notations sont celles de M. Barisien.

Solution par M. Droz-Farny. Soient L, M, N les points de contact du cercle I'' avec les cercles O, I, I'. D'après un théorème connu, les tangentes en A, M, L se coupent en un point α; les tangentes en B, M, N concourent en un point β; enfin, les tangentes en C, M, N passent par le point I'''. Cela posé, les trapèzes $A\alpha I'''C$, $B\beta I'''C$, $A\alpha\beta B$ donnent

$$\alpha M \cdot I'''M = \rho^2, \quad \beta N \cdot I'''N = \rho'^2,$$
$$\alpha L \cdot \beta L = \alpha M \cdot \beta N = R^2.$$

Multipliant l'une par l'autre les deux premières relations et tenant compte de la troisième, on trouve

$$I'''C = \frac{\rho\rho'}{R}.$$

Si x, y sont les coordonnées de I''', on a

$$x = OC = \rho - \rho', \quad y = \frac{\rho\rho'}{R}, \quad \rho + \rho' = R;$$

d'où, en éliminant ρ et ρ' :

$$x^2 = R^2 - 4Ry.$$

Le lieu de I''' est donc une parabole.

L'enveloppe du cercle I''' résulte du théorème suivant qu'on démontre facilement :

Le lieu des centres des cercles inscrits dans un segment de cercle est

une parabole de même axe de symétrie que le segment et ayant pour foyer le centre du cercle; la directrice est une parallèle à la base du segment, menée à une distance égale au rayon du cercle.

Soit E l'extrémité du rayon du cercle O perpendiculaire à AB du côté opposé au demi-cercle AB. La relation $I'''C = \frac{\rho\rho'}{R}$ se traduit par la proportion

$$\frac{I'''C}{IO} = \frac{OC}{OE};$$

donc les triangles CI'''I, OEI sont semblables et les côtés homologues sont perpendiculaires. Par conséquent, la droite II''' enveloppe une parabole ayant pour foyer E, pour tangente au sommet, AB. La droite I'I''' a la même enveloppe.

Il résulte de ce qui précède, que EI et EI' sont deux bissectrices extérieures du triangle II''I'; donc E est le centre d'un cercle exinscrit à ce triangle. Ce cercle a pour rayon EO = R; donc il est fixe. On en conclut que ce cercle est l'enveloppe du cercle des neuf points du triangle II'I''; il est aussi l'enveloppe des droites variables II'', I'I''.

Remarquons aussi que la droite I''I''' passe par un point fixe E; que la perpendiculaire en C sur AB rencontre OL en un point qui décrit une parabole de foyer O; enfin que le diamètre du cercle I'' est égal à la distance de son centre à la droite AB.

×Question 1130(*).

(Voir *Mathesis*, (2), t. VII, p. 175).

Un angle de grandeur invariable pivote autour de son sommet A *qui est fixe. D'un point fixe* B, *situé dans le même plan, on abaisse sur les côtés de cet angle des perpendiculaires dont les pieds sont* C *et* D. *Ces perpendiculaires rencontrent les côtés de l'angle en deux autres points* E *et* F : 1° *Quel est le lieu géométrique des points* C *et* E? 2° *Démontrer que la longueur de la droite* CD *est invariable et en déduire le lieu géométrique*

(*) Le 6e § de la question, relatif à l'enveloppe de la droite EF, est inexact. La droite EF se meut parallèlement à elle-même. Si l'on projette le point fixe B sur les côtés de l'angle mobile A, les projetantes faisant des angles constants avec ces côtés, les droites EF et CD enveloppent des ellipses.

de son milieu I. 3° *Quels sont les lieux géométriques des points* E *et* F? 4° *Trouver les lieux des centres des cercles circonscrits aux triangles* AEF, BEF. 5° *Trouver le lieu du milieu de la droite* EF.

Solution par M. E. COLART. 1° Les points C et D décrivent la circonférence de diamètre AB. 2° La corde CD est constante comme sous-tendant un angle constant CAD dans la circonférence de diamètre AB; par suite, le milieu I de CD décrit une circonférence ayant son centre au milieu de AB.

3° Les points E et F décrivent les segments capables de 1 droit — A décrits sur AB.

4° B étant l'orthocentre du triangle AEF, on a $EF = AB \operatorname{tg} A$. Par suite, en désignant par R le rayon du cercle circonscrit à AEF,

$$R = \frac{EF}{2 \sin A} = \frac{AB}{2 \cos A}.$$

Le centre du cercle circonscrit à AEF décrit donc une circonférence de centre A. De même, le centre du cercle circonscrit à EBF décrit une circonférence de centre B.

5° Soit M le milieu de EF et O le milieu de AB. OM étant le diamètre du cercle des neuf points du triangle AEF, est égal à R ou $\frac{AB}{2 \cos A}$. Le point M décrit donc une circonférence de centre O.

Ont résolu la même question MM. BARISIEN, DEGUELDRE, DÉPREZ et V. MAES.

M. DÉPREZ signale d'autres propriétés de la figure :

1. Les droites qui joignent D et C au point de rencontre des droites AB et EF ont des directions fixes.

2. Le centre de gravité du triangle AEF et le centre du cercle des neuf points du même triangle décrivent des circonférences.

3. L'orthocentre, le centre de gravité, le centre du cercle des neuf points du triangle ADC décrivent des circonférences. Il en est de même des projections de C sur AD et de D sur AC.

4. Soit S le point de rencontre des droites AB et CD; les droites ES, FS enveloppent des coniques.

5. Le centre du cercle inscrit au triangle ACD et celui du cercle exinscrit situé dans l'angle CAD se meuvent sur un limaçon de Pascal.

La propriété 3° a été également remarquée par MM. COLART et BARISIEN. Les droites CD et EF se coupent sur une quartique (BARISIEN).

×Question 1141.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 238).

Dans un triangle ABC, *l'angle* A *est constant et les pieds* B′,C′ *des hauteurs* BB′, CC′ *sont fixes. Démontrer que* 1° *le côté* BC *est constant et pivote autour d'un point fixe*; 2° *le cercle des neuf points du triangle* ABC *est fixe*; 3° *le centre du cercle circonscrit et le centre de gravité décrivent des circonférences.* (V. Cristesco.)

Solution par MM. Colart, Libert (Ixelles), Maes (Gand), Soons, Jerabek, Degueldre et Barisien. La relation connue, $B'C' = BC.\cos A$, prouve que BC est constant.

D'ailleurs, si H est l'orthocentre de ABC, le milieu I de AH est le centre du cercle circonscrit à B′AC′ et est fixe. Par suite, le cercle des neuf points (passant par B′,C′,A′) est fixe, et le milieu M de BC, qui est diamétralement opposé à I dans ce cercle, est aussi fixe.

Il s'ensuit aussi que le centre O du cercle circonscrit à ABC décrit une circonférence symétrique de la circonférence B′AC′ par rapport au centre ω du cercle des neuf points de ABC.

Enfin, le centre de gravité G du triangle ABC, se trouvant aux $\frac{2}{3}$ de la sécante MA qui passe constamment par le point fixe M, décrit aussi une circonférence.

Remarques. I. Les sommets B et C décrivent une même circonférence de centre M et de rayon MB′.

II. Les propriétés qui précèdent permettent de construire un triangle dont on donne l'angle A, la hauteur AA′ et les pieds B, B′ des deux autres hauteurs.

Question 1153.

(Voir *Mathesis*, (2), VIII, p. 31).

Démontrer que pour $x = a$, *on a*

$$\lim \frac{\tan(\sin x) - \sin(\tan x) - \frac{1}{30}x^7}{x^9} = \frac{29}{756}.$$

(Cayley.)

Solution par M. J. Jonesco (Bucarest). Développons l'expression donnée en série d'après les puissances entières de x, et retenons de ce développement les termes de degré moindre que 9, car les autres s'évanouissent pour $x = 0$. On connait les développements en séries

$$\sin x = x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + dx^9 + \cdots$$
$$\operatorname{tang} x = x + \alpha x^3 + \beta x^5 + \gamma x^7 + \delta x^9 + \cdots$$

où les coefficients $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ ont les valeurs suivantes :

$$a = -\frac{1}{6}, \quad b = \frac{1}{120}, \quad c = -\frac{1}{5040}, \quad \alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{2}{15}, \quad \gamma = \frac{17}{315}.$$

Dans le développement de tang x, remplaçons x par sin x et puis sin x par son développement. On obtiendra ainsi le développement de tang (sin x) :

$$\operatorname{tang}(\sin x) = x + (a + \alpha)x^3 + (b + 3\alpha a + \beta)x^5 + (c + 3\alpha b + 3\alpha a^2 + 5\beta a + \gamma)x^7 + (d + \alpha a^3 + 3\alpha c + 6\alpha a b + 5\beta b + 10\beta a^2 + 7\gamma a + \delta)x^9 + \cdots$$

En remplaçant a, b, c, d respectivement par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et réciproquement, on obtiendra le développement de sin (tang x), et la différence de ces deux développements sera :

$$\operatorname{tang}(\sin x) - \sin(\operatorname{tang} x) = [2(\beta a - \alpha b) + 3\alpha a(a - \alpha)]x^7 + [\alpha a(a^2 - \alpha^2) + 4(a\gamma - \alpha c) + 6a\alpha(b - \beta) + 10(\beta a^2 - \alpha^2 b)]x^9 + \cdots$$

Calculons les valeurs numériques des coefficients de x^7 et x^9 :

$$2(\beta a - \alpha b) = -\frac{2.1.2}{6.15} - \frac{2.1.1}{3.120} = -\frac{1}{20},$$

$$3\alpha a(a - \alpha) = +\frac{3.1.1.1}{6.3.6} + \frac{3.1.1.1}{6.3.3} = \frac{1}{12}.$$

$$a\alpha(a^2 - \alpha^2) = -\frac{1.1}{3.6}\left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{1}{216},$$

$$4(a\gamma - \alpha c) = -\frac{4.1.17}{6\,315} + \frac{4.1}{3.5040} = -\frac{1}{28}.$$

$$6a\alpha(b - \beta) = -\frac{6.1\,1\,1}{6.3.120} + \frac{6.1.1.2}{6.3.15} = \frac{1}{24},$$

$$10(\beta a^2 - \alpha^2 b) = 10\left(\frac{2.1}{15.36} - \frac{1\,1}{9.120}\right) = \frac{1}{36}.$$

Donc les coefficients de x^7 et x^9 sont :

$$\frac{1}{12}-\frac{1}{20}=\frac{1}{30},$$

$$\frac{1}{216}+\frac{1}{24}+\frac{1}{36}-\frac{1}{28}=\frac{29}{756}.$$

Donc

$$\text{tang}(\sin x) - \sin(\text{tang}) = \frac{1}{30}x^7+\frac{29}{756}x^9+\cdots\cdots;$$

d'où l'on déduit

$$\lim \frac{\text{tang}(\sin x) - \sin(\text{tang}\, x) - \frac{1}{30}x^7}{x^9} = \frac{29}{756}.$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

832. Les tangentes menées du point M du plan d'une ellipse, à cette ellipse, rencontrent le grand axe en A et B, et le petit axe en C et D. Soit N le point de rencontre des normales élevées aux points de contact des tangentes avec l'ellipse.

On a la relation

$$\frac{AB}{CD} = \pm \text{tg NOA}.$$

(E. N. Barisien).

833. La distance du sommet d'une parabole à la tangente en un point M de la parabole, est le $\frac{1}{3}$ de la distance du sommet à la sécante commune de la parabole avec son cercle osculateur en M.

(E. N. Barisien).

834. Par le sommet O d'une parabole on mène deux cordes rectangulaires variables OA et OB. Le centre des symédianes du triangle AOB décrit une circonférence. (E. N. Barisien).

On voit aisément que la droite AB passe par le point fixe C situé sur l'axe de la parabole, et tel que $OC = 2p$, $2p$ étant le paramètre de la parabole. D'autre part, le centre des symédianes du triangle AOB est le milieu de la hauteur issue de O. Donc, le lieu de ce centre est le cercle de diamètre p et tangent à la parabole en O.

(E. N. B.)

835. La corde commune à une parabole et à son cercle osculateur en chacun des points de la parabole enveloppe une parabole.

(E. N. Barisien).

Cette corde, au point M (x_1, y_1) de la courbe, a pour équation

$$(y - y_1)y_1 + p(x - x_1) = 0, \qquad (1)$$

or, à cause de $y_1^2 = 2px_1$,

$$3y_1^2 - 2yy_1 - 2px = 0.$$

L'enveloppe de cette droite est la parabole

$$y^2 + 6px = 0.$$

REMARQUE. Soient δ_1 et δ_2 les distances du sommet O de la parabole à la tangente en M et à la droite (1); on a

$$\delta_1 = \frac{px_1}{\sqrt{y_1^2 + p^2}}, \quad \delta_2 = \frac{3px_1}{\sqrt{y_1^2 + p^2}},$$

donc $\delta_2 = 3\delta_1$, (E. BARISIEN).

838. On considère le triangle MFF′ ayant pour sommets les deux foyers F, F′ d'une ellipse donnée et le point M variable de cette ellipse. Il existe, outre le centre O des médianes du triangle MFF′, trois autres points O_1, O_2, O_3 tels que le produit de la distance de l'un de ces points à un côté par la longueur de ce côté soit le même pour les trois côtés. — Le lieu de chacun des points O_1, O_2, O_3 est une ellipse. (E. N. BARISIEN).

Si par chacun des sommets du triangle MFF′ on mène des droites parallèles aux côtés opposés, ces droites forment un triangle dont les sommets sont les points O_1, O_2, O_3.

On voit alors sans difficulté, soit géométriquement, soit par le calcul, que les points O_1, O_2, O_3 décrivent des ellipses, dont l'une est l'ellipse donnée.

837. Construire la courbe

$$\rho = \frac{a \sin 2\omega}{\sin 3\omega}.$$

(E. N. BARISIEN).

Cette équation donne, successivement,

$$\rho(3\sin\omega - 4\sin^3\omega) = 2a\sin\omega\cos\omega, \quad \rho(3 - 4\sin^2\omega) = 2a\cos\omega,$$
$$3x^2 - y^2 = 2ax.$$

Elle représente une hyperbole facile à construire.

838. Résoudre les équations

$$\frac{\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{(1 - \operatorname{tg}^2 x)^2} = m,$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = \sin x,$$

$$\frac{\sin(a + x)\sin(a - x)}{\cos(a + x)\cos(a - x)} = \frac{1 - 2\cos 2a}{1 + 2\cos 2a}.$$

La première se ramène à

$$\sin 2x = 2m\cos^2 2x;$$

la seconde à

$$\sin x + \sin x \cos x \cos 2x = 0, \quad \text{d'où} \quad x = n\pi;$$

la troisième à

$$\frac{\sin^2 a - \sin^2 x}{\cos^2 a - \sin^2 x} = \frac{\cos 60^\circ - \cos 2a}{\cos 60^\circ + \cos 2a},$$

ou

$$\frac{\cos 2x - \cos 2a}{\cos 2x + \cos 2a} = \frac{\cos 60^\circ - \cos 2a}{\cos 60^\circ + \cos 2a},$$

d'où

$$2x = 2n\pi \pm 60^\circ$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

1161 (*). Si l'on donne le foyer d'une parabole et une normale, le sommet décrit une cissoïde de Dioclès; si l'on donne le sommet et une normale, le foyer décrit une cissoïdale d'ellipse. (J. Neuberg).

***1162.** Soient AB un diamètre fixe d'un cercle de centre O, et M un point variable de la circonférence. Démontrer que le lieu des centres de similitude des cercles circonscrits aux triangles OAM et OBM se compose de deux droites. — Généraliser en remplaçant AB par une corde fixe du cercle donné. (E. N. Barisien).

1163. a, b, c, x, y désignant des quantités complexes, si l'on suppose

$$y = ax^2 + bx + c,$$

comment construit-on le point y qui correspond à un point donné x ?

1164. Dans tout hexagone gauche rectangle (dont les six angles sont droits), les plus courtes distances des trois couples de côtés opposés ont une normale commune. (J. Petersen.)

1165. On mène en un point M d'une parabole la tangente MT et la normale MQP qui rencontre l'axe en Q et la courbe en P. On projette P en R sur la directrice, et on mène en P la normale qui coupe en N l'axe. Démontrer 1° que MQ est égale à la distance de R à la parallèle menée par le foyer F à MT; 2° que QP est égale à la distance de N à MT (A. C.).

(*) La question 1161, page 78 étant identique à la question 1090, proposée dans *Mathesis*, 1898. (2), VI, p. 240, nous la remplaçons ici par une autre.

NORMALES AUX SURFACES ET AUX COURBES ALGÉBRIQUES,

par M. STUYVAERT.

1. Soient x', y', z', t' les coordonnées courantes homogènes (les axes sont rectangulaires et $t' = 1$); soit (x, y, z, t) un point d'une surface algébrique f; la normale en ce point est représentée par les équations

$$\frac{xt' - x't}{\frac{df}{dx}} = \frac{yt' - y't}{\frac{df}{dy}} = \frac{zt' - z't}{\frac{df}{dz}} \qquad (1)$$

Si l'on y regarde à présent x', y', z', t' comme les coordonnées d'un point fixe P et x, y, z, t comme les coordonnées courantes, ces équations représentent, comme on sait, une courbe (N) qui passe par les pieds des normales issues de P; dans le cas des quadriques, cette courbe est une cubique gauche. Mais les relations (1) expriment la condition pour que le plan polaire d'un point N (x, y, z, t) soit perpendiculaire à la droite NP. Ainsi, *la courbe* (N) *est le lieu des points tels que leur plan polaire est normal au rayon vecteur issu de* P.

Les égalités (1) sont vérifiées, d'abord par les coordonnées de P, ensuite par les valeurs de x, y, z, t qui annulent à la fois $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}$ et par suite des fonctions linéaires de ces dérivées; or ces valeurs des variables sont les coordonnées des points communs aux premières surfaces polaires des points de l'infini. Dans le cas des quadriques, ces points se réduisent au centre de la surface.

La courbe (N) rencontre le plan de l'infini, représenté par $t = 0$, en des points dont les coordonnées vérifient les équations

$$\frac{x}{\frac{df}{dx}} = \frac{y}{\frac{df}{dy}} = \frac{z}{\frac{df}{dz}}, \qquad (2)$$

et ces dernières sont indépendantes de P.

Donc, toutes les courbes (N) ont les mêmes directions asymptotiques; géométriquement cela est évident, car les asymptotes d'une de ces courbes déterminent, par leur direction, les points de l'infini dont le plan polaire est perpendiculaire à cette direction, laquelle doit ainsi être indépendante du point initial P.

Dans le cas des quadriques, ces asymptotes sont parallèles aux axe de symétrie de la surface.

La courbe (N) ne peut rencontrer la surface f dans le plan de l'infini qu'en des points du cône isotrope, car les coordonnées des points de rencontre à l'infini doivent vérifier, outre les équations (2), les relations suivantes

$$t = 0, \quad f(x, y, z, t) = 0,$$

et, par suite, en appliquant le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes,

$$x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy} + z\frac{df}{dz} = 0;$$

cette égalité, combinée avec les relations (2) conduit à l'équation du cône isotrope,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0;$$

la propriété précédente se démontre aisément par la Géométrie.

2. Dans le cas d'une courbe plane f, en coordonnées rectangulaires rendues homogènes, on a l'équation

$$\frac{xz' - x'z}{\frac{df}{dx}} = \frac{yz' - y'z}{\frac{df}{dy}},$$

qui représente le lieu d'un point N tel que la droite PN est perpendiculaire à la droite polaire de N.

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les propriétés analogues à celles du n° précédent.

3. Soit

$$\varphi(U, V, W) = 0$$

l'équation d'une courbe plane en coordonnées-lignes (*) homogènes (les axes sont rectangulaires et $W = 1$).

Si u, v, w sont les coordonnées d'une droite, son point-pôle N a pour équation

$$U\frac{d\varphi}{du} + V\frac{d\varphi}{dv} + W\frac{d\varphi}{dw} = 0,$$

et les coordonnées-points de ce pôle sont proportionnelles à

$$\frac{d\varphi}{du}, \quad \frac{d\varphi}{dv}, \quad \frac{d\varphi}{dw};$$

(*) Ou coordonnées *tangentielles*.

les coordonnées-points de P étant toujours x', y', z', la droite NP a pour coordonnées-lignes des quantités proportionnelles aux déterminants

$$u_1 = \begin{vmatrix} y' & z' \\ \frac{d\varphi}{dv} & \frac{d\varphi}{dw} \end{vmatrix}, \quad v_1 = \begin{vmatrix} z' & x' \\ \frac{d\varphi}{dw} & \frac{d\varphi}{du} \end{vmatrix}, \quad w_1 = \begin{vmatrix} x' & y' \\ \frac{d\varphi}{du} & \frac{d\varphi}{dv} \end{vmatrix}.$$

La condition pour que cette droite soit perpendiculaire à la droite (u, v, w) est

$$uu_1 + vv_1 = 0;$$

d'où, par substitution des valeurs de u_1, v_1, on a l'équation de l'enveloppe des droites perpendiculaires au rayon vecteur mené de P à leur point-pôle :

$$\psi = \begin{vmatrix} u & v & 0 \\ \frac{d\varphi}{du} & \frac{d\varphi}{dv} & \frac{d\varphi}{dw} \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = 0.$$

Les tangentes communes aux courbes φ et ψ touchent donc la première aux pieds des normales issues de P.

La ligne ψ touche la droite $u = 0$, $v = 0$, qui est la droite de l'infini; dans le cas des coniques, ψ est donc une parabole bien connue. — La courbe ψ est tangente encore aux droites dont les coordonnées vérifient les équations

$$\frac{d\varphi}{du} : x' = \frac{d\varphi}{dv} : y' = \frac{d\varphi}{dw} : z';$$

ce sont les droites ayant P pour point-pôle; dans le cas des coniques, elles se réduisent à la polaire de P.

4. La courbe (N) du n° 2 est de l'ordre n, égal à celui de la courbe f; leurs intersections sont en nombre n^2; cependant pour savoir combien de normales on peut mener du point P, il faut faire subir à ce nombre n^2 des réductions provenant des singularités de la courbe f. Tout point double ou tout point de rebroussement de f est situé sur la courbe (N), car ses coordonnées annulent $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}$; chacun des points doubles, en nombre d, qu'ils soient distincts ou réunis en points multiples d'ordre supérieur, compte pour deux intersections; chacun des points de

rebroussement, en nombre k, compte pour trois intersections, car la tangente en un de ces points est tangente à toutes les 1ères polaires, donc à (N).

Par suite, le nombre des normales est

$$n^2 - 2d - 3k$$

La théorie corrélative, faite d'après le n° 3, donne, pour le nombre des normales issues de P,

$$m^2 - 2t - 3\omega,$$

m représentant la classe de la courbe, t le nombre de tangentes doubles, ω le nombre des points d'inflexion. Les deux expressions trouvées ci-dessus doivent être équivalentes; effectivement les formules connues de Plucker,

$$m = n(n-1) - 2d - 3k$$
$$n = m(m-1) - 2t - 3\omega,$$

montrent que les expressions précédentes valent toutes deux $m + n$. *Le nombre des normales qu'on peut mener d'un point à une courbe algébrique est la somme de l'ordre et de la classe de cette courbe.* (Voir SALMON, *Higher plane Curves*, p. 110)(*).

Gand, 5 août 1897.

SUR DES TRIPLES DE CERCLES ASSOCIÉS,

par M. J. J. DUREN LORIGA.

1. Soient x, y, z les coordonnées barycentriques d'un point par rapport au triangle de référence ABC. Si λ, μ, ν désignent les puissances des points A, B, C par rapport à un cercle Σ, l'équation de Σ est

$$(x+y+z)(\lambda x + \mu y + \nu z) - Sa^2yz = 0. \qquad (1)$$

Considérons les cercles Σ' et Σ'' dont les puissances par rapport aux

---

(*) Dans les courbes planes, on peut généraliser la notion de normale : on considère la droite qui fait avec la tangente un angle constant; la courbe analogue à la courbe (N) du n° 2 ci-dessus a été étudiée par M. DEWULF (NAM., 1859, 1872 et *Bull. des sc. math.* 1878). SALMON (*Higher plane Curves*) définit encore la *quasi normale*, ligne dont les propriétés sont projectives, et dont la normale est un cas particulier.

sommets A, B, C sont respectivement μ, ν, λ et ν, λ, μ; ils ont pour équations

$$(x+y+z)(\mu x+\nu y+\lambda z)-Sa^2yz=0, \quad (2)$$
$$(x+y+z)(\nu x+\lambda y+\mu z)-Sa^2yz=0. \quad (3)$$

Nour dirons que Σ' est le *premier associé*, et Σ'', le *second associé* de Σ.

Les axes radicaux du cercle circonscrit au triangle ABC, combiné successivement avec Σ, Σ', Σ'', sont les droites conjuguées isobariques :

$$\lambda x+\mu y+\nu z=0, \quad \mu x+\nu y+\lambda z=0, \quad \nu x+\lambda y+\mu z=0.$$

Les axes radicaux des cercles Σ, Σ', Σ'' combinés deux à deux sont les trois droites isobariques :

$$(\mu-\nu)x+(\nu-\lambda)y+(\lambda-\mu)z=0,$$
$$(\nu-\lambda)x+(\lambda-\mu)y+(\mu-\nu)z=0,$$
$$(\lambda-\mu)x+(\mu-\nu)z+(\nu-\lambda)z=0.$$

On en conclut que le centre radical des cercles Σ, Σ', Σ'' est le centre de gravité G de ABC. Si l'un de ces cercles passe par G, les deux autres passent également par ce point.

Le rayon du cercle orthotomique de trois cercles associés a pour expression

$$\tfrac{1}{3}\sqrt{3(\lambda+\mu+\nu)-(a^2+b^2+c^2)}.$$

2. Examinons quelques cas particuliers. Le cercle circonscrit à ABC coïncide avec ses associés.

Le cercle de Brocard et ses associés ont pour équations :

$$\frac{x+y+z}{a^2+b^2+c^2}Sb^2c^2x-Sa^2yz=0,$$
$$\frac{x+y+z}{a^2+b^2+c^2}Sa^2c^2x-Sa^2yz=0,$$
$$\frac{x+y+z}{a^2+b^2+c^2}Sa^2b^2x-Sa^2yz=0.$$

Les axes radicaux de ces cercles, pris deux à deux, sont les droites joignant le centre de gravité G respectivement au réciproque du point de Lemoine, au point direct et au point rétrograde de Brocard. Le rayon du cercle orthotomique est égal à

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{Sa^2b^2-Sa^4}{Sa^2}}.$$

Le premier cercle de M'Cay et ses associés ont pour équations

$$\frac{x+y+z}{3}[(b^2+c^2-a^2)x+a^2(y+z)]-\mathbf{S}a^2yz=0,$$

$$\frac{x+y+z}{3}[(b^2+c^2-a^2)z+a^2(x+y)]-\mathbf{S}a^2yz=0,$$

$$\frac{x+y+z}{3}[(b^2+c^2-a^2)y+a^2(x+z)]-\mathbf{S}a^2yz=0.$$

Les axes radicaux des couples (Σ, Σ'), (Σ', Σ''), (Σ'', Σ) sont respectivement les médianes BG, AG, CG.

Les deux associés du cercle conjugué à ABC ont pour axe radical la polaire trilinéaire du point de Steiner; le cercle orthotomique de ces trois cercles a pour rayon

$$\tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)},$$

pour axe radical avec le cercle circonscrit ABC la polaire trilinéaire de l'orthocentre.

Les associés du cercle des neuf points de ABC ont pour axe radical la droite KG; le rayon du cercle orthotomique est égal à

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{-(a^2+b^2+c^2)}.$$

On peut de même étudier les associés des cercles de Neuberg, de ceux de Longchamps, de ceux de Tucker, etc.

3. On peut considérer les cercles associés d'un point remarquable M regardé comme cercle de rayon nul. Si l'on désigne par l, m, n les distances MA, MB, MC, les équations du point M et des cercles associés sont

$$(x+y+z)(l^2x+m^2y+n^2z)-\mathbf{S}a^2yz=0,$$
$$(x+y+z)(m^2x+n^2y+l^2z)-\mathbf{S}a^2yz=0,$$
$$(x+y+z)(n^2x+l^2y+m^2z)-\mathbf{S}a^2yz=0;$$

en représentant par α, β, γ les coordonnées barycentriques de M, on a

$$l^2=\frac{(\beta+\gamma)(c^2\beta+b^2\gamma)-a^2\beta\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}, \text{ etc.}$$

4. Passons à quelques cas particuliers. L'équation de G considéré comme point-cercle est

$$\frac{x+y+z}{9}\mathbf{S}(2b^2+2c^2-a^2)x-\mathbf{S}a^2yz=0;$$

les cercles associés ont pour axe radical la droite GK.

L'équation du point de Lemoine est

$$\frac{x+y+z}{(a^2+b^2+c^2)^2}\,\mathrm{S}\,b^2c^2(2b^2+2c^2-a^2)\,x-\mathrm{S}\,a^2yz=0\,;$$

les cercles associés ont pour axe radical la droite joignant G au réciproque de K, et les axes radicaux de ces cercles combinés avec le point K passent l'un par le point direct de Brocard, l'autre par le point rétrogade de Brocard.

Le point direct de Brocard, a pour équation

$$\frac{x+y+z}{a^2b^2+b^2c^2+a^2b^2}(b^4c^2x+c^4a^2y+a^4b^2z)-\mathrm{S}\,a^2yz+0.$$

Le centre du cercle inscrit à ABC a pour équation

$$\frac{x+y+z}{p}\,[bc(p-a)x+ca(p-b)y+ab(p-c)z]-\mathrm{S}\,a^2yz=0.$$

L'axe radical de ses associés passe par le réciproque de I; celui de I combiné avec les cercles associés passe respectivement par le point direct et le point inverse de Jeřábek.

5. Si, dans l'équation du cercle Σ, on intervertit deux des paramètres λ, μ, ν, on obtient trois nouveaux cercles Σ_1, Σ_2, Σ_3 représentés par

$$\begin{aligned}(x+y+z)(\lambda x+\nu y+\mu z)-\Sigma a^2yz&=0,\\(x+y+z)(\nu x+\mu y+\lambda z)-\Sigma a^2yz&=0,\\(x+y+z)(\mu x+\lambda y+\nu z)-\Sigma a^2yz&=0;\end{aligned}$$

nous les appelons les *semi-associés* de Σ. Les propriétés suivantes se démontrent facilement.

Les trois cercles semi-associés ont pour centre radical le centre de gravité G; les axes radicaux d'un cercle Σ par rapport à ses semi-associés sont les médianes ABC; un cercle quelconque, ses associés et ses semi-associés ont même cercle orthotomique.

×NOTES MATHÉMATIQUES.

×8. *Note sur les bissectrices d'un triangle.* I. Soit AD la bissectrice de l'angle A du triangle ABC. La circonférence décrite du centre C avec le rayon CD coupe AD en un second point E; le point A est extérieur au cercle, car l'angle ADC étant $> \frac{1}{2}$ A, on a AC $>$ CD.

Cela posé, les triangles ABD et ACE étant équiangles, on a

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} = \frac{AD}{AE}. \qquad (1)$$

En remplaçant CE par CD, on obtient

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}.$$

En égalant deux expressions de la puissance du point A par rapport au cercle C, on a

$$AD.AE = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2;$$

puis, en remplaçant AE, AC, CD par les longueurs proportionnelles AD, AB, BD,

$$\overline{AD}^2 = AB.AE - BD.CD.$$

Même raisonnement pour la bissectrice extérieure AD' (Goulard, *Bulletin de mathématiques élémentaires de Niewenglowski*, avril 1898).

II. Si l'on prolonge BA de AF = AC, on forme un triangle BD'F qui a pour bissectrice intérieure, pour côtés adjacents et pour segments de la base, la bissectrice extérieure D'A, les segments de la base D'B et D'F, et les côtés AB, AC du premier triangle ABC. Par suite, les propositions relatives à la bissectrice intérieure s'étendent à la bissectrice extérieure. (Désiré André, NAM, 1874, p. 10).

9. *Note Bibliographique* pour la question 1147 (*Mathesis*, (2) VII, p. 279; VIII, p. 54), par M. H. Brocard. L'équation

$$x^2 - 2y^2 = -1$$

se rencontre, avec l'équation

$$x^2 - 2y^2 = 1,$$

dans un grand nombre de problèmes analogues à celui-ci.

Voir, par exemple, N. A. M. quest. 953 (A. Laisant); solution par

Moret-Blanc, 1872, 173; quest. 1338 (Lionnet), 1881, 373; N. C. M., quest. 233 (Ph. Breton); solutions 1877, 194 et 1879, 285 (E. Catalan); quest. 89 (E. Lucas); J. M. E, 1884, 15-19 (G. de Longchamps); N. C. M., 1878, 166-167. *Mathesis*, quest. 282 (G. de Rocquigny), 1886, 162; J. M. S., quest. 360 (E. Lemoine); solution par E. Catalan, 1893, 23; JMS., quest. 87, S. Realis, solut. par H. Brocard, 1893, 117-120 et A. Boutin, *Ibid.* 139-140; etc.

*10. *Dernier chiffre des neuvièmes puissances* (E. N. Barisien).

Les nombres

$$2^9,\ 3^9,\ 4^9,\ 5^9,\ 6^9,\ 7^9,\ 8^9,\ 9^9$$

sont terminés respectivement par les chiffres

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9.$$

Il en résulte que le dernier chiffre de la neuvième puissance d'un nombre quelconque est celui de ce nombre.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Cours développé d'algèbre élémentaire, précédé d'un aperçu historique sur les Origines des Mathématiques élémentaires et suivie d'un recueil d'Exercices et de Problèmes, par B. Lefebvre, S. J. Tome I. Calcul algébrique; 1897. Tome II. Théorie des équations. Progressions et logarithmes; 1898. Namur, Ad. Wesmael-Charlier (2 vol. in-8° de XLIX-320 et 543 p.). Prix : 10 fr.

Recueil d'Exercices et de Problèmes d'Algèbre élémentaire par B. Lefebvre, S. J, Namur, Wesmael-Charlier, 1898 (167 p. in-8°). Prix : 2 fr.

Excellent recueil extrait de l'ouvrage précédent et que nous signalons à l'attention des professeurs. Voici les subdivisions de l'ouvrage. *Calcul algébrique :* quantités entières (30 pages); quantités fonctionnaires (23 pages); quantités irrationnelles (16 pages). *Équations*, du premier degré (45 pages); du second degré (28 pages). *Progressions, logarithmes, intérêts composés et annuités* (13 pages). Tables des logarithmes de 1 à 1000; racines carrées et racines cubiques, carrés et cubes des nombres entiers de 1 à 1004; tables diverses.

Note sur la décomposition en facteurs des quantités algébriques suivie d'une *note sur la discussion des problèmes du premier degré*, par P. Brasseur, Professeur à l'école normale de Lierre. Neuvième édition, considérablement augmentée. Namur, Wesmael-Charlier, 1898 (85 p. in-8°). Prix : 1 fr. 25.

Nouvelle édition d'un opuscule déjà analysé antérieurement dans *Mathesis*, et où l'auteur a introduit de notables améliorations.

Cours de Géométrie cotée à l'usage des candidats à l'École spéciale militaire de Saint Cyr, par N. CHARRUIT, ancien élève de l'École normale supérieure, agrégé des sciences mathématiques, professeur au lycée de Lyon. Paris, Nony et Cie, 1898 (299 pages; 237 figures dans le texte). Prix : 5 fr.

Livre clair et simple, d'après un bon juge (M. Gérard). La question de l'existence du plan tangent n'est pas escamotée, comme d'ordinaire; l'auteur l'établit à part pour chaque surface considérée.

SOMMAIRE. But et procédés de la géométrie descriptive. I. *Géométrie descriptive*. 1. Représentation du point et de la droite; 2. Du plan; 3. Droites et plans rectangulaires; 4. Changements de plans de projections. II. *Géométrie cotée*. 1-2. Représentation du point, de la droite et du plan; 3. Droites et plans rectangulaires; 4. Méthodes générales; 5. Applications aux questions de distances et d'angles; 6. Polyèdres. III. *Représentation des lignes et surfaces* (Cylindres, cônes, sphère, surfaces de révolution; plans tangents). IV. Sections planes des surfaces (sphère, cylindre, cône; trièdre). *Notes*.

Éléments de la théorie des fonctions elliptiques, par M.J. TANNERY, sous-directeur des Études scientifiques à l'École normale supérieure et J. MOLK, professeur à la Faculté des Sciences de Nancy. Tome III. Calcul intégral (1e partie). Théorèmes généraux. Inversion. Paris, Gauthier-Villars et Fils; 1898 (VIII-267 p. gr. in-8°). Prix : 8 fr. 50.

Le nom des auteurs recommande suffisamment ces *Éléments* qui sont avec le *Traité* de Halphen (resté inachevé) l'ouvrage le plus considérable publié en France sur la théorie des fonctions elliptiques. Le tome III traite surtout de la décomposition des fonctions elliptiques en éléments simples; de leurs développements en séries entières ou trigonométriques; de l'addition, de la multiplication; des intégrales des fonctions doublement périodiques; enfin de l'inversion.

The Twelfth and Concluding Memoir on the Theory of Screws, with a Summary (of the twelve Memoirs) by Sir Robert BALL, LL. D., D. Sc., F. R. S., Lowndean Professor of Astronomy and Geometry in the University of Cambridge. Reprinted from the Transactions of the Royal Irish Academy, vol. XXXI (pp. 145--196), Dublin; Royal Irish Academy 1898 (In 4°).

Conférences sur les mathématiques, faites au Congrès de Mathématiques tenu à l'occasion de l'exposition de Chicago, par Félix Klein, professeur à l'Université de Goettingue, associé étranger de l'Institut de France, recueillies par le professeur Alex Zuwet, traduites par M. L. Laugel, Paris, A. Hermann, 1898 (127 p. gr. in-8°). Prix : 6 francs.

Livre éminemment suggestif sur l'histoire récente des progrès des mathématiques dans leurs parties les plus élevées, que nous ne pouvons trop recommander aux aspirants au doctorat. En voici le sommaire :

1. Clebsch. 2-3. Lie. 4. Sur la véritable forme des courbes et des surfaces algébriques. 5. La théorie des fonctions et la géométrie. 6. Sur le caractère mathéma-

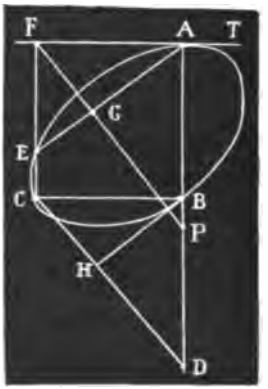
tique de l'intuition de l'espace et sur les relations des mathématiques pures avec les sciences d'application. 7. De la transcendance des nombres e et π. 8. Des nombres idéaux. 9. De la résolution des équations algébriques de degré supérieur. 10. Sur quelques progrès récents dans la théorie des fonctions hyperelliptiques et abéliennes. 11. Recherches les plus récentes sur la géométrie non euclidienne. 12. L'étude des mathématiques à Goettingue. *Supplément.* Le développement des mathématiques dans les Universités allemandes. — *Notes bibliographiques.*

RAYON DE COURBURE DES CONIQUES.

par M. A. Droz-Farny.

I. Dans l'*Educational Times*, juillet 1897, M. le professeur Neuberg a proposé l'intéressante question suivante (n° 13434) :

En un point A *d'une conique on mène la corde normale* AB ; *en* B *on mène la corde* BC *perpendiculaire à* BA, *et de C on abaisse une perpendiculaire* CD *sur la tangente* BH *en* B. *Cette perpendiculaire rencontre* AB *en un point* D. *Démontrer que* BD *est égal au diamètre du cercle osculateur en* A.



Il est facile de démontrer cette proposition, en utilisant les relations métriques données par M. Servais dans *Mathesis*, Année 1892, page 177.

Prenons pour axes coordonnés la tangente et la normale au point A de la conique; l'équation de la courbe sera :

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fy = 0$$

Soit ρ le rayon de courbure au point A, n la corde normale AB ; on trouve aisément :

$$\rho = -\frac{f}{a}; \quad n = -\frac{2f}{b}.$$

La parallèle menée par B à la tangente en A aura pour équation

$$y = -\frac{2f}{b},$$

d'où, pour les coordonnées du point C,

$$x = \frac{4fh}{ab}; \quad y = -\frac{2f}{b}.$$

La tangente en B ayant pour équation

$$2hx + by + 2f = 0,$$

on en déduit l'équation de CD :

$$\left(x-\frac{4fh}{ab}\right)b-\left(y+\frac{2f}{b}\right)2h=0.$$

En y faisant $x=0$, on aura, pour l'ordonnée du point D,

$$y=-\frac{2f}{b}-\frac{2f}{a}=n+2\rho,$$

et par conséquent :

$$BD=2\rho.$$

II. Considérons maintenant comme conique une ellipse, et menons par C une parallèle à AB qui coupe la courbe en E et la tangente en A au point F. Si de F on abaisse sur AE une perpendiculaire FP qui rencontre la normale AB en P, il est facile de démontrer que $AP=BD=2\rho$.

Soient en effet $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les points milieux des côtés AB, BC, CE, EA du trapèze inscrit ABCE. On sait que les droites $A\beta$, $B\delta$, $\alpha\gamma$ se coupent en un même point O. Or $\alpha\gamma$ et $A\beta$ étant des diamètres de la conique, O en est le centre; donc $B\delta$ est aussi un diamètre et par conséquent AE est parallèle à la tangente en B(*). Comme AF = BC, les triangles AFP et BCD sont égaux, d'ou AP = BD.

On a donc le théorème suivant :

En un point A *d'une ellipse, on mène la corde normale* AB *et la tangente* AF*; en* B *on mène la corde* BC *parallèle à* AF, *puis par* C *la corde* CF *parallèle à* AB *qui rencontre la conique et la tangente* AF *respectivement en* E *et* F; *la perpendiculaire abaissée de* F *sur* AE *rencontre* AB *en* P. AP *est égal au diamètre du cercle osculateur en* A.

III. Il est facile de généraliser cette proposition.

Soient comme précédemment les points A, B, C; mais supposons le point E variable sur la conique.

En menant par C une corde variable CE'F' et en abaissant de F' la perpendiculaire F'g' sur la corde AE', on peut se demander l'enveloppe de F'g'. La série des points F' sur la tangente AT est perspective au faisceau des cordes CE'. Lorsque le point E' décrit la conique, les fais-

(*) Cette propriété se déduit de l'hexagone de Pascal AABBCE, ou nous écrivons AA et BB pour indiquer que deux côtés sont les tangentes en A et en B. (J. N.)

ceaux CE′ et AE′ sont homographiques; donc la ponctuelle F′ est homographique au faisceau AE′. On ramène ainsi la question au problème bien connu : Des points d'une ponctuelle on abaisse des perpendiculaires sur les rayons correspondants d'un faisceau homographique. Quelle est l'enveloppe de ces droites?

En règle générale, cette enveloppe est une parabole; car les perpendiculaires $F'g'$ déterminent sur la droite de l'infini $g\infty$ une ponctuelle homographique à la ponctuelle F′.

Dans notre exemple, les deux supports ont en leur point d'intersection des points correspondants des deux séries réunis; les ponctuelles sont donc perspectives et les droites $F'g'$ concourent en un point fixe. Il suffit pour constater ce qui précède de faire coïncider E′ avec B; alors CE′ devient parallèle à AT, F′ est à l'infini ainsi que la perpendiculaire $F'g'$.

Il est facile de fixer la position du centre du faisceau des droites $F'g'$. En faisant coïncider E′ avec A, la droite $F'g'$ coïncide avec la normale AB; le centre cherché est donc le point P du théorème précédent. On obtient ainsi un théorème qui se trouve déjà démontré d'une autre manière dans le mémoire de C. Pelz : *Die Krümmungshalbmesser-Constructionen der Kegelschnitten als Corollarien eines Steiner'schen Satzes*, et que voici :

En un point A *d'une ellipse, on mène la tangente* AF *et la corde normale* AB; *en* B *on mène la corde* BC *parallèle à la tangente* AF. *Si l'on joint le point* C *à un point variable* E *de la conique, la corde* CE *rencontre la tangente en* F *et la perpendiculaire* FP *abaissée de* F *sur* AE *rencontre la normale* AB *en un point fixe* P *tel que* AP *est égal au diamètre du cercle osculateur en* A.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 815.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 56).

Les formules

$$x=\frac{a_1t^2+2b_1t+c_1}{a_3t^2+2b_3t+c_3},\quad y=\frac{a_2t^2+2b_2t+c_2}{a_3t^2+2b_3t+c_3},\qquad (1)$$

où t désigne un paramètre variable, définissent une conique. Trouver l'équation de cette conique en coordonnées cartésiennes et en coordonnées tangentielles. Déduire directement, des formules (1), *les conditions nécessaires pour que la courbe soit une ellipse, une circonférence, une hyperbole un système de deux droites, une parabole. Étant donnée l'équation*

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

trouver des expressions rationnelles de la forme (1) *qui puissent la remplacer.*

Solution par M. STUYVAERT. 1° Si l'on désigne les coordonnées par $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$, les formules (1) peuvent être remplacées par celles-ci :

$$a_1t^2 + 2b_1t + c_1t^0 = Kx_1,$$
$$a_2t^2 + 2b_2t + c_2t^0 = Kx_2,$$
$$a_3t^2 + 2b_3t + c_3t^0 = Kx_3,$$

K étant un facteur de proportionnalité. Ces égalités donnent, en employant une notation qui s'explique d'elle même,

$$t^2 = K\frac{|x, b, c|}{|a, b, c|}, \quad 2t = K\frac{|a, x, c|}{|a, b, c|}, \quad t^0 = K\frac{|a, b, x|}{|a, b, c|};$$

en égalant le carré de la seconde valeur au quadruple produit des valeurs de t^0 et t^2, on trouve l'équation cartésienne de la courbe :

$$|a, x, c|^2 = 4|x, b, c||a, b, x|.$$

2° Les points d'intersection de la conique avec la droite

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

sont déterminés par l'équation

$$u_1(a_1t^2 + 2b_1t + c_1) + u_2(a_2t^2 + 2b_2t + c_2) + u_3(a_3t^2 + 2b_3t + c_3) = 0 \quad (2)$$

Pour que la droite soit tangente, l'équation précédente doit donner pour t deux valeurs égales. On en conclut l'équation tangentielle de la courbe :

$$(b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3)^2 = (a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3)(c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3).$$

3° Les points à l'infini de la courbe correspondent à $x_3 = 0$, ou aux valeurs de t racines de l'équation

$$a_3t^2 + 2b_3t + c_3 = 0;$$

par conséquent, la courbe est une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que $b_3^2 - a_3c_3$ est inférieur, supérieur ou égal à zéro.

4° Pour avoir un système de deux droites, nous exprimons que l'équation donnant les points d'intersection d'une droite avec la courbe est indéterminée, ou que les coefficients de l'équation (2) ordonnée par rapport à t sont nuls :

$$a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3=0,\quad b_1u_1+b_2u_2+b_3u_3=0\quad c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3=0.$$

Pour que ces égalités soient compatibles, il faut que l'on ait

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

5° La courbe sera une circonférence, si elle passe par les points cycliques représentés par les équations $x_3=0, x_2=ix_1$ $(i=\pm\sqrt{-1})$; cette condition s'exprime par les égalités

$$a_3t^2+2b_3t+c_3=0,$$

$$(a_2-a_1i)\,t^2+2\,(b_2-b_1i)\,t+c_2-c_1i=0.$$

En éliminant t, on trouve

$$(B_1-B_2i)^2=4\,(A_1-A_2i)\,(C_1-C_2i),$$

pourvu que $A_1, B_1, \ldots$ désignent les mineurs du déterminant (a,b,c). La dernière relation se décompose en deux autres :

$$B_1^2-B_2^2=4\,(A_1C_1-A_2C_2),\quad B_1B_2=4\,(A_1C_2+A_2C_1).$$

On arrive aux mêmes résultats en partant de l'équation cartésienne de la courbe qu'on peut écrire ainsi :

$$(B_1x_1+B_2x_2+B_3x_3)^2-4\,(A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3)\,(C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3)=0.$$

6° Cette dernière équation montre que les droites représentées par

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3=0,\ C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3=0,\ B_1x_1+B_2x_2+B_3x_3=0$$

sont, respectivement, les tangentes en deux points C, A de la courbe et la corde CA. De même, de l'équation tangentielle (2°) on déduit que (a_1, a_2, a_3), (c_1, c_2, c_3) sont les coordonnées de deux points A, C de la courbe et que b_1, b_2, b_3 sont celles du pôle B de la droite AC; dans les formules (1), les points A et C correspondent à $t=\infty$ et $t=0$.

Cela posé, si l'on donne l'équation d'une conique en coordonnées ponctuelles (x_1, x_2, x_3), on choisit arbitrairement deux points A et C sur le courbe; soit B le pôle de la droite AC. Les coordonnées (a_1, a_2, a_3), (c_1, c_2, c_3), (b_1, b_2, b_3) des points A, C, B sont les coefficients qui entrent

dans les formules (1); ces coordonnées n'étant déterminées qu'à des facteurs de proportionnalité près, on fera en sorte que l'équation tangentielle de la courbe soit identique à l'équation

$$(b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3)^2 - (a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3)(c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3) = 0.$$

Il y a donc une infinité de formules de l'espèce (1), propres à représenter une même conique. Ce fait résulte aussi de ce qu'on peut remplacer t par $\frac{\alpha t' + \beta}{\gamma t' + \delta}$ sans que la forme des égalités (1) change, t' désignant un nouveau paramètre arbitraire.

×Question 1089.

(Voir *Mathesis*, (2), t. V, p. 176).

Soient O *le centre et* AB *une corde quelconque d'une ellipse donnée. Trouver le maximum de l'aire du triangle* OAB : 1° *lorsque la droite* AB *se déplace parallèlement à elle-même*; 2° *lorsqu'elle pivote autour d'un point fixe.* (V. Cristesco).

Solution par M. Jean Jonesco. I. Résolvons d'abord la question pour une circonférence Δ, de centre O et de rayon R.

Si x est la distance de O à AB, il faut rendre maximum le produit $x^2(R^2 - x^2)$, dont les deux facteurs ont une somme constante. Ce maximum a lieu lorsque la différence $R^2 - 2x^2$ des deux facteurs est minimum, d'après l'identité

$$4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2.$$

Or cette différence est nulle pour $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$; donc le triangle OAB a sa plus grande valeur lorsque AB est égal au côté du carré inscrit. Soit Δ′ la circonférence de centre O et de rayon $\frac{R}{\sqrt{2}}$.

Si la corde AB a une direction donnée, le problème est résolu par les cordes de Δ, tangentes à Δ′ et parallèles à la direction donnée. Si elle doit passer par un point donné P, situé à l'extérieur du cercle Δ′, on mène par P les deux tangentes à Δ′. On n'a plus qu'une solution lorsque P est sur la circonférence Δ′.

Supposons maintenant P à l'intérieur du cercle Δ′. Le maximum de

$x^2(R^2 - x^2)$ correspond au minimum de $R^2 - 2x^2$ ou au maximun de x. La corde cherchée AB est, par suite, perpendiculaire à OP.

II. En considérant l'ellipse donnée E comme étant la projection d'une circonférence et en appelant E′ l'ellipse tangente aux cordes qui joignent les extrémités de deux diamètres conjugués, on voit que la corde cherchée est tangente à E′ ; cependant, lorsqu'elle doit passer par un point donné à l'intérieur de E′, elle est conjuguée avec le diamètre passant par ce point.

Ont résolu la même question MM. Seligmann, Droz Farny, Merlin, Déprez, Colart, Barisien, Mandart et Bogdan Jonesco.

Question 1118.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 102).

Trouver le lieu du troisième sommet d'un triangle rectangle isoscèle variable, qui reste homothétique à lui-même, sachant qu'une extrémité de l'hypoténuse se meut sur une circonférence donnée, et que le sommet de l'angle droit se meut sur le diamètre parallèle à l'hypoténuse.

(Soons.)

Solution par MM. Colart, Retali, Mars (Gand), Droz Farny, Déprez, Barisien et Libert. Si l'on prend pour axe des x le diamètre parallèle à l'hypoténuse BC, cette hypoténuse sera double de l'ordonnée de l'une de ses extrémités, de sorte que, si l'abscisse de C est x, celle de B sera $x + 2y$ ou $x - 2y$ suivant la direction de l'hypoténuse, et si B décrit le cercle $x^2 + y^2 = R^2$, le point C décrira l'ellipse

$$(x \pm 2y)^2 + y^2 = R^2,$$

concentrique au cercle donné; l'un des axes de symétrie fait avec le diamètre fixe un angle de 22°30′.

Remarques. I. Si l'on remplace le triangle rectangle par un triangle quelconque, et le cercle directeur par une conique quelconque, l'équation du lieu sera

$$Ay^2 + B(x \pm my)y + C(x \pm my)^2 + Dy + E(x \pm my) + F = 0,$$

ou

$$(A \pm Bm + Cm^2)y^2 + (B \pm 2Cm)xy + Cx^2 + (D \pm Em)y + Ex + F = 0.$$

C'est une conique de même nature que la courbe directrice; car le binôme caractéristique se réduit à $B^2 - 4AC$.

En particulier, si la directrice est une droite $Dy + Ex + F = 0$, le lieu cherché est la droite

$$(D \pm Em)\, y + Ex + F = 0.$$

Ces deux droites se coupent sur l'axe des x.

Si la directrice est un cercle, on a $A = C$, $B = 0$ et le lieu cherché est l'ellipse

$$A(1 + m^2)\, y^2 \pm 2Amxy + Ax^2 + (D \pm Em)\, y + Ex + F = 0.$$

(Déprez, E. Colart.)

II. Les milieux des côtés du triangle mobile et le centre de gravité décrivent chacun une ellipse. (Barisien.)

Note. M. Schiappa Monteiro observe que la question 1118 est un cas particulier de théorèmes présentés par Poncelet dans le tome II des *Applications d'Analyse et de Géométrie* et qu'elle se ramène aussi à une question proposée dans le *Journal de Bourget*, 1881, et traitée par lui dans le *Journal das Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, t. III, p. 1. Nous extrayons de sa solution les remarques suivantes. 1° Si PQ est le diamètre du cercle donné sur lequel glisse le sommet A du triangle rectangle isoscèle ABC dont le sommet B parcourt la circonférence, et qu'on mène la corde BB′ perpendiculaire à PQ, AC passe par B′ et l'on a BC = BB′; d'où une seconde génération du lieu demandé. 2° Si l'on fait coïncider A avec le centre O du cercle donné, AB et AC coïncident avec les rayons $O\beta$, $O\gamma$ inclinés de 45° sur PQ et γ est un point du lieu. Donc OQ et $O\gamma$ représentent deux diamètres égaux de l'ellipse; par suite un axe de symétrie est dirigé suivant la bissectrice de l'angle γOQ. 3° Pour démontrer la question 1118, on peut considérer la circonférence donnée ε comme la courbe d'entrée commune de deux cylindres Σ et Σ'; la courbe de sortie sera une ellipse ε'. Pour trouver la projection horizontale de ε', on coupe Σ et Σ' par un plan P parallèle à la fois aux génératrices des deux cylindres. Si nous supposons que BB′ est la trace d'un tel plan et que les projections horizontales des génératrices de Σ et Σ' sont respectivement parallèles à PQ, et font l'angle de 45° avec PQ, C sera la projection horizontale d'un point de ε', etc.

Question 1143.

(Voir *Mathesis*, (2), VII, p. 261).

On considère tous les limaçons de Pascal, ayant pour équation polaire

$$\rho = a\cos\theta + b.$$

1° *Si a est fixe et b variable, et si l'on mène par le point double* O *une sécante qui rencontre la courbe en* P *et* Q, *montrer que, pour tous les limaçons de la série, les tangentes en* P *et* Q *se rencontrent sur une droite fixe.*

2° *Si a et b sont constants, et si la droite* OPQ *est mobile, les tangentes en* P *et* Q *se rencontrent sur une cubique dont on demande de trouver l'aire comprise entre la courbe et son asymptote.* (E. N. Barisien).

Solution par M. Audibert. Les coordonnées cartésiennes du point P étant

$$y = (a\cos\theta + b)\sin\theta, \quad x = (a\cos\theta + b)\cos\theta,$$

on aura

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a\cos 2\theta + b\cos\theta}{a\sin 2\theta + b\sin\theta},$$

et l'équation de la tangente en P s'écrira

$$y(a\sin 2\theta + b\sin\theta) + x(a\cos 2\theta + b\cos\theta) = (a\cos\theta + b)^2.$$

En changeant θ en $\theta + \pi$, on aura l'équation de la tangente au point Q,

$$y(a\sin 2\theta - b\sin\theta) + x(a\cos 2\theta - b\sin\theta) = (a\cos\theta - b)^2.$$

Retranchant et ajoutant, on a

$$y\sin\theta + x\cos\theta = 2a\cos\theta, \tag{1}$$

$$y\sin 2\theta + x\cos 2\theta = \frac{a^2\cos^2\theta + b^2}{a}. \tag{2}$$

1° Ces deux dernières droites se rencontrent au point d'intersection des deux tangentes; la première (1) étant indépendante de la variable b représente le lieu de ces points.

2° Si a et b sont constants, l'élimination de θ entre (1) et (2) donne l'équation de la cubique :

$$y^2 = \frac{(2a - x)^2(b^2 + ax)}{3a^2 - b^2 - ax}.$$

Dans le cas $a > b$ les deux branches symétriques de la courbe, par-

ties du point $\left(y=0,\ x=-\frac{b^2}{a}\right)$, se croisent au point $(y=0,\ x=2a)$, qui est double et vont à l'asymptote

$$3a^2-b^2-ax=0.$$

Si l'on a $a<b$, les deux branches vont à l'asymptote sans se croiser au point double, qui, situé au-delà de l'asymptote, n'appartient pas à la courbe.

On tire de (1) et (2)

$$x=\frac{3a^2\cos^2\theta-b^2}{a},\quad dx=-6a\sin\theta\cos\theta d\theta,$$

$$y=\frac{\cos\theta}{a\sin\theta}(2a^2+b^2\,3-a^2\cos^2\theta),\quad \text{d'où}$$

$$S=2\int_{-\frac{b^2}{a}}^{\frac{3a^2-b^2}{a}} ydx=12(2a^2+b^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta-36a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta$$

$$S=\frac{3\pi}{4}(4b^2-a^2).$$

Question 1148.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 279).

On donne : 1° *une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes;* 2° *une parabole variable ayant pour foyer un point* F *de l'axe non transverse, pour axe une parallèle à une des asymptotes et pour ordonnée au foyer* (ou pour paramètre) *la distance de* F *aux asymptotes.*

On demande le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle des trois points d'intersection des deux courbes. (H. Brocard)

Solution par M. A Goulard (Marseille). Soit (1)

$$xy=k^2$$

l'équation de l'hyperbole, et soient $(\alpha,-\alpha)$ les coordonnées du point F. Il y a deux paraboles ayant pour foyer F, pour axe la parallèle à l'axe des x, et pour paramètre la valeur absolue de α. On trouve, après quelques calculs faciles, que les équations de ces paraboles peuvent s'écrire

$$y(y+2\alpha)=\pm 2\alpha(x-\alpha). \qquad (2)$$

En divisant membre à membre les équations (1) et (2), il vient, après suppression du facteur y,

$$\frac{x}{y+2\alpha} = \pm \frac{k^2}{2\alpha(x-\alpha)},$$

ou

$$2\alpha x(x-\alpha) = \pm k^2(y+2\alpha);$$

ce sont les équations de deux coniques qui passent par les trois points d'intersection à distance finie de l'hyperbole avec chaque parabole. Les équations des cercles qui passent par ces trois points sont alors

$$2\alpha[x(x-\alpha)+y(y+2\alpha)] = \pm[k^2(y+2\alpha)+4\alpha^2(x-\alpha)].$$

Les équations des centres sont

$$2x-\alpha = \pm 2\alpha, \quad 4\alpha(y+\alpha) = \pm k^2.$$

L'élimination de α donne les lieux des centres :

$$8x(2x+3y) = k^2,$$

et

$$8x(2x-y) = k^2.$$

Ce sont deux hyperboles qui admettent l'axe des y pour asymptote commune, et qui se coupent sur l'axe des x aux points $x = \pm\frac{k}{4}$. La première ne coupe pas l'hyperbole donnée; la deuxième la rencontre aux point $x = \pm\frac{3k}{4}$, $y = \pm\frac{4k}{3}$.

Ont résolu la même question MM. Barisien, Déprez et Audibert.

Remarques. I. Le lieu du centre de gravité du triangle considéré se compose de quatre droites. (Barisien, Déprez.)

II. Le lieu du centre du cercle des neuf points se compose de quatre hyperboles. (Barisien, Déprez.)

III. Si le point F décrit l'axe transverse de l'hyperbole donnée, le lieu du centre du cercle des neuf points du triangle considéré se compose encore de quatre hyperboles. (Barisien.)

IV. Le cercle des neuf points enveloppe une podaire d'hyperbole. (Déprez.)

Question 1151.

(Voir *Mathesis* (2), VIII, p. 31).

Trouver deux cubes entiers consécutifs dont la différence soit un nombre triangulaire.

Démontrer que la différence de deux cubes entiers consécutifs de même parité n'est jamais un nombre triangulaire. (G. DE ROCQUIGNY).

Solution par MM. H. BROCARD et BOUTIN. I. Si de l'équation

$$(x+1)^3 - x^3 = \frac{y(y+1)}{2}$$

on tire x, on voit qu'il faut que

$$6y^2 + 6y - 3 = t^2$$

ou que

$$6t^2 + 27 = u^2,$$

équation résolue par les valeurs

$$t = 3,\ 33,\ 327,\ 3237,\ 32043,\cdots$$
$$u = 9,\ 81,\ 801,\ 7929,\ 78489,\cdots$$

d'où

$$x = \frac{t-3}{6},\quad y = \frac{u-3}{6}$$

avec la relation de récurrence

$$V_n = 10V_{n-1} - V_{n-2}$$

qui existe entre les valeurs de t et de u.

II. La différence de deux cubes de même parité est de la forme

$$(x+1)^3 - (x-1)^3 \quad \text{ou} \quad 6x^2 + 2.$$

On devrait donc avoir

$$6x^2 + 2 = \frac{y(y+1)}{2}$$

ou, en multipliant par 8 et ajoutant 1,

$$48x^2 + 17 = (2y+1)^2.$$

Mais $48x^2 + 17$ est de la forme $3n + 2$ et ne saurait donc être un carré.

Question 1154.

(Voir *Mathesis*, (2), t. VIII, p. 31).

Soit ABC *un triangle inscrit dans une conique* Σ. *Représentons par* α *le point de Frégier de* A (*point de concours de hypoténuses des triangles rectangles inscrits à* Σ *et ayant le sommet de l'angle droit en* A), *par* α′ *le pôle de* BC.

1° *Les droites* αα′, ββ′, γγ′ *concourent en un point* P.

2° *La conique* Σ *est la transformée isogonale* (*par points inverses*) *de la polaire de* P. (Droz-Farny.)

Solution par MM. A. Boutin, G. Gérard (Liége) et Déprez. Prenons ABC pour triangle de référence, et soit l'équation de Σ :

$$(\Sigma) \qquad \frac{\lambda}{x}+\frac{\mu}{y}+\frac{\nu}{z}=0.$$

Le point de Frégier de A est sur la normale en A, c'est-à-dire sur la droite :

$$(1) \qquad (\nu\cos A-\mu)\,y+(\nu-\mu\cos A)z=0;$$

la perpendiculaire en A à AB, $y+z\cos A=0$, coupe Σ en un point D, tel que l'équation de BD est

$$(2) \qquad \lambda z=\frac{x}{\cos A}(\mu-\nu\cos A).$$

On en déduit, pour les coordonnées normales de α,

$$\frac{x}{\lambda\cos A}=\frac{y}{\nu-\mu\cos A}=\frac{z}{\mu-\nu\cos A}.$$

Le pôle de BC est le point dont les coordonnées sont :

$$\frac{x}{-\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{\nu}.$$

L'équation de αα′ est donc :

$$x(\nu^2-\mu^2)-\lambda\mu y+\lambda\nu z=0.$$

Les équations de ββ′ et γγ′, s'obtiendront par permutation circulaire, et l'on constate aisément que le déterminant des coefficients est nul ; ces droites sont donc concourantes. Les coordonnées de P sont telles que

$$\frac{x}{\lambda(\mu^2+\nu^2-\lambda^2)}=\frac{y}{\mu(\lambda^2+\nu^2-\mu^2)}=\frac{z}{\nu(\lambda^2+\mu^2-\nu^2)}.$$

Ce point est bien le pôle de la droite $\lambda x+\mu y+\nu z=0$, transformée isogonale de Σ.

×Question 1157.

(Voir *Mathesis*, (2) VIII, p. 55).

Résoudre, en nombres entiers, l'équation :

$$2^{x+1} + 2^x + 1 = u^2. \qquad \text{(De Rocquigny.)}$$

Solution par MM. J. Jonesco, Colart (Huy), Soons (Tirlemont), Barbette et Demanet. L'équation peut s'écrire

$$3.2^x = u^2 - 1 = (u+1)(u-1). \tag{1}$$

On doit donc avoir $u = 3m \pm 1$. L'équation précédente devient alors :

$$2^x = 3m^2 \pm 2m = m(3m \pm 2).$$

On voit immédiatement que m doit être pair, sauf pour $x = 0$, qui donne $u = 2$. Soit $m = 2n$. On aura

$$2^{x-2} = n(3n \pm 1).$$

Pour $n > 1$, cette équation est impossible, car n et $3n \pm 1$ ne peuvent pas être pairs à la fois. Pour $n = 1$ on obtient $2^{x-2} = 2$ ou $2^{x-2} = 4$, qui donnent $x = 3$ et $x = 4$. Les valeurs correspondantes de u sont 5 et 7. Par conséquent, les solutions sont : $x = 0, 3, 4$; $u = 2, 5, 7$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

×1169. Résoudre le système.

$$\operatorname{tg}(y+z) = a \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{tg}(z+x) = b \operatorname{tg} y, \quad \operatorname{tg}(x+y) = c \operatorname{tg} z.$$

×1170. Soit un triangle ABC; on prolonge le côté AB d'une longueur BD = AB et l'on joint DC. On élève sur le milieu de CD une perpendiculaire qui rencontre le cercle ABC en deux points E et F. Démontrer que B est le milieu du segment déterminé sur BC par les droites AE et AF. (A. Gob).

×1171. Si l'angle A d'un triangle sphérique ABC est égal à 120°, la longueur d de la bissectrice AD de l'angle A est donnée par

$$\operatorname{cotg} d = \operatorname{cotg} b + \operatorname{cotg} c \qquad \text{(J. Déprez.)}$$

1172. On donne sur une même droite Ox les points A, A', B, B'. Une parabole donnée P se meut de manière qu'elle passe constamment par le point O, et que son axe reste parallèle à Oy.

Soient M, M' les extrémités des diamètres de P menés par A, A'. Les droites MB et M'B' se coupent en un point N. Trouver le lieu décrit par N et chercher les conditions nécessaires pour que ce lieu soit égal à une parabole donnée P'. (Petit-Bois.)

*SUR DEUX TRANSVERSALES REMARQUABLES DU TRIANGLE;

par M. A. Gob, professeur à l'Athénée de Hasselt.

1. Par les trois sommets A, B, C d'un triangle on mène les droites AA', BB', CC' rencontrant les côtés opposés aux points A', B', C' sous un même angle θ (le sens de rotation étant le même). Nous nous proposons de déterminer l'angle θ par la condition que les points A', B', C' soient en ligne droite.

Les triangles AA'B, AA'C donnent

$$\frac{BA'}{\sin(B+\theta)}=\frac{AA'}{\sin B},\quad \frac{CA'}{\sin(\theta-C)}=\frac{AA'}{\sin C};$$

par conséquent,

$$\frac{BA'}{CA'}=\frac{\sin C\sin(\theta+B)}{\sin B\sin(\theta-C)}=\frac{\cot B+\cot\theta}{\cot C-\cot\theta}. \qquad (1)$$

Pour que les points A', B', C' soient en ligne droite, on doit donc avoir

$$\sin(\theta+A)\sin(\theta+B)\sin(\theta+C)=-\sin(\theta-A)\sin(\theta-B)\sin(\theta-C),$$

ou

$$(\cot\theta+\cot A)(\cot\theta+\cot B)(\cot\theta+\cot C)$$
$$=(\cot\theta-\cot A)(\cot\theta-\cot B)(\cot\theta-\cot C).$$

On en déduit

$$\cos^2\theta=-\cos A\cos B\cos C, \qquad (2)$$
$$\operatorname{tg}^2\theta=-(\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}C\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B), \qquad (3)$$
$$\operatorname{tg}^2\theta=-\cot\omega\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C,$$

ω étant l'angle de Brocard du triangle A B C.

L'angle θ n'est réel que si le triangle est obtusangle; il a alors deux valeurs supplémentaires, qui correspondent à deux transversales A' B' C' et A'' B'' C'' dont les points de rencontre A' et A'', B' et B'', C' et C'' avec les côtés du triangle sont symétriques respectivement par rapport aux pieds D, E, F des hauteurs.

2. Soient O le centre et R le rayon du cercle circonscrit à ABC. Le cercle conjugué à ABC a pour centre l'orthocentre H, et son rayon ρ, égal à $\sqrt{HA\cdot HD}$, a pour expression

$$\rho=2R\sqrt{-\cos A\cos B\cos C}=2R\cos\theta.$$

Remarquons aussi la formule

$$HO = R\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C} = R\sqrt{1 + 8\cos^2\theta}.$$

On sait que les cercles H, O et le cercle de neuf points O_9 ont une corde commune MM', et que H est le centre de similitude externe des cercles O et O_9. Soit N le second point de rencontre du cercle O avec la droite HM; N et M étant des points homologues des cercles O et O_9, on a

$$HM = \tfrac{1}{2}HN, \quad \text{d'où} \quad MN = HM = \rho = 2R\cos\theta.$$

On en conclut que l'angle $OMN = \theta$; donc θ *est l'angle sous lequel se coupent le cercle circonscrit et le cercle conjugué.*

La droite MO_9 étant parallèle à ON, l'angle O_9MO est égal à

$$\pi - HMO_9 - OMN = \pi - 2\theta;$$

par suite, *les cercles* O *et* O_9 *se coupent sous l'angle* 2θ.

3. Soit P le pôle de la droite A' B' C' par rapport au cercle H; A étant le pôle de BC, AP est la polaire de A' et coupe BC en un point A_1'' pôle de AA'; HA_1 est donc perpendiculaire à AA' et par suite fait avec BC l'angle $\frac{1}{2}\pi - \theta$. On en conclut que *si l'on mène par* H *trois droites faisant avec* BC, CA, AB *dans un même sens de rotation l'angle* $\frac{1}{2}\pi - \theta$, *ces droites coupent ces côtés en trois points* A_1, B_1, C_1 (*ou* A_2, B_2, C_2) *tels que les droites* AA_1, BB_1, CC_1 (*ou* AA_2, BB_2, CC_2) *concourent en un même point* P, *pôle de* A'B'C' *par rapport au cercle conjugué* (*ou en un même point* P', *pôle de* A''B''C'').

4. Appelons Δ et Δ' les transversales A'B'C' et A''B''C''.

Soient Δ_1 et Δ'_1 leurs transversales réciproques et désignons par B_1'' et C_1'' les points de rencontre de Δ'_1 avec AC et AB. Les triangles BB''C et CC''B donnent

$$AB_1'' = CB'' = a\frac{\sin(\theta - C)}{\sin\theta}, \quad AC_1'' = BC'' = a\frac{\sin(\theta + B)}{\sin\theta}.$$

Or les angles A'AC et A'AB sont égaux respectivement à $\theta - C$ et à $180° - (\theta + B)$; on a donc

$$\frac{AB_1''}{AC_1''} = \frac{\sin A'AC}{\sin A'AB}.$$

Donc *la droite* AA' *est une symédiane du triangle* $AB_1''C_1''$.

5. Soit $mx + ny + pz = 0$ l'équation de Δ'_1 en coordonnées normales. L'équation de la parallèle menée par A à Δ'_1 s'obtient en éliminant x entre cette équation et l'équation de la droite de l'infini ; on obtient ainsi

$$y(na - mb) + z(pa - mc) = 0.$$

La médiane du triangle $AB''_1C''_1$ est la conjuguée harmonique de cette droite par rapport à l'angle BAC ; son équation est donc

$$y(na - mb) - z(pa - mc) = 0.$$

L'équation de la symédiane AA' du triangle $AB''_1C'_1$ est donc

$$y(pa - cm) + z(mb - na) = 0.$$

L'équation de la droite A'B'C' est par conséquent

$$x(nc - pb) + y(pa - mc) + z(mb - na) = 0. \qquad (*)$$

On voit donc que *les droites* Δ *et* Δ' *passent par le point de Lemoine et que chacune d'elles passe par l'inverse triangulaire du pôle trilinéaire de la transversale réciproque de l'autre.*

On déduit aussi de là que *la droite* PP' *est la polaire du point de Lemoine par rapport au cercle conjugué.*

SUR UN GROUPE DE TROIS PARABOLES(**) ;

par M. J. Neuberg.

1. Par les trois sommets d'un triangle ABC, nous menons trois droites AA', BB', CC' faisant avec les côtés opposés, dans un même sens de rotation, un même angle θ. Soient A', B', C' les points où elles rencontrent les côtés, et MNP le triangle formé par ces droites. Nous désigneront par AA'', BB'', CC'' les symétriques des droites AA', BB', CC' par rapport aux hauteurs AD, BE, CF du triangle ABC ; elles font avec les côtés de ABC l'angle $\pi - \theta$.

(*) Si l'on suppose que l'équation $mx + ny + pz = 0$ représente une droite quelconque, on a le théorème suivant : *Si une droite rencontre les côtés du triangle en* M, N, P, *les symédianes* AM', BN', CP' *des triangles* ANP, BMP, CMN *rencontrent les côtés correspondants du triangle en trois points* M', N', P' *qui sont sur une même droite passant par le point de Lemoine et par l'inverse du pôle trilinéaire de la droite* MNP.

(**) Cet article fait suite, en quelque sorte, aux recherches de M. Gob sur deux transversales remarquables du triangle.

Les droites AA′, BB′, CC′ concourent en un même point lorsque $\theta = \frac{1}{2}\pi$; elles se confondent alors avec les hauteurs et le triangle MNP se réduit à l'orthocentre H.

Le triangle MNP est directement semblable à ABC. Les côtés sont égaux aux doubles des projections des côtés homologues de ABC sur AA′, BB′, CC′ (Voir Cesaro, *Mathesis*, (1) V, pp. 128 et 134); le rapport de similitude est donc égal à $2\cos\theta$.

Les sommets M, N, P se meuvent sur les circonférences circonscrites aux triangles BCH, CAH, ABH.

3. Lorsque l'angle θ varie, les distances DA′, EB′, FC′ sont toujours proportionnelles aux hauteurs AD, BE, CF; donc les points A′, B′, C′ engendrent des ponctuelles semblables. Il en résulte que les droites B′C′, C′A′, A′B′ enveloppent trois paraboles π_a, π_b, π_c, qui sont respectivement tangentes aux trois côtés des triangles AEF, BFD, CDE.

Le point de contact de AB avec π_a est la position de C′ lorsque B′ coïncide avec A; c'est donc le symétrique F′ de A par rapport à F; de même le point de contact de AC est le symétrique E′ de A par rapport à E. De là on conclut facilement que π_a touche FE en son milieu D_1. Or AD_1 est un diamètre de π_a et une symédiane de ABC; donc *les axes des paraboles* π_a, π_b, π_c *sont parallèles aux symédianes* AK, BK, CK *du triangle* ABC.

Le foyer φ_a de la parabole π_a se trouve sur la circonférence circonscrite au triangle circonscrit AFE, et aussi sur l'isogonale du diamètre AD_1 par rapport à l'angle FAE. Cette isogonale étant la médiane AG de ABC, et AH étant un diamètre du cercle AEF, *les foyers des paraboles* π_a, π_b, π_c *sont les projections de l'orthocentre* H *sur les médianes* AG, BG, CG *ou les intersections des médianes avec le cercle de diamètre* HG. Ces points jouissent d'une foule d'autres propriétés intéressantes (voir *Mathesis*, (1) X, p. 166).

Soient S, T les projections de φ_a sur AB, AC; la droite ST est la tangente au sommet de π_a. Le demi-paramètre p_a de cette parabole est double de la hauteur du triangle $\varphi_a ST$ issue de φ_a. Comme $A\varphi_a$ est le diamètre du cercle circonscrit à ce triangle, on a

$$p_a = 2A\varphi_a \sin \varphi_a ST \sin \varphi_a TS = 2A\varphi_a \sin CAG \sin BAG.$$

Si l'on prolonge la médiane AM d'une longueur MQ égale à elle-même, le triangle ACQ donne

$$\frac{\sin A}{2m_a} = \frac{\sin CAG}{c} = \frac{\sin BAG}{b}.$$

On en déduit

$$p_a = 2A\varphi_a \frac{bc \sin^2 A}{4 m_a^2},$$

ou, à cause de $A\varphi_a = AH \sin AMB = 2R \cos A \sin AMB$:

$$p_a = \frac{abc}{4 m_a^2} \sin 2A \sin AMB = \frac{2S^2 \cos A}{m_a^2}.$$

3. Les paraboles π_a, π_b qui ont la tangente commune AB, ont deux autres tangentes communes. Ces droites correspondent au cas où les points A', B', C' sont en ligne droite et par suite, touchent également la troisième parabole π_c ; nous les désignons par Δ et Δ'.

Adoptons les coordonnées barycentriques x, y, z. Les droites AA', BB', CC' auront pour équations

$$\frac{y}{z} = \frac{CA'}{A'B} = \frac{\gamma + t(*)}{\beta - t}, \quad \frac{z}{x} = \frac{\alpha + t}{\gamma - t}, \quad \frac{x}{y} = \frac{\beta + t}{\alpha - t}, \tag{1}$$

α, β, γ, t désignant les quantités cot A, cot B, cot C, cot θ.

Des relations (1) on conclut la condition pour que les points A', B', C' soient en ligne droite :

$$(\alpha + t)(\beta + t)(\gamma + t) = -(\alpha - t)(\beta - t)(\gamma - t) \tag{2}$$

$$t^2 = -\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}. \tag{3}$$

On en déduit également l'équation de la droite B'C' :

$$-(\alpha^2 - t^2)x + (\alpha + t)(\beta + t)y + (\alpha - t)(\gamma - t)z = 0 \tag{4}$$

ou

$$(x + y + z)t^2 + [(\alpha + \beta)y - (\alpha + \gamma)z]t + \alpha(\beta y + \gamma z - \alpha z) = 0,$$

puis celle de l'enveloppe de B'C' lorsque t varie :

$$[(\alpha + \beta)y - (\alpha + \gamma)z]^2 - 4(x + y + z)(\beta y + \gamma z - \alpha z) = 0.$$

La forme de cette équation montre immédiatement que l'enveloppe est une parabole, car la droite de l'infini (équation : $x + y + z = 0$) est une tangente. On voit aussi qu'un diamètre est la symédiane AK (équation : $(\alpha + \beta)y - (\alpha + \gamma)z = 0$).

(*) On suppose $\theta = AA'C$, et on calcule CA' en observant que

$$CA' = CD + DA' = AD(\cot C + \cot AA'D), \text{ etc.}$$

L'équation de la droite B″C″ s'obtient en changeant θ en $\pi - \theta$ ou t en $-t$; elle est donc

$$-(\alpha^2 - t^2)\,x + (\alpha - t)(\beta - t)\,y + (\alpha + t)(\gamma + t)\,z = 0. \quad (5)$$

Si l'on soustrait l'une de l'autre les équations (4) et (5) on trouve l'équation de la symédiane AK. Par conséquent, les *côtés homologues des deux triangles* A′B′C′ *et* A″B″C″ *se coupent sur les symédianes de* ABC. En particulier, *les droites* Δ *et* Δ' *se coupent à la fois sur les trois symédianes ou passent par le point de Lemoine* K.

Multipliant membre à membre les équations (4) et (5), on obtient

$$(\alpha^2 - t^2)^2 x^2 + (\alpha^2 - t^2)(\beta^2 - t^2)\,y^2 + (\alpha^2 - t^2)(\gamma^2 - t^2)\,z^2$$
$$- 2(\alpha^2 - t^2)(\alpha\beta + t^2)\,xy - 2(\alpha^2 - t^2)(\alpha\gamma + t^2)\,xz$$
$$+ zy\,[(\alpha + t)^2(\beta + t)(\gamma + t) + (\alpha - t)^2(\beta - t)(\gamma - t)] = 0.$$

S'il s'agit des droites Δ et Δ', on peut remplacer, dans le coefficient de zy, les produits $(\alpha + t)(\beta + t)(\gamma + t)$, $(\alpha - t)(\beta - t)(\gamma - t)$ l'un par l'autre changé de signe ; ce coefficient prend alors la forme

$$-(\alpha^2 - t^2)(\beta - t)(\gamma - t) - (\alpha^2 - t^2)(\beta + t)(\gamma + t),$$

et l'équation précédente devient après division par le facteur $\alpha^2 - t^2$:

$$\Sigma(\alpha^2 - t^2)\,x^2 - 2\Sigma(\alpha\beta + t^2)\,xy = 0,$$

ou

$$(\Sigma\alpha^2 x^2 - 2\Sigma\alpha\beta xy) - t^2(x + y + z)^2 = 0.$$

On en conclut que les transversales Δ et Δ' sont les asymptotes de la conique représentée par l'équation

$$\Sigma\alpha^2 x^2 - 2\Sigma\alpha\beta xy = 0,$$

courbe qui touche les côtés de ABC aux pieds des hauteurs et qui a pour centre le point de Lemoine. On pourrait aussi déduire cette propriété de ce que les segments des tangentes BC, CA, AB compris entre Δ et Δ' ont leurs milieux aux points de contact D, E, F.

Note. M. Gob, à qui nous avons donné connaissance de nos recherches, nous communique cette proposition très curieuse :

Les droites Δ, Δ' *sont perpendiculaires aux tangentes menées de* H *à l'ellipse minimum circonscrite au triangle* ABC.

En effet, cette ellipse et la conique qui touche les côtés de ABC aux pieds des hauteurs sont polaires réciproques par rapport au cercle conjugué H.

×DES PROGRESSIONS LOGARITHMIQUES;

par . E. Barbette.

Définition. Une *progression logarithmique* est une suite de nombres dont chacun égale le précédent élevé à une puissance constante, appelée *raison*.

Par exemple, si l'on élève le nombre a à la puissance r, on forme le nouveau nombre a^r; si l'on élève celui-ci à la puissance r, on obtient le nombre $(a^r)^r$ ou a^{r^2}; si l'on élève ce dernier à la puissance r, on a le nombre $(a^{r^2})^r$ ou a^{r^3}; et ainsi l'on forme la suite

$$\therefore a \vdots a^r \vdots a^{r^2} \vdots a^{r^3} \vdots \cdots,$$

dans laquelle le signe $\therefore$ qui précède a et les trois points $\vdots$ qui séparent les différents termes indiquent que l'on a affaire à une progression logarithmique.

Remarques. 1° La raison $r = \log_a a^r$, d'où le nom de progression logarithmique. 2° Nous donnerons au premier terme a de toute progression logarithmique le nom de *base* de cette progression et nous remarquerons en outre que les progressions ainsi formées n'ont de sens que si a et r sont des nombres positifs.

Théorème I. Le $n^{ième}$ terme d'une progression logarithmique égale le premier élevé à une puissance marquée par la puissance $(n-1)^{ième}$ de la raison.

La démonstration de ce théorème a été donnée ci-dessus.

Corollaire I. Le théorème précédent permet d'insérer entre deux nombres donnés α et β un certain nombre m de *moyens logarithmiques*, c'est-à-dire, d'écrire une progression logarithmique de $m+2$ termes dont α et β soient les extrêmes.

La raison r est l'inconnue principale; or on peut écrire $\beta = \alpha^{r^{m+1}}$; d'où

$$\log_\alpha \beta = r^{m+1}, \quad r = \sqrt[m+1]{\log_\alpha \beta}.$$

Corollaire II. Si entre les termes consécutifs d'une progression logarithmique

$$\therefore a \vdots b \vdots c \vdots \cdots\cdots \vdots k \vdots l,$$

on insère un même nombre m de moyens logarithmiques, on obtient

une suite de progressions partielles qui forment une seule et même progression.

En effet, d'après le corollaire I, les raisons des progressions partielles sont

$$\sqrt[m+1]{\log_a b},\quad \sqrt[m+1]{\log_b c},\quad \ldots,\quad \sqrt[m+1]{\log_k l}.$$

Or par hypothèse,

$$\log_a b = \log_b c = \cdots = \log_k l\ ;$$

donc les raisons des progressions partielles étant égales, ces progressions n'en forment qu'une, attendu que le dernier terme de l'une d'elles est précisément le premier terme de la suivante.

Problème. Rechercher la condition pour que trois nombres α, β, γ fassent partie d'une même progression logarithmique.

Solution. Soient $\alpha < \beta < \gamma$ et supposons que ces trois nombres puissent faire partie d'une même progression logarithmique.

Désignons par $m - 1$ le nombre de moyens existant entre α et β, la raison de la première progression partielle sera $\sqrt[m]{\log_\alpha \beta}$; soit $n - 1$ le nombre de moyens existant entre β et γ, la raison de la seconde progression partielle sera $\sqrt[n]{\log_\beta \gamma}$.

Pour qu'il n'y ait qu'une *seule* progression, il suffit que

$$\sqrt[m]{\log_\alpha \beta} = \sqrt[n]{\log_\beta \gamma}.$$

D'où en élevant à la puissance mn :

$$(\log_\alpha \beta)^n = (\log_\beta \gamma)^m,$$

telle est la condition demandée.

Remarque. Cette condition peut aussi s'écrire dans n'importe quelle base

$$\left(\frac{\log \beta}{\log \alpha}\right)^n = \left(\frac{\log \gamma}{\log \beta}\right)^m$$

ou

$$(\log \beta)^{n+m} = (\log \gamma)^m + (\log \alpha)^n.$$

Théorème II. Le produit des termes d'une progression logarithmique de n nombres égale la base de cette progression, élevée à un exposant donné par une fraction dont le numérateur est l'excès de la puissance

$n^{ième}$ de la raison sur l'unité et le dénominateur l'excès de la raison sur l'unité.

Démonstration. En effet, ce produit

$$P_n = a \times a^r \times a^{r^2} \times a^{r^3} \times \cdots \times a^{r^{n-1}}$$

$$= a^{1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n-1}} = a^{\frac{r^n-1}{r-1}}.$$

Corollaire. Si la raison est moindre que l'unité, on écrira

$$P_n = a^{\frac{1-r^n}{1-r}}$$

et si n croît indéfiniment, on aura

$$\text{limite } P_n = a^{\frac{1}{1-r}}.$$

Remarques. 1° On peut aussi trouver la somme

$$S_n = a + a^r + a^{r^2} + a^{r^3} + \cdots + a^{r^{n-1}}$$

à l'aide de la formule de récurrence

$$S_n = (S_{n-1} - S_{n-2})^r + S_{n-1}$$

en remarquant que

$$S_0 = 1 \text{ et } S_1 = a.$$

2° La puissance des termes d'une progression logarithmique

$$\cdots : a : b : c : \cdots\cdots : k : l$$

est donnée par

$$E_n = \left[\left\{\left((a^b)^c\right)^{\cdots}\right\}^k\right]^l$$

$$= a^{bc\cdots kl},$$

$$= a^{a^r \cdot a^{r^2} \cdots a^{r^{n-1}}},$$

$$= a^{a^{\frac{r^n-r}{r-1}}}.$$

Si la raison est moindre que l'unité, on écrira

$$E_n = a^{a^{\frac{r-r^n}{1-r}}},$$

et si n croît indéfiniment, on aura

$$\text{limite } E_n = a^{a^{\frac{r}{1-r}}}.$$

NOTES MATHÉMATIQUES.

11. *Théorèmes*, par M. A. Cazamian. I. On considère sur une cubique un groupe de quatre points A, B, C, D, tels que les tangentes en ces quatre points se coupent sur la cubique. Appelons-le groupe homotangentiel.

1° Démontrer que la droite joignant deux quelconques de ces points et la droite joignant les deux autres se rencontrent sur la cubique. On obtient ainsi trois nouveaux points de la courbe. Démontrer qu'ils forment avec le tangentiel commun des points A, B, C, D un groupe homotangentiel.

2° On considère deux groupes homotangentiels. On joint un point quelconque du premier à un point quelconque du second et un autre point du premier groupe à un autre point du second. Prouver que ces deux droites se coupent sur la cubique. Soit α ce point. Si l'on fait cette opération de toutes les manières possibles, on obtient 36 points tels que α. Montrer que quatre seulement d'entre eux sont distincts et qu'ils forment un groupe homotangentiel.

3° Soit M le tangentiel commun d'un groupe homotangentiel. Les points de contact des tangentes menées par le point M à une conique quelconque passant par les quatre points du groupe sont sur la cubique.

Application : Construire avec la règle et le compas une cubique, connaissant un groupe homotangentiel et leur tangentiel commun.

4° Si l'on considère tous les groupes homotangentiels d'une cubique, chacun d'eux se partage en couples de points tels que les droites joignant un point fixe quelconque de la cubique à tous ces couples de points forment une involution.

II. Désignant sous le nom de courbes cycliques les courbes qu'un cercle ne rencontre qu'en quatre points à distance finie, démontrer les deux propositions suivantes :

1° Ces courbes sont des coniques, des cubiques circulaires, ou des quartiques bicirculaires.

2° Les cercles osculateurs à une courbe cyclique en quatre points situés sur un cercle rencontrent de nouveau la courbe en quatre points situés sur un cercle.

III. On considère une cubique circulaire *quelconque*. Démontrer que les cercles osculateurs en trois points en ligne droite rencontrent de nouveau la cubique en trois points tels que le cercle défini par ces trois points passe par un point fixe situé sur la courbe. C'est le point où la cubique est rencontrée par son asymptote réelle.

12. *Sur l'hypocycloïde à quatre rebroussements, par le* R. P. Bosmans. Si $X^2 + Y^2 - R^2 = 0$ est l'équation de la circonférence fixe sur laquelle roule la circonférence mobile, qui engendre l'hypocycloïde à quatre rebroussements, ayant pour équation

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - R^{\frac{2}{3}} = 0,$$

on peut aussi représenter celle-ci par les deux relations

$$x = \frac{X^3}{R^2}, \quad y = \frac{Y^3}{R^2}.$$

Elles ne diffèrent pas des formules classiques

$$x = R\cos^3\tfrac{1}{4}\varphi, \quad y = R\sin^3\tfrac{1}{4}\varphi,$$

mais elles mettent bien en évidence un procédé élémentaire, pour construire directement les coordonnées d'un point de l'hypocycloïde à quatre rebroussements, au moyen de celles d'un point pris sur la circonférence fixe.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1119.

(Voir *Mathesis*, (2) T. VII, p. 125).

On donne une ellipse E, *de centre* O *et de foyers* F *et* F'. *D'un point quelconque* M *du plan on mène à* E *les tangentes.*

Par les points de contact P, Q *et par* M *on fait passer une circonférence qui rencontre l'ellipse en deux nouveaux points* P', Q'. *Soit* M' *le pôle de la corde* P' Q' *par rapport à* E.

1° M, M', F, F' *sont quatre points concycliques.*

2° MM' *est une symédiane du triangle* FMF'.

3° *Si* M *se meut sur une circonférence de centre* O, M' *se meut sur une seconde circonférence de centre* O *et la droite* MM' *enveloppe une développée de conique.*

4° *Si* M *décrit une lemniscate de centre* O *et de mêmes axes que* E, M' *décrit une hyperbole équilatère.*

5° *Si* M *décrit une strophoïde droite ayant* O *pour point double et* OF *pour axe,* M' *décrira une hyperbole équilatère.*

6° *Si* M *décrit une cissoïde ayant pour axe* OF *et* O *pour point de rebroussement,* M' *décrira une parabole.*

7° *Si* M *décrit un limaçon de Pascal* (*cardioïde*) *dont l'axe est dirigé suivant* OF *et dont le pôle est en* O, M' *décrira une conique* (*parabole*).

8° *Si* M *décrit la podaire de* O *par rapport à une hypocycloïde à quatre rebroussements ayant pour axes ceux de l'ellipse,* M' *decrira une kreuscurve.*

9° *Si* M *décrit une ellipse dont les axes sont dirigés suivant ceux de* E, M' *décrira une podaire d'ellipse.* (DÉPREZ.)

Solution par V. VETALI (Milan). 1° Que les points M, M', F, F' sont sur un cercle, est un théorême connu(*); on peut ajouter que M, M' et les deux foyers imaginaires de E sont sur un deuxième cercle orthogonal au premier.

2° Si (α, β) sont les coordonnées de M et $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, l'équation de E, les équations des cercles MPQ, MFF', et de leur axe radical MM' sont (*Mathesis*, 1894, p. 274) :

$$(1)\qquad (a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)(x^2 + y^2) - b^2\alpha x(\alpha^2 + \beta^2 + c^2) - a^2\beta y(\alpha^2 + \beta^2 - c^2) + c^2(b^2\alpha^2 - a^2\beta^2) = 0,$$

$$(2)\qquad \beta(x^2 + y^2) - y(\alpha^2 + \beta^2 - c^2) - c^2\beta = 0,$$

$$(3)\qquad -\beta(\alpha^2 + \beta^2 + c^2)x + \alpha(\alpha^2 + \beta^2 - c^2)y + 2c^2\alpha\beta = 0.$$

L'équation (3) étant vérifiée par les coordonnées

$$x = 0, \quad y = -\frac{2c^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2 - c^2}$$

du pôle de la droite FF' par rapport à (2), *le point* M' *est conjugué harmonique de* M *par rapport aux points* F, F' *sur le cercle* MFF', et les angles FMM', OMF' sont égaux.

Si M_1 est le point symétrique de M' par rapport à l'axe FF', les points M et M_1 sont réciproques par rapport au cercle O^1, décrit sur le diamètre

(*) Voir p. ex. NEPPI, *Questioni di G. Anal.*, pag. 192.

FF'. *Les points* M *et* M' *sont donc correspondants dans une transformation quadratique involutoire, qui est le produit d'une symétrie par rapport à l'axe* FF' *et d'une inversion par rapport au cercle* O^2. Les formules de la transformation sont

$$x = c^2x' : (x'^2 + y'^2), \quad y = -c^2y' : (x'^2 + y'^2).$$

La correspondance entre les points M et M' étant réduite à une inversion, toutes les propositions de l'énoncé, et d'autres plus générales deviennent évidentes soit par l'analyse, soit par la géométrie pure.

3° En posant $MOF = \theta$, $OM = r$, l'équation de MM' est

$$x(r^2 + c^2)\sin\theta - y(r^2 - c^2)\cos\theta - r\,c^2\sin 2\theta = 0;$$

son enveloppe, si r est constant, est (voir Salmon, *Courbes Planes*, p. 100 de l'éd. franc.),

$$[(r^2 + c^2)^2x^2 + (r^2 - c^2)^2y^2 - 4c^4r^2]^3 = 27.4c^4r^2(r^4 - c^4)^2.x^2y^2.$$

4° Si M décrit une lemniscate de centre O, dont les axes ont une *direction arbitraire*, M' décrit l'hyperbole équilatère qui est l'inverse par rapport à O^2 de la lemniscate symétrique à la lemniscate donnée, par rapport à l'axe FF'.

5° Si M décrit une cubique circulaire ayant un point double en O, M' décrit une conique passant par O ; etc.

6° Si la cubique circulaire, décrite par M, a en ce point O un rebroussement, le lieu de M' est la parabole ; etc.

7° Si M décrit un limaçon (cardioïde), *dont l'axe a une direction quelconque*, et le point double réel en O, M' décrit une conique (parabole) ayant un (le) foyer en O; cette courbe est l'inverse, par rapport à O^2, du limaçon symétrique ; etc.

8° Si M décrit la podaire de O par rapport à *une courbe quelconque* C, M' décrit la courbe polaire réciproque (par rapport à O^2) de la courbe C' symétrique de C par rapport à l'axe FF'. En particulier, si C est la développée d'une conique centrale, le lieu de M' est une kreuzcurve (Voir ma définition de la kreuzcurve, *Mathesis*, 1894, p. 50).

9° Si M décrit *une courbe quelconque* C, M' décrit l'inverse, par rapport à O^2, de la courbe C' symétrique de C par rapport à FF'; c'est-à-dire la podaire, par rapport à O, de la polaire réciproque de C', par rapport à O^2.

Solution par M. Droz Farny. Soient x_0, y_0 et x_1, y_1, les coordonnées

des points M, M'; on voit facilement que les six sommets des deux triangles semi-conjugués MPQ et M'P'Q' appartiennent à une conique ayant pour équation

$$\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-1\right)\left(\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1\right)$$
$$-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}-1\right)=0.$$

Cette conique sera un cercle si

$$x_0x_1-y_0y_1=c^2,\quad x_0y_1+y_0x_1=0;$$

d'où

$$x_1=\frac{c^2x_0}{x_0^2+y_0^2},\quad y_1=-\frac{c^2y_0}{x_0^2+y_0^2}.$$

Il résulte d'abord de ces formules que les droites OM et OM' sont symétriquement disposées par rapport au grand axe de E.

On a

$$x_1^2+y_1^2=\frac{c^4}{x_0^2+y_0^2},$$

et, par conséquent,

$$OM.OM'=c^2.$$

Représentons par M_2 et M_2' les symétriques de M' respectivement par rapport au grand axe et au petit axe de E. Comme $OM'=OM_2=OM_2'$ on a d'abord :

$$OM.OM_2'=c^2=OF\ OF'.$$

1° Les quatre points M, M_2', F et F' sont sur une même circonférence ; M' étant symétrique de M_2' par rapport à un diamètre de cette circonférence, appartient aussi à cette courbe.

Comme M_2', M' est parallèle à FF', les droites MM_2' et MM' sont isogonales dans l'angle FMF' et comme MM_2' est médiane du triangle FMF', MM' en est la symédiane.

On peut remarquer que le quadrilatère MFM'F' est harmonique.

3° Comme $OM.OM_2'=c^2$, les lieux décrits par les points M et M_2' sont inverses l'un de l'autre, l'origine étant en O; de là le théorème :

Lorsque le point M *décrit une courbe quelconque,* M' *décrit la symétrique de son inverse par rapport au grand axe de l'ellipse,* O *étant le pôle et* c^2 *le module d'inversion.*

Les propriétés 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sont une conséquence immédiate de ce théorème, les deux courbes citées dans chacun de ces articles étant inverses l'une de l'autre.

D'après les propriétés bien connues des cercles de Chasles, en supposant OM > OM', si dans le 3° on pose $OM = \alpha + \beta$ et $OM' = \alpha - \beta$, le milieu μ de MM' décrit une ellipse dont les axes ont même direction que ceux de E et ayant respectivement 2α et 2β comme longueurs et MM' est normale en μ à cette ellipse.

Solution analogue par M. Barisien. Nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche de la reproduire en entier; qu'il nous suffise d'en extraire les remarques suivantes :

1° *Si le point* M *décrit une des diagonales du rectangle des axes de* E, *le cercle* MPQ *passe par* O; 2° *Si* M *décrit le cercle de diamètre* FF', M' *parcourt le même cercle;* 3° *Si* M *se meut sur une droite passant par* O, *les droites* PQ et P'Q' *se coupent sur une hyperbole fixe;* 4° *Si* S *est le point de Lemoine du triangle* MFF', *on a*

$$\operatorname{tg} SOF = \tfrac{1}{3} \operatorname{tg} MOF.$$

Question 1128.

(Voir *Mathesis*, (2), t. VII, p. 127).

Étant donnés dans un plan un pôle fixe o et un point-cercle a, faisons correspondre à un point variable p son conjugué p' par rapport au point-cercle, aligné avec o : si p décrit une droite h, le lieu de p' est une hyperbole, une parabole ou une ellipse, suivant que h coupe le cercle décrit sur le diamètre oa en deux points réels et distincts, coïncidants, ou imaginaires conjugués. (V. Retali.)

Solution par M. A. Droz-Farny. La polaire de p par rapport au cercle-point a, est la perpendiculaire ap' élevée en a sur ap. La droite op, d'après les conventions admises, coupera ap' au conjugué p' de p. Pour des positions variables de p, les couples de droites ap et ap' étant en involution, les deux faisceaux ap et ap' sont homographiques; les deux faisceaux op et ap étant perspectifs lorsque p décrit une droite h, il en résulte que les faisceaux ap' et op' sont homographiques. Le lieu des points p' est donc une conique passant par les points o et a.

La perpendiculaire élevée en a sur oa coupe h en π; les deux droites πa et πo sont les tangentes à la conique en a et o.

Le point p' se transporte à l'infini lorsque op' est parallèle à ap'; par

conséquent ap est perpendiculaire sur op', et p appartient à la circonférence décrite sur oa comme diamètre.

Le lieu est donc bien une hyperbole, une parabole ou une ellipse suivant que h coupe le cercle décrit sur le diamètre oa en deux points réels et distincts, coïncidants ou imaginaires conjugués.

Remarque. Le cercle-point a pouvant être considéré comme l'ensemble des droites isotropes passant par a, les points p et p' appartiennent à une correspondance birationnelle quadratique de deuxième espèce ; cas particulier de la transformation de Hirst (voir Cl. Servais, *Mathesis*, 1897, page 190(*).

Solution analogue par M. Buysens.

×Question 1125.

(Voir *Mathesis*, (2), VII, p. 150).

Si $xyz = abc = 1$, *le déterminant*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{xy(z-c)}{z+c} & -y & 1 \\ 1 & \dfrac{yz(x+a)}{x+a} & -z \\ -x & 1 & \dfrac{zx(y-b)}{y+b} \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(A. C.).}$$

Solution par M. J. Degueldre. Ajoutons à la première colonne, la seconde multipliée par x; à la seconde, la troisième multipliée par y; à la troisième, la première multipliée par z. Le déterminant sera multiplié par $1 + xyz$ et devient

$$\frac{8}{(x+a)(y+b)(z+c)} \begin{vmatrix} -cxy & 0 & z \\ x & -ayz & 0 \\ 0 & y & -bxz \end{vmatrix}$$

$$= \frac{8(-abcx^2y^2z^2 + xyz)}{(x+a)(y+b)(z+c)} = 0.$$

(*) La transformation dont il s'agit dans la question 1122, a été étudiée par MM. de Longchamps et d'Ocagne (Voir *Journal de Bourget*, 1882, p. 49; 1885, p. 15).

Note. Si l'on représente le déterminant proposé par $|\ \alpha\ \beta\ \gamma\ |$, le nouveau déterminant est

$$|\ \alpha+\beta x\quad \beta+\gamma y\quad \gamma+\alpha z\ |;$$

on peut le décomposer en huit déterminants, dont six sont nuls et dont les deux autres sont :

$$|\ \alpha\ \beta\ \gamma\ |\ +xyz\ |\ \beta\ \gamma\ \alpha\ |.$$

Solution par J. F. d'Avillez. Si l'on multiplie la première colonne par z, la seconde par x et la troisième par y, le déterminant, que nous représenterons par Δ, sera multiplié par $xyz = 1$, on aura donc

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{z-c}{z+c} & -yx & y \\ z & \dfrac{x-a}{x+a} & -zy \\ -xz & x & \dfrac{y-b}{y+b} \end{vmatrix}.$$

En développant on trouve

$$\Delta = \frac{(z-c)(x-a)(y-b)}{(z+c)(x+a)(y+b)} + \frac{x-a}{x+a} + \frac{y-b}{y+b} + \frac{z-c}{z+c}$$

ou

$$\Delta.(z+c)(x+a)(y+b)$$
$$= (z-c)(x-a)(y-b) + (x-a)(z+c)(y+b)$$
$$+ (y-b)(z+c)(x+a) + (z-c)(x+a)(y+b).$$

On vérifie aisément que le second membre est nul, donc aussi

$$\Delta = 0.$$

Solution par M. Déprez. Le développement du déterminant est

$$\frac{x^2y^2z^2(x-a)(y-b)(z-c)}{(x+a)(y+b)(z+c)} + \Sigma\frac{xyz(x-a)}{x+a} + 1 - xyz;$$

en tenant compte de l'hypothèse $xyz = 1$, on voit que la question revient à vérifier l'égalité

$$(x-a)(y-b)(z-c) + \Sigma(x-a)(y+b)(z+c) = 0,$$

sous la condition $xyz = abc = 1$; etc.

Question 1137.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 214).

On donne une ellipse de centre O ; *soient* F *l'un des foyers,* D *le pied de la directrice correspondante,* M *un point de la circonférence décrite sur* OD *comme diamètre,* B *et* C *les points de rencontre de l'ellipse avec la perpendiculaire élevée en* M *sur* FM. 1° *On a la relation*

$$\frac{1}{BF}+\frac{1}{CF}=\frac{2}{a}.$$

2° *Le pôle de* BC *par rapport à l'ellipse décrit une parabole passan par les extrémités du petit axe de l'ellipse et ayant pour sommet le point* F.

(Déprez).

Solution par MM. A. Droz-Farny et Barisien. I. Soit R le milieu de OD; on a d'abord

$$OD=\frac{a^2}{c},\ OF=c,\ RF=c-\frac{a^2}{2c}=\frac{2c^2-a^2}{2c},\ FD=OD-OF=\frac{b^2}{c}.$$

L'équation polaire de l'ellipse pour F comme pôle et FO comme axe est

$$\rho=\frac{b^2}{a-c\cos\varphi}. \qquad (1)$$

Soit FM = d une droite inclinée d'un angle α sur l'axe polaire; la perpendiculaire BC sur FM en M aura pour équation :

$$d=\rho\cos(\varphi-\alpha). \qquad (2)$$

En éliminant φ entre ces équations (1) et (2), on obtient une équation du 2^{me} degré en ρ dont les racines sont les longueurs FB et FC.

On déduit de (1)

$$\cos\varphi=\frac{\rho a-b^2}{\rho c},\quad \sin^2\varphi=\left[1-\frac{(\rho a-b^2)^2}{\rho^2c^2}\right].$$

Portons ces valeurs dans l'équation (2) écrite sous la forme

$$(d-\rho\cos\varphi\cos\alpha)^2=\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\alpha,$$

elle deviendra, après quelques transformations,

$$\rho^2(a^2-c^2\sin^2\alpha)-2\rho[ab^2+adc\cos\alpha]+c^2d^2+b^4+2dcb^2\cos\alpha=0. \qquad (3)$$

Or, l'équation polaire du cercle de diamètre OD étant

$$\frac{a^4}{4c^2}=\frac{(2c^2-a^2)^2}{4c^2}+d^2-\frac{d(2c^2-a^2)}{c}\cos\alpha,$$

on en déduit

$$cd\cos\alpha = \frac{c^2(b^2 - d^2)}{a^2 - 2c^2}.$$

Portant cette valeur dans l'équation (3) on trouve :

$$\rho^2(a^2 - c^2\sin^2\alpha) - 2\rho\frac{a(b^4 - d^2c^2)}{a^2 - 2c^2} + \frac{a^2(b^4 - d^2c^2)}{a^2 - 2c^2} = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{BF} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{a}.$$

II. L'enveloppe de BC est l'ellipse décrite sur OD comme grand axe et dont un des foyers est en F. Comme cette ellipse passe par O, sa polaire réciproque par rapport à l'ellipse primitive est une parabole dont le sommet est en F puisque F est le pôle de la tangente en D, directrice de l'ellipse primitive.

Le petit axe de l'ellipse OD ayant pour valeur

$$\sqrt{\frac{a^4}{4c^2} - \frac{(2c^2 - a^2)^2}{4c^2}} = b$$

il est dès lors évident que les tangentes aux extrémités du petit axe ont pour pôles respectifs les extrémités du petit axe de l'ellipse primitive, d'où le théorème.

Question 1152.

(Voir *Mathesis*, (2), VIII, p. 31).

Démontrer que l'équation

$$f(x) = 12x^5 - 7x^4 + x^2 - 3000 = 0$$

n'admet qu'une seule racine réelle positive. Trouver cette racine avec 6 décimales exactes. (H. Brocard).

Solution par M. Smout. Si on écrit l'équation

$$(x - 1)(12x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 6x + 6) - 2994 = 0$$

on voit : 1° que, pour toutes les valeurs de x, comprises entre 0 et 1, le premier membre est négatif ; 2° que, pour les valeurs de x supérieures à 1, le premier membre croît, sans interruption, de -2994 à $+\infty$. Il ne peut donc s'annuler qu'une seule fois.

Il n'y a donc qu'une seule racine réelle positive. On trouve, pour cette dernière, la valeur 3,141544, avec six décimales exactes.

Autres solutions par MM. LISTRAY et DEMANET.

NOTE. L'auteur de la question nous fait savoir qu'il a été amené à la proposer parce que l'unique racine réelle positive de l'équation considérée représente une valeur approchée de π.

×Question 1163.

(Voir *Mathesis*, (2), t. VIII, p. 79).

On considère deux cercles tangents en O *et dont les extrémités des diamètres passant par* O *sont* A *et* B. *Une sécante mobile passant par* O *rencontre le cercle* OA *en* A′ *et le cercle* OB *en* B′. *Le lieu du point de rencontre des droites* AB′ *et* BA′ *est un cercle.* (E. N. BARISIEN.)

Solution par MM. G. GÉRARD, GOUX, FRANÇOIS, ROMIEU, COLART et DROZ FARNY. Soient M le point d'intersection de AB′ avec BA′, D et D′ les points de rencontre de OM avec AA′ et BB′, C et C′ les centres des cercles OA, OB. M est le conjugué harmonique de O par rapport au segment DD′; par suite, si nous menons MS, MN parallèles à DC, DA jusqu'à la rencontre de OAB en S, N, ces points seront déterminés. Or, on sait que OM passe par le milieu de AA′, BB′; donc les angles CDA, C′D′B, et, par suite, SMN sont droits; donc le lieu de M est le cercle décrit sur SN comme diamètre.

REMARQUE. On peut généraliser la question précédente, en considérant deux cercles quelconques et menant les sécantes par l'un des centres de similitude. Le lieu complet se compose de quatre cercles. Même démonstration que plus haut.

Enfin, on peut énoncer une proposition tout à fait générale : Étant données deux courbes homothétiques d'ordre quelconque, si l'on joint en croix deux points homologues fixes quelconques à deux points homologues pris sur les courbes, le lieu du point d'intersection des droites ainsi obtenues est une courbe semblable aux proposées (GÉRARD).

Solution par M. RIPERT. Les équations des cercles OA et OB étant :

$$(C) \qquad x^2 + y^2 - 2ax = 0; \quad x^2 + y^2 - 2bx = 0 \qquad (C')$$

on trouve aisément pour l'équation du lieu demandé :

$$(a+b)^2(x^2+y^2) - 4ab(a+b)x + 3a^2b^2 = 0. \qquad (C'')$$

Le centre de C'' est le conjugué harmonique de O par rapport aux centres de C et C' et son rayon est la moyenne harmonique des rayons *a* et *b*.

Remarque. Le théorème de M. Barisien est un cas particulier du suivant :

Soient deux coniques C *et* C' *tangentes en* O *et se coupant aux deux points (réels ou imaginaires)* M *et* N. *Soient* K *et* K' *les pôles (situés avec* O *sur une droite d) de la droite* MN *par rapport à* C *et* C', *et* A, B *les secondes extrémités des cordes* OK, OK'. *Une sécante mobile passant par* O *rencontre respectivement* C *et* C' *en* A' *et* B'. *Le lieu du point de rencontre des droites* AB' *et* BA' *est une conique* C'', *passant par* M *et* N, *le pôle* K'' *de* MN *étant le conjugué harmonique de* O *par rapport à* K *et* K' *et le conjugué harmonique du point d'intersection de d et de* MN *par rapport aux points* E, E' *communs à d et à* C'', *la corde* EE' *étant le double de la moyenne harmonique de* OK *et* OK'.

Le théorème corrélatif est : *Soient deux coniques* C *et* C' *tangentes au même point à une droite* O *et ayant pour tangentes communes les droites m et n. Soient k et k' les polaires (concourant avec* O *en un point* D) *du point mn par rapport à* C *et* C', *et a, b les secondes tangentes passant par les points ok, ok'. D'un point mobile sur* O, *on mène à* C *et* C' *les secondes tangentes a', b'. L'enveloppe des droites de jonction des points ab' et ba' est une conique* C'', *tangente à m et n, la polaire k'' de mn étant la conjuguée harmonique de* O *par rapport à k et k' et la conjuguée harmonique de la droite de jonction de* D *et de mn par rapport aux tangentes e, e' menées de* D *à* C'', *l'angle* (*e*, *e'*) *étant la somme de deux angles moyens harmoniques* (*o*, *k*) *et* (*o*, *k'*).

Deux paraboles dont les diamètres sont parallèles étant des coniques tangentes au même point O de la droite *o* de l'infini, on peut trouver des cas particuliers intéressants.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS.

Composition de Mathématiques (7 juin 1898).

On considère une sphère (S) de rayon R, qui a pour centre l'origine d'un système de coordonnées rectangulaires, *Oxyz* ; et un paraboloïde (P) qui a pour plan directeur *xOy*, et pour directrices : 1° l'axe *Oz* ;

2° la droite AB définie par les points A et B dont les coordonnées x, y, z, sont respectivement (R, 0, R) et (a, b, c).

I. Former les équations de la sphère et du paraboloïde.

II. On prend un point M sur Oz, et les plans polaires $[\Sigma]$ et $[\Pi]$ de ce point par rapport aux surfaces (S) et (P). Trouver le lieu de l'intersection de ces deux plans, quand M décrit Oz; déterminer la partie du lieu qui est sur le paraboloïde (P).

III. En supposant AB à 45° sur Oz, et tangente à la sphère (S) au point B, dans le trièdre $Oxyz$, calculer les coordonnées (a, b, c) du point B en fonction de R; déterminer les génératrices du paraboloïde (P) qui sont tangentes à la sphère (S); calculer le nombre de centièmes de la cote c du point B, quand R est égal à 1.

On conservera les notations indiquées.

×QUESTIONS D'EXAMEN.

839. Résoudre le système

$$x^4 + y^4 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} = a, \quad x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = b.$$

On prend pour inconnues auxiliaires

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = u, \quad y^2 + \frac{1}{y^2} = v;$$

ce qui donne le système

$$u^2 + v^2 = a - 4, \quad u + v = b, \text{ etc,}$$

840. Si un polynôme symétrique en x et y est divisible par $x - y$, il est divisible par $(x - y)^2$.

Soit le polynôme $F(x, y) = (x - y) f(x, y)$; on a $F(y, x) = (y - x) f(y, x)$. Par hypothèse $F(x, y) = F(y, x)$; on en conclut $f(x, y) = -f(y, x)$, d'où $f(x, x) = -f(x, x)$, et par suite $f(x, x) = 0$, de sorte que $f(x, y)$ est divisible par $x - y$, etc.

Plus généralement, si le polynôme symétrique $F(x, y)$ est divisible par $(x - y)^{2n-1}$, il est aussi divisible par $(x - y)^{2n}$.

841. Vérifier que les expressions

$$(n+2)^2 - 2(n+1)^2 + n^2$$
$$(n+3)^3 - 3(n+2)^3 + 3(n+1)^3 - n^3$$
$$(n+4)^4 - 4(n+3)^4 + 6(n+2)^4 - 4(n+1)^4 + n^4$$
$$(n+5)^5 - 5(n+4)^5 + 10(n+3)^5 - 10(n+2)^5 + 5(n+1)^5 - n^5$$
$$(n+6)^6 - 6(n+5)^6 + 15(n+4)^6 - 15(n+3)^6 + 15(n+2)^6 - 6(n+1)^6 + n^6$$

sont constantes, quel que soit n, et ont respectivement pour valeurs 2, 6, 24, 120, 720. (E. N. Barisien.)

La question générale est traitée dans la *Théorie des différences*. (Voir, par exemple, Sturm, *Cours d'Analyse*).

842. On a dans un triangle rectiligne ABC

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}(\operatorname{cotg} B+\operatorname{cotg} C)+\frac{1}{b}(\operatorname{cotg} C+\operatorname{cotg} A)+\frac{1}{c}(\operatorname{cotg} A+\operatorname{cotg} B);$$

$$S=\frac{\operatorname{cotg} A+\operatorname{cotg} B+\operatorname{cotg} C}{\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h'^2}+\frac{1}{h''^2}}.$$

(Deguelbre).

843. Résoudre et discuter les systèmes

$$\begin{cases}\sin x=a\sin y,\\ \cos x=b\cos y.\end{cases}\qquad\begin{cases}\sin x=a\operatorname{tg} y,\\ \sin y=b\operatorname{tg} x.\end{cases}$$

$$\begin{cases}a\operatorname{tg} x+b\operatorname{tg} y=c,\\ a'\cot x+b'\cot y=c'.\end{cases}\qquad\begin{cases}a\cos x+b\cos y=c,\\ \sin x=m\sin y.\end{cases}$$

844. Trouver, pour $x=y$, les vraies valeurs des expressions

$$\frac{\sin^2 x-\sin^2 y}{\sin(x-y)},\quad\frac{\cos^2 x-\cos^2 y}{\sin\frac{1}{2}(x-y)},$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 y}{\operatorname{tg}(x-y)},\quad\frac{\sin^3 x-\sin^3 y}{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}.$$

845. Maximum ou minimum des expressions

$$\frac{x^2-ax+b^2}{x^2+ax-b^2},\quad\frac{x^2-ax}{x-b},\quad\frac{x^2-a^2}{ax-1}.$$

846. Si A', B', C' sont les pieds des hauteurs AA', BB', CC' d'un triangle ABC, on a la relation

$$AB.AC'+BC.BA'+CA.CB'=AB.BC'+BC.CA'+CA.AB'$$
$$=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

847. On porte sur le petit axe d'une ellipse, à partir du centre, des longueurs OM, OM' égales aux distances FP, F'P' des foyers à une même tangente. Démontrer que les droites AM, A'M' joignant les points aux extrémités A, A' du grand axe se coupent sur l'ellipse.

(Petit-Bois).

Cette proposition résulte immédiatement des suivantes : 1° le produit FP. F'P' $=b^2$; 2° deux cordes supplémentaires issues de A et A' déterminent sur le petit axe des couples de points en involution.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1172. On donne dans un même plan trois systèmes égaux F_1, F_2, F_3; A_3 est le point double de F_1, F_2; A_1 celui de F_2, F_3; A_2 celui de F_3, F_1; D_1, D_2, D_3 sont respectivement les points correspondants à A_1, A_2, A_3 dans les systèmes F_1, F_2, F_3. Si, pour chaque triple P_1, P_2, P_3 de points homologues, on détermine le centre P du cercle circonscrit, on obtient un quatrième système que nous appellerons Φ : cela posé, démontrer que chacun des systèmes F_1, F_2, F_3 est lié à Φ par une correspondance quadratique rationnelle (*Steiner'sche Verwandtschaft*) et étudier ces trois transformations. (RETALI).

1174. Soient E l'ellipse maximum circonscrite au triangle ABC, A_1, B_1, C_1, les points de Frégier de A, B, C (points de concours des hypoténuses des triangles rectangles inscrits dans E et ayant respectivement leurs sommets en A, B, C). Démontrer que

1° La circonférence circonscrite au triangle $A_1B_1C_1$ a pour diamètre HH_0 (H_0 réciproque de l'orthocentre H).

2° Les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont semblables et ont même centre de gravité.

3° Les points H_0 et H sont respectivement les points de Steiner et de Tarry du triangle $A_1B_1C_1$. (A. BOUTIN).

1175. Par le point d'intersection M de deux cercles donnée O et O', on mène deux sécantes rectangulaires qui coupent les deux circonférences respectivement en A et B, en A' et B'. Soient S, S' les conjugués harmoniques de M par rapport aux segments AB, A'B'. Trouver 1° le lieu des points S, S'; 2° le lieu du milieu de la distance SS'.

(E. N. BARISIEN).

×**1176.** On donne un triangle équilatéral de côté a. Des sommets du triangle comme centres, avec a pour rayon, l'on décrit trois circonférences A. On trace ensuite la circonférence circonscrite aux trois premières. On détermine ainsi trois groupes de trois figures égales à périmètre curviligne, dont on propose d'évaluer les surfaces.

NOTE. L'ensemble des lignes tracées est effectivement réalisé dans certains motifs d'ornementation. (H. BROCARD).

EXERCICES,

par M. E. N. Barisien(*).

1. D'un point M du plan d'une parabole de foyer F, on mène à la parabole les tangentes dont les points de contact sont T_1 et T_2 et on abaisse les normales dont les pieds sont N_1, N_2 et N_3.

Le lieu des points M tels que l'on ait la relation

$$FN_1 . FN_2 + FN_2 . FN_3 + FN_3 . FN_1 = FT_1 . FT_2$$

est une parabole ayant son sommet au foyer de la parabole donnée.

2. La corde du cercle osculateur d'une parabole, menée par le point d'osculation parallèlement à l'axe, est égale à quatre fois la distance du point d'osculation au foyer de la parabole.

Cette propriété se déduit immédiatement de l'abscisse $\alpha = 3x + p$ du centre du cercle osculateur; la corde considérée a pour longueur $2(\alpha - x)$.

3. On donne une ellipse E et une ellipse E', concentriques et de mêmes directions d'axes. Soit PQ une corde de E', polaire d'un point quelconque M de E. Montrer que : 1° la perpendiculaire abaissée de M sur PQ est normale à une ellipse fixe; 2° il existe une infinité d'ellipses E telles que la courbe lieu de la projection de M sur PQ soit une ellipse. L'une de ces ellipses E est le cercle orthoptique de l'ellipse E'.

4. On considère une ellipse de foyers F et F', dont les points de rebroussement de la développée sont α et α' sur le grand axe, β et β' sur le petit axe de sorte que $O\alpha = \frac{a^2}{c}$, $O\beta = \frac{b^2}{c}$. La normale en un point M variable de l'ellipse rencontre le grand axe en N et le petit axe en N_1. Soient : N' le conjugué harmonique de N par rapport à α et α'; N'_1 le conjugué harmonique de N_1 par rapport à β et β'. Montrer que : 1° la droite $N'N'_1$ est tangente à l'ellipse ayant pour sommets les points $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$; 2° la droite $N'N'_1$ passe par l'orthocentre du triangle MFF'.

5. Soit AB un diamètre fixe d'une circonférence donnée; on considère un point variable M sur cette circonférence et le symétrique M' de M

(*) Notre zélé collaborateur nous a adressé depuis trois ou quatre ans un très grand nombre de problèmes ou de théorèmes intéressants. Comme il nous est impossible de les utiliser tous sous forme de questions proposées, nous nous contentons d'en publier les énoncés en engageant nos lecteurs à en chercher les solutions. (*Rédaction*).

par rapport à AB. Trouver 1° l'enveloppe de la parabole inscrite dans le quadrilatère AMBM'; 2° l'enveloppe des deux paraboles circonscrites à ce quadrilatère; 3° l'enveloppe de l'hyperbole équilatère circonscrite à ce quadrilatère; 4° le lieu du centre de cette hyperbole.

6. Le lieu des points tels que le triangle formé par ce point et les extrémités de sa corde polaire par rapport à une ellipse donnée, ait son orthocentre sur l'ellipse, est une sextique.

7. Soient : M' le point où le cercle osculateur en M à une ellipse rencontre cette courbe; M'' le symétrique de M' par rapport au centre O l'ellipse. On considère le cercle tangent en M à l'ellipse et passant par le point M''. Montrer que le lieu du centre de ce cercle est une sextique dont l'aire est le tiers de l'aire de la développée de l'ellipse.

8. Trouver l'enveloppe de la droite

$$x\cos^n\alpha + y\sin^n\alpha = a$$

lorsque α varie et montrer que, dans les cas particuliers suivants, on a, pour $n = 1$, un cercle; $n = 2$, un point; $n = 3$, une kreuzcurve; $n = 4$, deux hyperboles équilatères; $n = 6$, deux quartiques; $n = \frac{4}{3}$, deux cubiques; $n = \frac{8}{3}$, deux sextiques.

9. On donne une ellipse E et une droite D. Soient M un point variable de D et PQ sa corde polaire par rapport à E. Le lieu de l'orthocentre du triangle MPQ est une cubique. 1° Etudier pour quelle position de la droite D, cette cubique se réduit à une conique; 2° Trouver l'enveloppe de la cubique, lorsque D se déplace parallèlement à elle-même ou passe par un point fixe. 3° Cas où la droite D est une directrice de E. 4° Étudier la même question en remplaçant l'ellipse E par une parabole P.

10. On donne une ellipse E de centre O, de sommets A et A' du grand axe et de sommets B et B' du petit axe. Soit M un point variable de E. On considère la parabole P_1 et l'hyperbole équilatère H_1 qui sont tangentes en A à MA et en A' à MA'; la parabole P_2 et l'hyperbole équilatère H_2 qui sont tangentes en B à MB et en B' à MB'. 1° Les paraboles P_1 et P_2 ont pour seule corde commune à distance finie une droite Δ qui passe par le milieu de OM. La parallèle menée par M à Δ est la corde d'intersection de l'ellipse E avec son cercle osculateur en M. 2° La droite Δ est aussi une corde commune des deux hyperboles H_1 et H_2.

11. Étant donnée une ligne droite AA′ dont le milieu est B, on considère les deux circonférences de diamètres respectifs AB et A′B. Soient C et C′ deux points pris l'un sur le cercle AB, l'autre sur le cercle A′B′, et symétriques par rapport à la tangente commune en B aux deux cercles; D et D′ les projections des points C, C′ sur AA′. Montrer que 1° le lieu du milieu de la distance entre les centres des cercles inscrits dans chacun des triangles CDA et C′D′B, est une ligne droite; 2° le lieu du centre des symédianes du triangle CDA est une courbe fermée dont l'aire est les $\frac{9}{32}$ de l'aire du cercle AB.

12. On considère une ellipse E et l'hyperbole équilatère H ayant pour sommets réels les foyers de E. D'un point M quelconque de H, on mène les tangentes à E, ayant leurs points de contact en P et Q. Le lieu du point de rencontre des normales à E en P et Q est une sextique ayant pour équation

$$(a^2y^2 + b^2x^2)^2 (x^2 - y^2) = c^2(b^2x^2 - a^2y^2)^2.$$

(*A continuer*).

SUR LES TRIANGLES HOMOLOGIQUES;

par M. J. Neuberg.

1. Soient

$$\left.\begin{aligned} l_1x + m_1y + n_1z &= 0, \\ l_2x + m_2y + n_2z &= 0, \\ l_3x + m_3y + n_3z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

les équations des côtés d'un triangle A′B′C′ homologique avec le triangle de référence ABC.

Les points de rencontre des côtés correspondants des deux triangles sont définis par les systèmes

$$\text{A}'' \left\{\begin{aligned} x &= 0, \\ m_1y + n_1z &= 0; \end{aligned}\right. \qquad \text{B}'' \left\{\begin{aligned} y &= 0; \\ n_2z + l_2x &= 0; \end{aligned}\right. \qquad \text{C}'' \left\{\begin{aligned} z &= 0; \\ l_3x + m_3y &= 0. \end{aligned}\right.$$

En exprimant qu'ils vérifient une même équation

$$lx + my + nz = 0,$$

on trouve

$$\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}, \quad \frac{n}{l} = \frac{n_2}{l_2}, \quad \frac{l}{m} = \frac{l_3}{m_3};$$

d'où la condition *nécessaire et suffisante* :

$$l_2 m_3 n_1 = l_3 m_1 n_2. \qquad (2)$$

Donc, si l'on avait $l_2 = m_1$, $m_1 = n_2$ (ce que l'on peut toujours obtenir en multipliant les équations (1) par des facteurs convenables), on aurait nécessairement $m_1 = l_3$. Donc, les côtés d'un triangle **A'B'C'** homologique avec le triangle de référence ABC peuvent être représentés par trois équations.

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 0, \end{aligned}$$

dont les coefficients sont les éléments d'un déterminant symétrique ($a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$) :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

L'axe d'homologie A''B''C'' a pour équation

$$\frac{x}{a_{23}} + \frac{y}{a_{31}} + \frac{z}{a_{12}} = 0.$$

2. Désignons par L_1, M_1, N_1,... les mineurs du déterminant

$$H = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}.$$

Des équations (1), on déduit les coordonnées des points :

$$A'\ldots \frac{x}{L_1} = \frac{y}{M_1} = \frac{z}{N_1};$$

$$B'\ldots \frac{x}{L_2} = \frac{y}{M_2} = \frac{z}{N_2},$$

$$C'\ldots \frac{x}{L_3} = \frac{y}{M_3} = \frac{z}{N_3}.$$

Les droites AA', BB', CC' ayant pour équations

$$\frac{y}{M_1} = \frac{z}{N_1}, \quad \frac{z}{N_2} = \frac{x}{L_2}, \quad \frac{x}{L_3} = \frac{y}{M_3},$$

la condition pour qu'elles concourent s'obtient en multipliant les équations précédentes membre à membre :

$$L_2M_3N_1 = L_3M_1N_2. \tag{3}$$

On en conclut qu'on peut représenter les coordonnées des sommets d'un triangle A'B'C' homologique avec le triangle de référence par les éléments d'un déterminant symétrique.

3. Les conditions (2) et (3), on le sait par la géométrie, sont équivalentes. Par conséquent, la quantité $L_2M_3N_1 - L_3M_1N_2$ qui est du 6e degré en $l_1, m_1, \ldots$ doit être divisible par la quantité $l_2m_3n_1 - l_3m_1n_2$, et le quotient est du 3e degré. Remarquons que si les droites (1) concourent, l'égalité (3) est vérifiée; car les droites joignant A, B, C aux points de concours des droites (1) prises deux à deux sont alors concourantes; donc $L_2M_3N_1 - L_3M_1N_2$ doit être divisible par H. Effectivement, on peut vérifier l'identité

$$L_2M_3N_1 - L_3M_1N_2 = (l_2m_3n_1 - l_3m_1n_2).H, \tag{4}$$

en faisant le produit des déterminants

$$\begin{vmatrix} 0 & n_1 & -m_1 \\ -n_2 & 0 & l_2 \\ m_3 & -l_3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}$$

dont le premier représente la quantité $l_2m_3n_1 - l_3m_1n_2$.

L'identité (4) met en évidence la propriété que l'existence d'un axe d'homologie entraîne celle d'un centre d'homologie et réciproquement, excepté dans le cas où l'un des triangles se réduit à un point(*).

4. Considérons une conique quelconque U, ayant pour équation

$$U \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx = 0,$$

et appelons A'B'C' le triangle formé par les polaires des sommets du triangle de référence. Ces polaires ont pour équations

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \text{ etc. ;}$$

comme les coefficients de ces équations sont les éléments d'un déterminant symétrique, les triangles ABC, A'B'C' sont homologiques; récipro-

(*) Ces développements sont inédits ou du moins peu connus. La démonstration analytique de l'identité (4) est peut-être nouvelle. On obtient deux autres identités analogues, en intervertissant deux indices. Ainsi

$$L_2M_1N_3 - L_1M_3N_2 = (l_2m_1n_3 - l_1m_3n_2)H.$$

quement, deux triangles homologiques sont polaires réciproques par rapport à une certaine conique U.

Les intersections des côtés non homologues des deux triangles sont six points d'une seconde conique U_1 ; car les côtés correspondants des deux triangles sont les côtés opposés d'un hexagone de Pascal. Soit

$$U_1 \equiv b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{12}xy + 2b_{23}yz + 2b_{31}zx = 0$$

l'équation de cette conique. Les points d'intersection de BC avec cette courbe ou avec les droites A'C', A'B' étant définis par l'une ou l'autre des équations

$$b_{22}y^2 + 2b_{23}yz + b_{33}z^2 = 0, \quad (a_{22}y + a_{23}z)(a_{32}y + a_{33}z) = 0,$$

on peut poser

$$b_{22} = a_{22}, \quad b_{33} = a_{33}, \quad 2b_{23} = a_{23} + \frac{a_{22}a_{33}}{a_{32}},$$

d'où l'on conclut

$$U_1 \equiv \Sigma a_{11}x^2 + \Sigma\left(a_{23} + \frac{a_{22}a_{33}}{a_{32}}\right)yz = 0.$$

5. On verrait d'une manière analogue que les droites joignant les sommets non homologues des deux triangles ABC, A'B'C' sont tangentes à une même conique ayant pour équation tangentielle

$$\Sigma A_{11}\lambda^2 + \Sigma\left(A_{23} + \frac{A_{22}A_{33}}{A_{32}}\right)\mu\nu = 0,$$

si l'équation tangentielle de u est

$$\Sigma A_{11}\lambda^2 + 2\Sigma A_{23}\mu\nu = 0.$$

Les points de rencontre de BC avec AB' et AC', de CA avec BA' et BC', de AB avec CA' et CB' appartiennent à la conique représentée par

$$\Sigma\frac{x^2}{A_{11}} - \Sigma\left(\frac{A_{23}}{A_{22}A_{33}} + \frac{1}{A_{23}}\right)yz = 0.$$

Enfin, les droites joignant les points A, B, C aux points où les côtés opposés du triangle ABC sont rencontrés par les côtés non homologues du triangle ABC, touchent la conique dont l'équation est

$$\Sigma\frac{\lambda^2}{a_{11}} - \Sigma\left(\frac{a_{23}}{a_{22}a_{33}} + \frac{1}{a_{23}}\right)\mu\nu = 0.$$

SUR UNE ÉQUATION DE PELL;

par M. A. BOUTIN.

Nous avons choisi l'équation

$$y^2 - 3x^2 = 1, \tag{1}$$

mais un certain nombre des formules qui suivent sont généralisables pour l'équation : $y^2 - ax^2 = 1$. Quant aux remarques numériques particulières à la valeur du coefficient a, elles présentent plus ou moins d'intérêt, suivant cette valeur de a.

L'équation (1) est complètement résolue par les suites :

$$x_0 = 0,\quad x_1 = 1,\quad x_2 = 4,\quad x_3 = 15, \ldots,\quad x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2},$$
$$y_0 = 1,\quad y_1 = 2,\quad y_2 = 7,\quad y_3 = 26, \ldots,\quad y_n = 4y_{n-1} - y_{n-2}.$$

On sait d'ailleurs que

$$x_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}},\quad y_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{2}. \tag{2}$$

De ces valeurs (2), on déduit immédiatement, soit directement, soit par un groupement convenable de termes, les séries :

$$x_n = 4^{n-1} - (n-2)\,4^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}\,4^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}\,4^{n-7} + \cdots$$

$$y_n = 2^{2n-1} - n.2^{2n-5} + \frac{n(n-3)}{1.2}\,2^{2n-9} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}\,2^{2n-13} + \cdots;$$

pour m impair (au signe près) :

$$y_m = 2m - 2^3\frac{m(m^2-1)}{1.2.3} + 2^5\frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{1.2\,3.4.5} - \cdots,$$

$$x_m = 1 - 2^2\frac{m^2-1}{1.2} + 2^4\frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4} - \cdots;$$

$$y_m = 2 + 2.3\frac{m^2-1}{1.2} + 2.3^2\frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4} + \frac{2.3^3(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{1.2.3.4.5.6} + \cdots,$$

$$x_m = m + 3\frac{m(m^2-1)}{1.2.3} + 3^2\frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5} + 3^3\frac{m(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{1.2.3.4.5.6.7} + \cdots;$$

pour m pair (au signe près) :

$$y_m = 1 - 2^2\frac{m^2}{1.2} + 2^4\frac{m^2(m^2-4)}{1.2.3.4} - 2^6\frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4.5.6} + \cdots,$$

$$x_m = 2m - 2^3\frac{m(m^2-4)}{1.2.3} + 2^5\frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4.5} - \cdots;$$

$$y_m = 1 + 3\frac{m^2}{1.2} + 3^2\frac{m^2(m^2-4)}{1.2.3.4} + 3^3\frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4.5.6} + \cdots,$$

$$x_m = m + 3\frac{m(m^2-4)}{1.2.3} + 3^2\frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4.5} + \cdots$$

On peut obtenir d'autres développements en série de la manière suivante : considérons l'équation :

$$y^2 - (m^2-1)x^2 = 1$$

dont la proposée n'est qu'un cas particulier pour $m = 2$. Cette équation est résolue par les suites :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2m, \ldots, x_n = 2mx_{n-1} - x_{n-2}$$

$$y_0 = 1, \quad y_1 = m, \quad y_2 = 2m^2 - 1, \ldots, y_n = 2my_{n-1} - y_{n-2}$$

x_n et y_n sont donc des polynomes entiers en m. Ces polynomes, considérés comme fonctions de m, satisfont aux équations différentielles du second ordre :

$$(m^2-1)\frac{d^2x_n}{dm^2} + 3m\frac{dx_n}{dm} - (n^2-1)x_n = 0,$$

$$(m^2-1)\frac{d^2y_n}{dm^2} + m\frac{dy_n}{dm} - n^2y_n = 0.$$

Développant x_n et y_n suivant les puissances croissantes ou décroissantes de m, et profitant des équations différentielles précédentes pour déterminer les coefficients inconnus, on obtient, pour $m = 2$, des séries nouvelles, en particulier :

$$x_n = n.2^{n-1} + 3.2^{n-3}\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + 3^2.2^{n-5}\frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{1.2.3.4.5} + \cdots$$

$$x_n = \frac{n}{1} + \frac{n(n^2-1)}{1.1.3} + \frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{1.2.1.3.5} + \frac{n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{1.2\,3.1.3.5.7} + \cdots$$

$$y_n = 1 + n^2 + \frac{n^2(n^2-1)}{1.2.1.3} + \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{1.2.3.1.3.5} + \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{1.2.3.4.1.3.5.7} + \cdots$$

Les formules (2) permettent de vérifier les identités :

$$y_n = 2x_n - x_{n-1}$$
$$x_n^2 = x_{n-1}x_{n+1} + 1.$$
$$y_n^2 = y_{n-1}y_{n+1} - 3$$

d'où l'on déduit les suites numériques :

$$2 - \sqrt{3} = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.15} + \cdots + \frac{1}{x_n x_{n+1}} + \cdots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.7} + \frac{1}{7.26} + \cdots + \frac{1}{y_n y_{n+1}} + \cdots,$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{6} = \frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.19} + \frac{1}{19.71} + \cdots + \frac{1}{(x_{n-1} + x_n)(x_n + x_{n+1})} + \cdots$$

Les mêmes formules (2) donnent :

$$y_{2n} = 6x_n^2 + 1, \quad y_{2n+1} = (x_n + x_{n+1})^2 + 1.$$

Ces égalités montrent que y_n ne saurait être un carré, car les racines de $y^2 = 6x^2 + 1$ sont différentes de celles de la proposée, et par suite l'équation

$$y^4 = 1 + 3x^2$$

est impossible en nombres entiers.

La suite des nombres x ne comprend aucun nombre premier, car x_{2n} est divisible par 4 et par x_n ; et x_{2n+1} admet la décomposition :

$$x_{2n+1} = (x_n + y_n)(x_n + x_{n+1}).$$

Enfin, les formules de récurrence permettent de vérifier les identités :

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n - 1),$$

$$x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + \cdots + x_{2n} = \frac{1}{6}(x_{2n+1} + x_{2n} - 1),$$

$$x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + \cdots - x_{2n+1} = -\frac{1}{6}(x_{2n+2} + x_{2n+1} + 1),$$

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \frac{x_n y_{n+1} - n}{6},$$

$$y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_n = \frac{1}{2}(y_{n+1} - y_n + 1),$$

$$y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = \frac{1}{2}(x_n y_{n+1} + n + 2).$$

BIBLIOGRAPHIE.

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik von MORITZ CANTOR. Dritter (Schluss) Band. Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1758. Dritte Abteilung. Die Zeit von 1727 bis 1758. Mit 70 Figuren im Text. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1898 (Grand in-8°, de XIV et 421 pages). Prix : 12 marcs.

M. Cantor vient d'achever le grand ouvrage sur l'histoire des mathématiques dont il a commencé la publication en 1880, et dont le tome premier a eu une seconde édition en 1894. Il est inutile de faire l'éloge d'un livre que le nom de son auteur recommande suffisamment et qui a été le point de départ d'une foule de recherches historiques depuis dix-huit ans. Qu'il nous suffise de dire ici que c'est grâce à ce livre que l'enseignement de l'histoire de la science mathématique peut être organisé d'une manière sérieuse et régulière dans les Universités où, comme en Belgique, il fait partie obligatoire du programme du Doctorat. Avant la publication de la *Geschichte der Mathematik* de M. Cantor, il manquait un guide sûr aussi bien aux professeurs qu'aux élèves : un bien petit nombre des maîtres eux-mêmes avaient une idée exacte du développement historique des mathématiques avant l'époque moderne Il n'en est plus ainsi aujourd'hui. Les *Vorlesungen* du savant et consciencieux professeur de Heidelberg sont et seront pour longtemps, dans toutes les universités, la base d'un enseignement sérieusement historique des mathématiques, d'autant plus que l'auteur, autrefois si hardiment aventureux dans le maniement des hypothèses, lorsqu'il écrivait ses *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker*, est devenu de plus en plus prudent, de plus en plus objectif, à mesure qu'il avançait dans la publication de son œuvre capitale.

Mathesis a analysé sommairement au fur et à mesure de leur publication les diverses parties des *Vorlesungen* [1882, II, pp. 11-15, (Tome I); 1892, XII, pp. 19-20 (Tome II, 1re section); 1893, XIII, p. 16 (Tome II, 2e section); 1894, XIV, pp. 136-137 (Tome III, 1re section; tome I, 2e édition); 1890, XVI, pp. 68 (Tome III, 2e section)].

Voici de même un rapide aperçu des sujets abordés dans la troisième section du tome III, qui va de la mort de Newton (1727), aux premières publications de Lagrange (1758). Dans ce quart de siècle, c'est Euler, qui est le géomètre inventeur par excellence. Aussi M. Cantor analyse-t-il ses principaux ouvrages avec son exactitude et sa clarté habituelles, en en rapprochant les travaux contemporains.

Préface. M. Cantor indique les difficultés que l'on rencontrera inévitablement quand on voudra faire l'histoire moderne des mathématiques et il nomme parmi ceux qui pourraient l'entreprendre avec lui, Fr. Engel, Fr. W. Meyer, F. Rudio, P. Stäckel. Ensuite il signale pour les deux sections précédentes du tome III, diverses corrections et additions dont il est redevable à MM. Cajori, Enestrom, Gibson, Schwering, Sonine, Sturm, Tischer et Zeuthen.

Ch. 101. Histoire des mathématiques (Heilbronner, Weidler, Wolf, Frobes,

Stockhausen, Montucla, Doppelmayr, etc.). Editions des classiques (Cramer, Castillon, Simson). Dictionnaires (Moxon, Ozanam, Stone, Saverien, d'Alembert). 102. Le calcul, surtout en Allemagne. 103. Traités de géométrie élémentaire (Varignon, Wolf, De la Chapelle, Th. Simson, Malezieu). Théorie des parallèles : Saccheri. 104. Recherches spéciales de mathématiques élémentaires (Simson, Stewart, Dufay, Naudé, Euler, etc.). 105. L'algèbre jusque 1745 (Maclaurin, Campbell, Reyneau, Euler, Kästner, de Gua). 106. L'algèbre après 1745 (Euler, d'Alembert, Fontaine, Maclaurin, König, Cramer, Segner). 107. Théorie des nombres (Euler surtout). 108. Théorie des combinaisons, Calcul des probabilités (Euler, de Mairan, Nicole, Moivre, Daniel Bernoulli, Buffon, Th. Simpson, Jean Bernoulli, Süssmilch, Kerseboom, Maclaurin, d'Alembert). 109-110. Séries (Goldbach, Moivre, Stirling, Euler, Maclaurin, les analystes japonais, Simpson, Nicolas I Bernoulli, Daniel Bernoulli). 111. Le tome 1er de l'Introduction à l'analyse des infiniment petits d'Euler. 112. Les séries, de 1749 à 1754. Les principes du calcul différentiel (Euler, Kühn, d'Alembert, Berkeley, Maclaurin, etc.). 113. Le calcul différentiel d'Euler. 114. La géométrie analytique jusque 1740 (Grandi, Maupertuis, Nicole, de Bragelongne, Clairaut, Braikenridge, De Gua). 115. La géométrie analytique, 1740-1748. Maclaurin. Le tome II de l'Introduction d'Euler. 116. La géométrie analytique, 1748-1756 (Euler, Maria Agnesi). Cramer (Krafft, Jacquier, du Séjour, Goudin). 117. Maxima et minima. La *Methodus inveniendi* etc. d'Euler. 118. Intégrales définies. Equations différentielles (Euler, Maclaurin, d'Alembert, Hermann, J. Bernoulli, Goldbach, Nicolas II Bernoulli, Fontaine, Clairaut, D. Bernoulli, etc.). (P. M.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

×**13.** ***Sur les triangles orthogonalement circonscrits à un triangle donné*** ABC. — On mène les droites GF, FE, EG respectivement perpendiculaires en B sur BC, en C sur CA, en A sur AB; ensuite les droites G'F', F'E', E'G' respectivement perpendiculaires en C sur BC, en A sur CA en B sur AB. On forme ainsi les triangles EFG et E'F'G' orthogonalement circonscrits à ABC.

Les côtés parallèles de ces triangles, savoir FG et F'G', FE et F'E', EF et E'F' étant symétriques par rapport au centre O du cercle circonscrit au triangle ABC, les triangles eux-mêmes sont symétriques par rapport à O; il en résulte que les droites EE', FF', GG' passent par O et y sont divisées en deux parties égales.

Soient A', B', C' les intersections des côtés EF et E'G', EG et G'F',

FG et F'E'; ces points sont les symétriques de A, B, C par rapport à O.

Il est facile de trouver le rapport de similitude des triangles ABC et EFG. En effet

$$BF = BC \cot C, \quad BG = \frac{AB}{\sin B} = \frac{BC \sin C}{\sin A \sin B} = BC (\cot A + \cot B);$$

d'où

$$\frac{FB}{BG} = \cot A + \cot B + \cot C = \cot V,$$

V étant l'angle de Brocard.

Par conséquent,

$$EFB = ABC. \cot^2 V = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{4ABC}.$$

O est le point de Lemoine des triangles EFG, E'F'G'. Car les points A', B', C', A, B, C étant sur une même circonférence, les droites CC' et AB' (ou F'G') sont antiparallèles par rapport à l'angle E'F'G'. On en conclut que CC', AA', BB' sont les antiparallèles menées par O dans les angles du triangle E'F'G'; comme O est leur milieu commun, il coïncide avec le centre des médianes antiparallèles du triangle E'F'G'.

Les côtés des deux triangles EFG, E'F'G' enveloppent une conique de centre O; leurs points de contact sont les pieds des hauteurs de ces triangles.

Ces diverses propriétés sont dues à MM. Lemoine et Brocard. Il n'était peut-être pas inutile de les rappeler(*).

On peut aussi observer que les côtés du triangle ABC sont rencontrés par les côtés non homologues des deux triangles EFG et E'F'G' en six points d'une même conique.

14. *Cissoïde et strophoïde.* On donne une circonférence et un diamètre fixe AB. Soit P un point variable de la courbe. La perpendiculaire en A à AP et la perpendiculaire abaissée de P sur AB se coupent en C.

Le point C décrit une cissoïde et le milieu M de PC une strophoïde.

Ce théorème, facile à démontrer, est peut-être nouveau.

(Droz Farny).

(*) Un de nos jeunes lecteurs, les croyant nouvelles, nous les avait transmises comme questions à proposer.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Question 1076.

(Voir *Mathesis*, (2), VI, p. 192).

On considère une ellipse E *et une cercle* Σ. *D'un point quelconque* M *de* Σ *on mène à* E *les tangentes dont les points de contact sont* P *et* Q. *Le cercle circonscrit au triangle* MPQ *rencontre l'ellipse en deux autres points* P' *et* Q'; *les tangentes à* E *en* P' *et* Q' *se rencontrent en* M'.

1° *Le lieu de* M' *est en général un cercle lorsque le point* M *se déplace sur* Σ.

2° *Si* Σ *passe par le centre de* E, *le lieu de* M' *est une droite.*

3° *Réciproquement, si le point* M *au lieu de parcourir le cercle* Σ *décrit une droite s, le lieu de* M' *est un cercle passant par le centre de* E.

4° *En général le point* M' *est situé sur le cercle circonscrit au triangle* MPQ. (E. N. Barisien).

Solution par M. Cl. Servais. La question proposée est un corollaire du théorème suivant dû à M. Deprez (*Mathesis*, (2), II, p. 255).

Les points M *et* M' *et les points de contact des tangentes menées par* M *et* M' *à une conique donnée peuvent être situés sur une même circonférence; cela arrive lorsque le symétrique de* M' *par rapport à l'axe focal de la conique est l'inverse de* M *par rapport au cercle décrit sur la distance des foyers comme diamètre.*

Si la courbe donnée est une parabole, la même condition exige que M *et* M' *soient symétriques par rapport au foyer.*

Nous allons établir géométriquement cette intéressante propriété.

1. Conique a centre. D'après un théorème connu, les six points M, P, Q, M', P', Q' sont sur une conique qui, dans le cas actuel, est un cercle. Les cordes PQ, P'Q' sont également inclinées sur les axes de E et leurs diamètres conjugués OM et OM' jouissent de la même propriété.

(*) Nous avons oublié de mentionner de bonnes solutions de la question 1141 par M. François, des questions 1125, 1134 et 1136 par M. Bogdan Jonesco.

Par suite, si le point M décrit le diamètre OM, le point M′ décrit le diamètre OM′.

A un point M correspond d'ailleurs un point déterminé M′ et réciproquement, les ponctuelles engendrées par ces points sont donc projectives. Le centre O de la conique E est un point-limite sur chacune de ces ponctuelles, ce qui montre que le produit OM. OM′ a une valeur constante si le point M se déplace sur OM. Pour déterminer cette valeur, nous supposerons le point M sur le cercle de Monge de la conique E. Le centre du cercle circonscrit au triangle MPQ est alors le milieu du segment PQ. La droite MM′ qui est la polaire par rapport au cercle MPQ et à la conique E, du point commun aux droites PQ et P′Q′, est dans notre hypothèse, perpendiculaire à PQ. Les droites conjuguées normales PQ et MM′ rencontrent donc l'axe focal de E, en deux points K et H tels que

$$OK.\ OH = c^2$$

$2c$ étant la distance focale.

Mais $$OM.\ OM' = OH.\ OK';$$

par conséquent c^2 est la valeur du produit OM. OM′, ce qui établit la propriété énoncée.

Remarque. Si le point M est sur la conique E, le cercle MPQ devient le cercle décrit sur le rayon de courbure en ce point comme diamètre. Par suite : *Le pôle de la seconde corde d'intersection d'une conique* E *avec la circonférence ayant pour diamètre le rayon de courbure en un point variable* M *de cette conique* E, *décrit la courbe inverse de* E *par rapport à son centre ; la puissance d'inversion est égale au carré de la demi-distance focale.*

II. Parabole. Si le point M est sur l'axe de la parabole, le centre de la circonférence MPQ est le foyer et le point M′ est le symétrique de M par rapport au foyer. Si le point M est sur la directrice, le centre de la circonférence MPQ est le milieu du segment PQ, et la droite MM′ qui est la polaire par rapport au cercle et à la parabole, du point commun aux droites PQ et P′Q′, est perpendiculaire à la droite PQ et passe par le foyer. Le point M′ est donc encore le symétrique de M par rapport au foyer, si le point M a une position quelconque dans le plan de la parabole. Les diamètres conjugués m et m' des cordes PQ et P′Q′ également

inclinées sur l'axe sont équidistants de cet axe. Par suite, si le point M décrit une ponctuelle sur m, le point M′ décrit une ponctuelle projective sur m'. Ces ponctuelles sont projetées du foyer suivant deux faisceaux projectifs, ayant trois rayons doubles : l'axe de la parabole et les deux droites joignant le foyer, aux points où les diamètres m et m' coupent la directrice. Le foyer est donc le centre de perspective des ponctuelles m et m', et on a la propriété :

Si deux points M *et* M′ *sont symétriques par rapport au foyer d'une parabole, les points de contact des tangentes issues de ces points, sont sur un cercle passant par* M *et* M′.

Corollaire. *Si* P *et* Q *sont les points de contact des tangentes menées d'un point* M *à une parabole, la droite joignant le foyer* F *au centre du cercle circonscrit au triangle* MPQ, *est perpendiculaire à la droite* MF.

Si l'on suppose le point M sur la parabole, on obtient une propriété bien connue :

Le pôle de la seconde corde d'intersection d'une parabole E, *avec la circonférence ayant pour diamètre le rayon de courbure en un point variable* M *de cette conique, décrit la parabole symétrique de* E *par rapport à son foyer.*

III. Quadriques. Deux sections planes d'une quadrique s sont situées sur une quadrique s', passant par les pôles M et M′ des plans de ces sections. Si la quadrique s' est une sphère, les sections considérées seront nécessairement des cercles, et les points M et M′ seront sur les diamètres conjugués des sections circulaires. Le plan principal contenant ces diamètres coupera s' suivant un cercle passant par M et M′ et les points de contact des tangentes menées de M et M′ à la section principale. Donc (I, II) le produit OM.OM′ est égal au carré de la demi distance focale de cette section principale, ou dans le cas du paraboloïde elliptique, M et M′ sont symétriques par rapport au foyer de cette section.

Solution analogue par MM. Duporcq et Soons; solutions analytiques par MM. Dépréz, Gillet, Droz Farny et Francq.

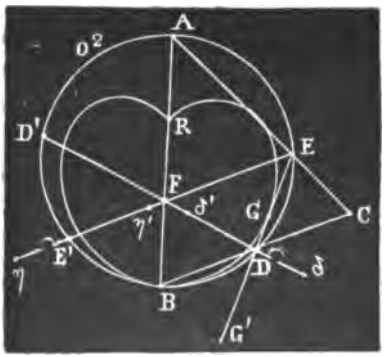
La question 1076 est comprise, si l'on veut, dans la question 1119 (voir *Mathesis*, p. 139); elles se complètent l'une l'autre.

Question 1111.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 80 et 102).

Dans un triangle isoscèle ABC, *le côté* AB *est fixe et sa base* BC *tourne autour de* B. *Démontrer que deux côtés du triangle orthique de* ABC *enveloppent une même hypocycloïde de Steiner, et que le troisième côté enveloppe une cardioïde.* (Droz Farny).

Solution par M. V. Retali. Soient AD, BE, CF les hauteurs et D', E' les intersections ultérieures de DF, EF avec le cercle O^2 décrit sur AB comme diamètre. On a évidemment arc BD = DE, arc BD' = — 2BD, arc BE = — 2BE' : si le point D parcourt le cercle O^2 d'un mouvement uniforme avec la vitesse v, les vitesses des points D' et E' sont égales à — $2v$ et celle du point E est $2v$. L'enveloppe des droites DD', EE' est donc, d'après un théorème de Cremona,(*) l'hypocycloïde de Steiner, ayant un sommet au point B, et tritangente au cercle O^2.



Quant à l'enveloppe de la droite DE, appelant r le rayon du cercle O^2, on obtient une cardioïde par le roulement d'un cercle ayant le rayon $\frac{1}{3}r$ sur un cercle égal, concentrique à O^2; elle a son sommet en B, et son rebroussement (réel) en un point R tel que $AR = \frac{2}{3}r$. En prenant sur DE le point G tel que $DG = \frac{1}{3}DE$, G est le point de contact de la droite DE avec son enveloppe. Le lieu du point G', conjugué harmonique de G par rapport aux points D et E, est la développante de notre cardioïde. De même, si $D\partial = -DD'$, $E'\eta = -E'E$, les points ∂ et η(**) sont respectivement les points de contact des droites DF et FE avec l'hypocycloïde de Steiner; et le lieu du conjugué harmonique de ∂ par

---

(*) Si deux rayons OD, OD' d'un cercle O^2 tournent simultanément autour du centre O, dans un sens opposé et avec des vitesses v et $-2v$, l'enveloppe de la corde DD' est une hypocycloïde de Steiner (Cremona, *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements*, Crelle, t. 64, page 106).

(**) Ces points ne sont pas sur la figure à la distance indiquée.

rapport à DD' (de η par rapport à EE') est la développante de la même courbe.

Il n'est pas difficile de démontrer le théorème général suivant : lorsque sur un cercle O^2 deux points P et P' sont en mouvement avec des vitesses constantes dont le rapport est k, l'enveloppe de la droite PP' est une épicycloïde ou une hypocycloïde, suivant que k est $>$ ou <0. Si R est le rayon du cercle fixe, R' celui du cercle mobile et r celui de O^2, nous avons

$$R = \frac{r(1-k)}{(1+k)}, \quad R' = \frac{kr}{1+k}.$$

Le cercle O^2 contient les sommets de l'épicycloïde et de l'hypocycloïde. On obtient le point qui décrit l'épicycloïde (l'hypocycloïde) en divisant intérieurement (extérieurement) le segment PP' dans le rapport k : 1. Si $k = -\frac{1}{2}$, nous avons $R = 3r$, $R' = -r$ et l'on tombe sur le théorème de Cremona; si $k = \frac{1}{2}$, $R = R' = \frac{1}{2}r$, on obtient la cardioïde, etc.

M. Dépez a résolu la même question et fait observer que les bissectrices de l'angle C du triangle ABC et le rayon du cercle circonscrit issu de C enveloppent des épicycloïdes.

M. Barisien nous communique, au sujet de la même figure, les remarques suivantes : Soient A', B', C', les pieds des hauteurs du triangle ABC. 1° Le lieu du milieu de A'C' est une ellipse. 2° Le lieu du milieu de B'C' est une quartique unicursale ayant pour aire $\frac{1}{4}\pi$. 3° Le lieu du milieu de A'B' est une courbe unicursale fermée ayant pour aire $\frac{3}{32}\pi$.

Question 1142.

(Voir *Mathesis*, (2), VII, p. 238).

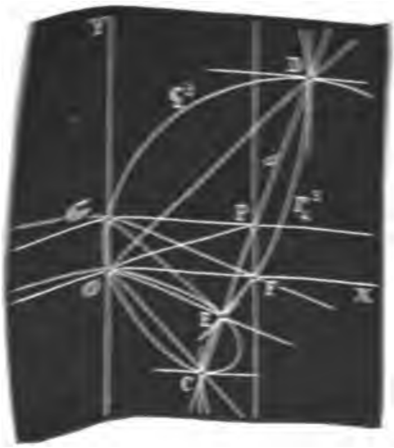
On donne deux droites rectangulaires OAX, OBY *et un point* P, *par lequel on mène une sécante* PAB. *Trouver le lieu des foyers de l'ellipse tangente en* A *et* B *aux deux droites fixes et admettant ces mêmes points pour sommets.* (H. Brocard).

Solution par M. Retali. Les cercles A^2 et B^2 passant par O et ayant les centres A et B(*), coupent les droites b et a, menées par B et A parallèlement aux axes, en des points du lieu cherché. Les cercles A^2 forment

---

(*) Ces points ne sont pas marqués sur la figure.

[illegible] faisceau [illegible] au faisceau de rayons parallèles Y^{∞} [illegible] et le [illegible] des points [illegible] est [illegible] une cubique circulaire C^3_4 qui passe par Y^{∞} [illegible] à la droite de l'infini, considérée comme



rayon du faisceau Y^{∞}, correspond le cercle ayant pour centre la projection F de P sur l'axe OX : *les tangentes à* C^3_4 *aux points circulaires à l'infini se coupent au point* F, *foyer simple*. Au rayon mené par P et coupant OY au point G, correspond le cercle dégénéré formé par l'axe OY et la droite à l'infini, par suite C^3_4 *passe par* G *et son asymptote réelle est la droite* PG. Les points de contact des tangentes menées à C^3_4 par son point Y^{∞} sont les symétriques de O par rapport aux parallèles menées par P aux bissectrices des angles des axes : nous les appelons C et D, ils sont évidemment symétriques par rapport à P et, comme ils sont *conjugués*, la droite qui les unit coupe la courbe en un troisième point E dont le tangentiel est G; les points E et X^{∞} étant un deuxième couple de points conjugués sur la cubique, *les tangentes au point double sont les rayons doubles de l'involution* (OC, OD; OE, OX).

De même, le lieu des points (B^2a) est une deuxième cubique circulaire Γ^3_4 ayant un point double en O, passant par les points C, D, E, F et le point à l'infini Y^{∞} de OY, l'asymptote réelle est PF, les tangentes aux points C et D sont parallèles à OY, le foyer double est G, les tangentes au point double sont les rayons doubles de l'involution (OC, OD; OE, OY), le tangentiel de E est F.

Les deux cubiques C^3_4, Γ^3_4 *se coupent orthogonalement aux trois points* C, D, E, *sur une droite s*. On voit aisément que *s* est la perpendiculaire menée par P à la droite FG, et que E est symétrique de P par rapport à FG, enfin OE est perpendiculaire à *s*.

On trouve aisément ces résultats aussi par l'analyse : si les coordonnées de P sont *a* et *b*, nous avons pour équations des deux cubiques :

$$(C^3_4) \cdots (y-b)(x^2+y^2) - 2axy = 0,$$

$$(\Gamma^3_4) \cdots (x-a)(x^2+y^2) - 2bxy = 0.$$

Les équations paramétriques sont

$$(C_4^3)\cdots x=\frac{bt^2+2at+b}{t(1+t^2)},\quad y=\frac{bt^2+2at+b}{1+t^2};$$

$$(\Gamma_4^3)\cdots x=\frac{at^2+2bt+a}{1+t^2},\quad y=\frac{t(at^2+2bt+a)}{1+t^2};$$

les couples des tangentes au point double sont respectivement

$$by=(-a\pm\sqrt{a^2-b^2})x,$$
$$ay=(-b\pm\sqrt{b^2-a^2})x;$$

l'équation de la corde commune s est

$$ax-by=a^2-b^2;$$

les points C, D, E ont respectivement pour paramètres $-1, +1, -\frac{b}{a}$, et leurs coordonnées sont

$$(a-b,\ b-a),\quad (a+b,\ a+b),\quad \left(\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2},\ \frac{b(b^2-a^2)}{a^2+b^2}\right).$$

Lorsque P tombe sur la bissectrice OD de l'angle XOY, les deux cubiques deviennent cuspidales, elles ont l'autre bissectrice pour tangente cuspidale commune et sont symétriques l'un de l'autre par rapport à OP.

Solution par MM. Barisien, Soons, Colart et Déprez. Construisons le rectangle AOBC; C est le centre de l'ellipse, et les demi-axes sont $CB = OA = a$, $CA = OB = b$.

Soient (α,β) les coordonnées de P, (x,y) celles du foyer F; si $OA > OB$, on a

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}=1,\quad x=a\pm\sqrt{a^2-b^2},\quad y=b.$$

En éliminant a et b on obtient pour le lieu

$$(y-\beta)(x^2+y^2)-2\alpha xy=0.$$

Si $a < b$, l'équation du lieu est

$$(x-\alpha)(x^2+y^2)-2\beta xy=0.$$

Remarques. 1° Le centre C et les deux autres sommets de l'ellipse variable se meuvent sur des hyperboles équilatères.

(Barisien, Déprez).

2° Le cercle de Monge (cercle AOB) enveloppe une podaire d'hyperbole équilatère par rapport à O. (Déprez).

×Question 1145.

(Voir *Mathesis*, (2), VII, p. 262).

Soit ABCD *un quadrilatère gauche dans lequel les angles* A *et* B *sont égaux de même que les angles* C *et* D. *Démontrer* : 1° *que* AD = BC, AC = BD ; 2° *que la droite joignant le milieu des côtés* AB *et* CD *est perpendiculaire à ces côtés* ; 3° *que la plus courte distance des côtés* AD *et* BC *est équidistante des sommets* A *et* B.

Le figure ABCD *peut être appelée un trapèze isoscèle gauche.* (MUIRHEAD).

Solution d'après MM. DÉPREZ *et* MAES(*). La question 1145 est la réciproque de la proposition suivante : Si un quadrilatère gauche ABCD a un axe de symétrie, c'est-à-dire si la droite joignant les milieux M, N des côtés opposés AB, CD est perpendiculaire à ces côtés, les angles A et B sont égaux, de même que les angles C et D, et l'on a AD = BC, AC = BD. Celle-ci résulte immédiatement de ce qu'une rotation de 180° autour de MN fait coïncider ADCB avec BCDA.

Pour résoudre la question proposée, soient M, N les milieux des côtés AB, CD. Construisons les parallélogrammes NDAP, NCBQ ; les droites AP et QB seront égales et parallèles, donc la droite PQ passera par M et PM = MA.

Les deux trièdres APDM, BQCM sont égaux comme ayant leurs trois faces égales chacune à chacune et semblablement disposées ; par suite, les arêtes AD et BC sont également inclinées sur le plan APQB des faces opposées. La même propriété appartenant à leurs parallèles NP et NQ, on a, NP = NQ, d'où AD = BC. Il est maintenant facile de voir que les deux figures APMDN, BQMCN sont superposables ; donc les angles AMN et BMN, DNM et CNM sont égaux et MN est la perpendiculaire commune aux côtés AB et CB. Enfin, une rotation de 180° autour de MN faisant coïncider ADCB avec BCDA, la perpendiculaire commune à DA et BC reprend sa position primitive ; donc elle s'appuie sur l'axe MN et est équidistante des points A et B.

(*) Nous modifions légèrement les constructions auxiliaires employées par nos honorables collaborateurs. (J. N.)

×Question 1146.

(Voir *Mathesis*, (2) VII, p. 262).

Dans un triangle ABC, *avec les notations ordinaires, on pose*

$$\delta = 4R + r, \quad \delta_a = 4R - r_a, \ldots$$

Démontrer que

$$a\delta + br_a + cr_b = b\delta + cr_a + ar_c = c\delta + ar_b + br_a = 2p(2R + r);$$
$$a\delta_a + br_b + cr_c = b\delta_a - cr - ar_b = c\delta_a - ar_c - br = 2(p - a)(2R - r_a)$$

On a deux autres groupes analogues contenant δ_b *et* δ_c.

(E. Lemoine).

Solution par MM. Déprez, G. Delahaye, Rose (Nivelles) et Plakhovo. Vérifions l'égalité

$$a\delta + br_a + cr_b = 2p(2R + r). \qquad (1)$$

Comme on a

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r,$$

la formule (1) revient à

$$a(r_a + r_b + r_c) + br_a + cr_b = p(r + r_a + r_b + r_c),$$

ou

$$r_a(p - a) + rp = r_b(p - b) + r_c(p - c);$$

ce qui est une identité, car $S = pr = (p - a)r_a \ldots$

On démontre de même les autres formules du premier groupe.

2. Soit à vérifier l'égalité

$$-a\delta_a + br_b + cr_c = 2(p - a)(2R - r_a).$$

Mettons-la sous la forme équivalente

$$-a(r_b + r_c - r) + br_a + cr_a = (p - a)(r_b + r_c - r_a - r),$$

ou

$$r_b(p - b) + r_c(p - c) = r_a(p - a)r + rp, \text{ etc.}$$

On démontre de même les autres relations.

×Question 1164.

(Voir *Mathesis* (2), VIII, p. 79).

On mène par les sommets A, B, C *d'un triangle équilatéral* ABC *trois droites passant par un même point* M *et faisant avec les côtés opposés les angles* α, β, γ: *Démontrer la relation*

$$\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)=0.$$

(Stanham).

Quelle est la relation analogue dans un triangle rectiligne ou sphérique quelconque?

Solutions par MM. Goux (Louvain) et François (La Haye). Considérons le cas d'un triangle rectiligne quelconque. D'après un théorème connu

$$\frac{\sin MAB}{\sin MAC}\,\frac{\sin MBC}{\sin MBA}\,\frac{\sin MCA}{\sin MCB}=1;$$

donc

$$\frac{\sin(\alpha-B)\sin(\beta-C)\sin(\gamma-A)}{\sin(\alpha+C)\sin(\beta+A)\sin(\gamma+B)}=1.$$

Transformons les produits de sinus au moyen de la relation connue

$$4\sin\lambda\sin\mu\sin\nu=\sin(\lambda+\mu-\nu)+\sin(\lambda-\mu+\nu)+\sin(-\lambda+\mu+\nu)-\sin(\lambda+\mu+\nu);$$

Il vient

$$\sin(\alpha+\beta-\gamma+2A)+\sin(\beta+\gamma-\alpha+2B)+\sin(\gamma+\alpha-\beta+2C)-\sin(\alpha+\beta-\gamma-2B)-\sin(\beta+\gamma-\alpha-2C)-\sin(\gamma+\alpha-\beta-2A)=0.$$

Réunissons le premier et le quatrième terme, le deuxième et le cinquième, le troisième et le sixième pour transformer les différences ainsi obtenues en produits. Nous aurons

$$\sin C\cos(\alpha+\beta-\gamma+A-B)+\sin A\cos(\beta+\gamma-\alpha+B-C)+\sin B\cos(\gamma+\alpha-B+C-A)=0.$$

En combinant autrement les termes, on obtient l'égalité

$$\sin(\beta-\gamma+2A)\cos 2\alpha+\sin(\gamma-\alpha+2B)\cos 2\beta+\sin(\alpha-\beta+2C)\cos 2\gamma=0.$$

Il resterait encore à résoudre la question pour un triangle sphérique; mais la relation cherchée est, probablement, assez compliquée.

QUESTIONS D'EXAMEN.

348. Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) quatre points de l'hyperbole équilatère $xy = 1$, tels que l'un d'eux soit l'orthocentre du triangle formé par les trois autres (groupe orthocentrique).

Démontrer les relations

$$x_1x_2x_3x_4 = -1, \quad y_1y_2y_3y_4 = -1,$$

et en déduire la solution du problème suivant : Construire un quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$, connaissant les orthocentres H_1, H_2, H_3, H_4 des quatre triangles $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$.

L'hyperbole équilatère passant par les points A_1, A_2, A_3, A_4 passe également par les points H_1, H_2, H_3, H_4. Cette courbe est donc connue, et si (x'_1, y'_1),... désignent les coordonnées de H_1,... et (x_1, y_1) ... celles de A_1,..., on a

$$x_1x_2x_3x'_4 = -1, \; x_2x_3x_4x'_1 = -1, \; x_3x_4x_1x'_2 = -1, \text{ etc.}$$

d'où l'on tire

$$\frac{x_1}{x'_1} = \frac{x_2}{x'_2} = \frac{x_3}{x'_3} = \frac{x_4}{x'_4} = -x_1x_2x_3x_4 = -\frac{1}{\sqrt[3]{x'_1x'_2x'_3x'_4}}. \qquad \text{(J. N.)}$$

349. Une parabole étant représentée par les formules

$$x = 2p \operatorname{tg}^2 \varphi, \quad y = 2p \operatorname{tg} \varphi,$$

trouver la condition pour que quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 de la parabole soient sur une même circonférence.

En exprimant que les droites A_1A_2, A_3A_4 ont des directions symétriques par rapport à l'axe des x, on trouve

$$\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2 + \operatorname{tg} \varphi_3 + \operatorname{tg} \varphi_4 = 0.$$

On a aussi $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$, relation qu'on peut expliquer à priori : les diamètres des cordes A_1A_2, A_3A_4 sont symétriques par rapport à l'axe des x.

350. Trouver la condition pour que quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 d'une hyperbole équilatère ($xy = 1$) soient sur une même circonférence.

En désignant un déterminant par sa première ligne, on a

$$| x_1^2 + y_1^2, \quad x_1, \quad y_1, \quad 1 | = 0$$

ou

$$| x_1^2 + 1, \quad x_1^2, \quad x_1, \quad x_1^2 | = 0,$$

ou, en décomposant le déterminant en deux autres,

$$| 1 - x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 | \times | x_1^2 \; x_1^2 \; x_1 \; 1 | = 0;$$

d'où l'on conclut

$$x_1\,x_2\,x_3\,x_4 = 1, \quad y_1\,y_2\,y_3\,y_4 = 1.$$

De ces relations, on peut déduire que A_4 est diamétralement opposé à l'orthocentre H_4 du triangle $A_1\,A_2\,A_3$, propriété qui résulte aussi de ce que le centre O de l'hyperbole est sur la circonférence des neuf points de $A_1\,A_2\,A_3$, et que H_4 est le centre de similitude externe de cette circonférence et de la circonférence $A_1\,A_2\,A_3$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1177. Trouver les points de contact des tangentes, perpendiculaires à l'axe polaire, menées à une courbe ayant pour équation polaire

$$r = f(\theta).$$

Application aux spirales représentées par les équations :

$r = a\theta$ (spirale d'Archimède); $r = \dfrac{a}{\theta}$ (spirale hyperbolique);

$r = ae^{m\theta}$ (spirale logarithmique); $r^2 = 2\dfrac{a^2}{\theta}$ (spirale polaire);

$r = a\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ (cochléoïde); $r = \dfrac{2}{e^{a\theta} + e^{-a\theta}}$ (spirale de Poinsot);

$r^2 = a^2\theta$ (spirale parabolique de Fermat). (H. Brocard).

×1178. Mettre l'expression

$$\frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin(x-b_1)\sin(x-b_2)\ldots\sin(x-b_n)}$$

sous la forme

$$M + M_1\cot(x-b_1) + M_2\cot(x-b_2)\ldots + M_n\cot(x-b_n),$$

les coefficients M, M_1, ... M_n ayant des valeurs indépendantes de x.

1179. Soit M un point variable situé sur une ellipse E donnée. Si Δ et Δ' sont les deux droites symétriques du grand et du petit axe de E par rapport à la tangente en M, le rapport des aires des courbes enveloppes de chacune des droites Δ et Δ' est équivalent au rapport du petit axe au grand axe de E. (E. N. Barisien).

1180. Soient M, N les points de contact des tangentes d'un point P à une ellipse donnée. Trouver le lieu du point P tel que la droite d'Euler du triangle PMN soit parallèle à un axe de symétrie de l'ellipse.

(Déprez).

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DU POINT SIMPLE D'UNE COURBE GAUCHE;

par M. F. Chomé, professeur à l'École militaire.

1. Si nous considérons un point simple A d'une courbe plane l, la tangente AT et la normale AN au point A, il pourra se présenter quatre cas :

1° Ou bien, la tangente et la normale traversent toutes deux la courbe au point A (fig. 1) et celui-ci est appelé *point d'inflexion*;

2° Ou bien, la normale seule traverse la courbe au point A (fig. 2) et celui-ci est appelé *point ordinaire*;

3° Ou bien, la tangente seule traverse la courbe au point A (fig. 3) et celui-ci est appelé *point de rebroussement de première espèce* ;

4° Ou bien, ni la tangente ni la normale ne traversent la courbe au point A (fig. 4) et celui-ci est appelé *point de rebroussement de seconde espèce.*

On sait que tout point autre qu'un point ordinaire est dit *singulier.*

2. Nous allons étudier d'une façon analogue le point simple d'une courbe gauche; mais comme en Géométrie descriptive, on ne dessine que des courbes planes, projections des courbes de l'espace, nous examinerons aussi comment se présentent ces projections, pour les différentes figures que peut présenter une courbe gauche, aux environs d'un point simple pris sur cette courbe.

3. Rappelons d'abord ce théorème connu :

Si l'on projette une courbe l (fig. 5) sur un plan π, *polairement ou cylindriquement, la tangente* AT *en un point* A *de la courbe l se projette sur le plan* π *suivant une droite* A'T' *tangente à la projection l' de la courbe l, au point* A', *projection du point* A, *sauf si la tangente* AT *est une projetante. Dans ce dernier cas (fig. 6), la tangente à la projection l' de la courbe l est la trace, sur le plan* π, *du plan osculateur de la courbe l au point* A.

4. Considérons maintenant un point simple A d'une courbe gauche l, le plan osculateur ω, le plan normal ν et un plan tangent quelconque τ, différent du plan osculateur.

Il pourra se présenter huit circonstances :

Ou bien, les trois plans ω, ν et τ traversent la courbe l au point A;

Ou bien, deux seulement de ces trois plans traversent la courbe au

point A, et ces deux plans pourront être les plans ω et ν, ou les plans ν et τ, ou les plans ω et τ;

Ou bien, un seul des plans ω, ν et τ traversera la courbe l au point A, et ce plan sera ou le plan ω, ou le plan ν, ou le plan τ;

Ou bien, aucun des trois plans considérés ne traversera la courbe au point A.

5. Nous allons, dans chacun de ces huit cas, chercher la projection de la courbe sur un plan π sécant par rapport à la tangente au point A, en supposant successivement :

a) Que le centre de projection soit au point A;

b) Que le centre de projection soit sur la tangente au point A, mais distinct du point A;

c) Que le centre de projection soit un point quelconque du plan osculateur ω au point A, mais en dehors de la tangente AA';

d) Que le centre de projection soit un point quelconque situé hors du plan osculateur ω au point A et hors du plan mené par A, parallèlement au plan de projection π.

6. Nous supposerons que le plan osculateur ω soit le plan du dessin et que AA' soit la tangente à la courbe au point A (fig. 7 à 54). Représentons le plan normal ν au point A et les intersections A'O et A'T du plan osculateur ω et d'un plan tangent quelconque τ, avec un plan π différent du plan osculateur et du plan tangent. Nous considérerons la courbe aux environs du point A et nous dessinerons chacune des deux branches qui se joignent au point A en un trait plein ou ponctué suivant que la branche considérée est en avant ou en arrière du plan osculateur.

7. I. Dans le cas où les trois plans ω, ν et τ traversent la courbe au point A, cette courbe se présentera, aux environs du point A, comme dans les figures 7 et 8 et le point A ne porte pas de nom spécial; nous proposons de l'appeler *point ordinaire de première espèce* (n° 18).

Il est facile de voir que :

a) Si le point A est pris comme centre de projection, la projection A' du point A (fig. 9) est un *point de rebroussement de seconde espèce* ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur (n° 3);

b) Si nous choisissons un centre de projection différent du point A sur la tangente AA', la projection A' du point A (fig. 10) est un *point d'inflexion* ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur;

c) Si nous choisissons un centre de projection en dehorsde la tangente AA', dans le plan osculateur, la projection A' du point A (fig. 11) est un *point d'inflexion* ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur;

d) Si nous choisissons un centre de projection en dehorsdu plan osculateur ω et qui ne soit pas dans le plan mené par le point A, parallèlement au plan π, la projection A' du point A (fig. 12) est un *point d'inflexion* ayant pour tangente la projection A'T de la tangente au point A.

8. II. Dans le cas où les plans ω et ν traversent seuls la courbe au point A, cette courbe se présentera, aux environs du point A, comme l'indiquent les figures 13 et 14 et le point A porte le nom de *point ordinaire*; nous proposons de l'appeler *point ordinaire de seconde espèce* (n° 18).

Il est facile de voir qu'en prenant le centre de projection dans chacune des positions choisies au numéro précédent et indiquées au numéro 5, on trouvera successivement pour projection A' du point A :

a) Un *point ordinaire* (fig. 15), ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur;

b) Un *point de rebroussement de première espèce* (fig. 16) ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur;

c) Un *point d'inflexion* (fig. 17) ayant pour tangente, la trace A'O du plan osculateur;

d) Un *point ordinaire* (fig. 18) ayant pour tangente la projection A'T de la tangente au point A.

9. III. Dans le cas où les plans ν et τ traversent seuls la courbe au point A, cette courbe se présentera, aux environs du point A, comme l'indiquent les figures 19 et 20 et le point A porte le nom de *point d'inflexion*; nous proposons de l'appeler *point d'inflexion de première espèce* (n° 18).

Il est facile de voir qu'en prenant le centre de projection dans chacune des positions indiquées au numéro 5, on trouvera successivement pour projection A' du point A :

a) Un *point de rebroussement de première espèce* (fig. 21) ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur ;

b) Un *point ordinaire* (fig. 22) ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur;

c) Un *point ordinaire* (fig. 23) ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur;

d) Un *point d'inflexion* (fig. 24) ayant pour tangente la projection A'T de la tangente au point A.

10. IV. Dans le cas où les plans ω et τ traversent seuls la courbe au point A, cette courbe se présentera aux environs du point A comme dans les figures 25 et 26 et le point A porte le nom de *point de rebroussement* ; nous proposons de l'appeler *point de rebroussement ordinaire de première espèce* (n° 18).

Il est facile de voir qu'en prenant le centre de projection dans chacune des positions indiquées au numéro 5, on trouvera successivement pour projection A' du point A :

a) Un *point d'inflexion* (fig. 27) ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur;

b) Un *point d'inflexion* (fig. 28) ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur;

c) Un *point de rebroussement de première espèce* (fig. 29) ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur;

d) Un *point de rebroussement de première espèce* (fig. 30) ayant pour tangente la projection A'T de la tangente au point A.

11. V. Dans le cas où le plan ω traverse seul la courbe au point A, cette courbe se présentera, aux environs du point A, comme l'indiquent les figures 31 et 32, et le point A porte le nom de *point de rebroussement*; nous proposons de l'appeler *point de rebroussement ordinaire de seconde espèce* (n° 18).

Il est facile de voir qu'en prenant le centre de projection dans chacune des positions indiquées au numéro 5, on trouvera successivement pour projection A' du point A :

a) Un *point de rebroussement de première espèce* (fig. 33) ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur;

b) Un *point de rebroussement de première espèce* (fig. 34) ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur;

c) Un *point de rebroussement de première espèce* (fig. 35) ayant pour tangente la trace A'O du plan osculateur;

d) Un *point de rebroussement de seconde espèce* (fig. 36) ayant pour tangente la projection A'T de la tangente au point A.

12. VI. Dans le cas où le plan normal ν traverse seul la courbe au point A, cette courbe se présentera, aux environs du point A, comme

l'indiquent les figures 37 et 38 et le point A ne porte pas de nom spécial; nous proposons de l'appeler *point d'inflexion de seconde espèce* (n° 18).

Il est facile de voir qu'en prenant le centre de projection dans chacune des positions indiquées au numéro 5, on trouvera successivement pour projection A′ du point A :

a) Un *point d'inflexion* (fig. 39) ayant pour tangente la trace A′O du plan osculateur,

b) Un *point de rebroussement de seconde espèce* (fig. 40) ayant pour tangente la trace A′O du plan osculateur,

c) Un *point ordinaire* (fig. 41) ayant pour tangente la trace A′O du plan osculateur,

d) Un *point ordinaire* (fig. 42) ayant pour tangente la projection A′T de la tangente au point A.

13. VII. Dans le cas où le plan tangent τ traverse seul la courbe au point A, cette courbe se présentera aux environs du point A comme l'indiquent les figures 43 et 44, et le point A porte le nom de *point de rebroussement*; nous proposons de l'appeler *point de rebroussement infléchi de première espèce* (n° 18).

Il est facile de voir qu'en prenant le centre de projection dans chacune des positions indiquées au numéro 5, on trouvera successivement pour projection A′ du point A :

a) Un *point ordinaire* (fig. 45) ayant pour tangente la trace A′O du plan osculateur,

b) Un *point ordinaire* (fig. 46) ayant pour tangente la trace A′O du plan osculateur,

c) Un *point de rebroussement de seconde espèce* (fig. 47) ayant pour tangente la trace A′O du plan osculateur,

d) Un *point de rebroussement de première espèce* (fig. 48) ayant pour tangente la projection A′T de la tangente au point A.

14. VIII. Dans le cas où aucun des trois plans ω, ν et τ ne traverse la courbe, au point A, cette courbe se présentera, aux environs du point A, comme l'indiquent les figures 49 et 50 et le point A porte le nom de *point de rebroussement;* nous proposons de l'appeler *point de rebroussement infléchi de seconde espèce* (n° 18).

Il est facile de voir qu'en prenant le centre de projection dans chacune

des positions indiquées au numéro 5, on trouvera successivement pour projection A′ du point A :

a) Un *point de rebroussement de seconde espèce* (fig. 51) ayant pour tangente la trace A′0 du plan osculateur;

b) Un *point de rebroussement de seconde espèce* (fig. 52) ayant pour tangente la trace A′0 du plan osculateur;

c) Un *point de rebroussement de seconde espèce* (fig. 53) ayant pour tangente la trace A′0 du plan osculateur;

d) Un *point de rebroussement de seconde espèce* (fig. 54) ayant pour tangente la projection A′T de la tangente au point A.

15. Remarque I. On voit aisément, dans l'examen que nous venons de faire du point simple d'une courbe gauche, que si *un* plan tangent, différent du plan osculateur, traverse ou ne traverse pas la courbe en un point A, *tout* plan tangent, différent du plan osculateur, traverse ou ne traverse pas la courbe au point considéré.

16. Remarque II. Les résultats que nous avons obtenus, lorsque le centre de projection n'est pas au point A considéré sur la courbe, seront les mêmes, si, au lieu de projections Polaires, on considère des projections cylindriques.

17. Remarque III. Pour bien montrer les résultats obtenus dans les numéros 7 à 15, nous les groupons dans un tableau, à la page suivante, et inscrivons, en caractères italiques, les noms que nous avons proposés pour compléter la technologie du point simple d'une courbe gauche (n° 18).

18. Technologie du point simple d'une courbe gauche. Nous avons vu que seuls, le *point ordinaire* (n° 8), le *point d'inflexion* (n° 9) et le *point de rebroussement* (n^{os} 10, 11, 13 et 14) portent un nom spécial, et encore le nom *point de rebroussement* convient à quatre points différents l'un de l'autre, mais ayant comme caractère commun, celui de correspondre à un plan normal ν ne traversant pas la courbe au point considéré.

Pour compléter la technologie relative au point simple d'une courbe gauche, classons d'abord les huit points trouvés en deux catégories, l'une caractérisée par ce fait que le plan normal ν *traverse* la courbe et comprenant les points 1, 2, 3, 6; l'autre caractérisée par ce fait que le plan normal ν *ne traverse pas* la courbe, et comprenant les points 4, 5, 7, 8,

Point simple d'une courbe gauche.

	Indication de ceux des plans ω, ν, τ qui traversent la courbe au point A.							
	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°
	ω, ν, τ	ω ν	ν τ	ω τ	ω	ν	τ	Aucun.
NOM DU POINT A DANS L'ESPACE. — *Les noms en caractères italiques sont ceux que nous proposons pour compléter la technologie du point simple d'une courbe gauche.* . . .	POINT ORD. *de 1re esp.*	POINT ORD. *de 2de esp.*	POINT D'INFL. *de 1re espèce.*	POINT DE REB. *ord. de 1re esp.*	POINT DE RRB. *ord. de 2de esp.*	POINT *d'inflexion de 2de esp.*	POINT DE REB. *infl. de 1re esp.*	POINT DE REB. *infl. de 2de esp.*
Nom du point A', projection du point A. — *a*] Le centre de projection est au point A	Point de rebr. de 2de espèce.	Point ordinaire.	Point de rebr. de 1re espèce.	Point d'inflexion	Point de rebr. de 1re espèce.	Point d'inflexion	Point ordinaire.	Point de rebr. de 2de espèce.
b] Le centre de projection est différent du point A, sur la tangente AA' . .	d'inflexion	de rebr. de 1re espèce.	ordinaire.	d'inflexion	de rebr. de 1re espèce.	de rebr. de 2de espèce.	ordinaire.	de rebr. de 2de espèce.
c] Le centre de projection est dans le plan osculateur au point A, hors de la tangente AA' . . .	d'inflexion	d'inflexion	ordinaire.	de rebr. de 1re espèce.	de rebr. de 1re espèce.	ordinaire.	de rebr. de 2de espèce.	de rebr. de 2de espèce.
d] Le centre de projection est hors du plan osculateur	d'inflexion	ordinaire.	d'inflexion	de rebr. de 1re espèce.	de rebr. de 2de espèce.	ordinaire.	de rebr. de 1re espèce.	de rebr. de 2de espèce.

c'est-à-dire tous les points de rebroussement. Ensuite, dans chaque catégorie, qualifions de :

Point ordinaire, le point pour lequel le plan osculateur ω traverse la courbe;

Point d'inflexion, le point pour lequel le plan osculateur ω ne traverse pas la courbe ;

Point de première espèce, le point pour lequel le plan tangent τ traverse la courbe;

Point de seconde espèce, le point pour lequel le plan tangent τ ne traverse pas la courbe;

D'après cela, les points 1, 2, 3 et 6 de la première catégorie seront appelés respectivement, comme nous l'avons proposé :

Point ordinaire de première espèce (n° 7),

Point ordinaire de seconde espèce (n° 8),

Point d'inflexion de première espèce (n° 9),

Point d'inflexion de seconde espèce (n° 12);

et les points 4, 5, 7 et 8 de la seconde catégorie seront appelés respectivement, comme nous l'avons proposé :

Point de rebroussement ordinaire de première espèce (n° 10),

Point de rebroussement ordinaire de seconde espèce (n° 11),

Point de rebroussement infléchi de première espèce (n° 13),

Point de rebroussement infléchi de seconde espèce (n° 14).

19. DÉTERMINATION, DANS L'ESPACE, DU POINT SIMPLE D'UNE COURBE GAUCHE, CONNAISSANT DEUX PROJECTIONS DE CE POINT. — Nous avons examiné tous les cas qui peuvent se présenter pour un point simple d'une courbe gauche et dans chacun de ces cas nous avons considéré quatre projections. Si nous prenons les projections dans deux quelconques des quatre hypothèses que nous avons faites, on remarquera que pour chacun des huit points simples que l'on peut considérer dans l'espace, le groupe des deux projections choisies est essentiellement distinct de celui qu'on obtient pour chacun des autres points; nous pouvons donc, réciproquement, déterminer, sans ambiguïté, la qualité du point de l'espace, connaissant deux projections de ce point pour deux des quatre hypothèses considérées.

Ainsi par exemple, si nous prenons successivement le centre de projection au point A et en un point quelconque hors du plan osculateur au

point A, et que nous trouvions pour projection A′ du point A, *deux points ordinaires*, il est certain que le point A lui-même est un *point ordinaire* que nous avons appelé *point ordinaire de seconde espèce* (voir le tableau du n° 17).

29. Nous pensons qu'il serait utile d'établir une théorie analytique du point simple d'une courbe gauche, en prenant pour base la classification géométrique donnée dans cette note.

EXERCICES;

par M. E. N. Barisien (*Suite*, voir p. 153).

13. On considère une ellipse de centre O et un point M variable sur l'ellipse. La perpendiculaire élevée en O sur OM rencontre la tangente et la normale en M respectivement en T et en N.

1° Le lieu du point T est une kreuzcurve;

2° Le lieu du point N est une sextique;

3° Soient E l'aire de l'ellipse, U l'aire de la kreuzcurve comprise entre la courbe et ses asymptotes, U′ l'aire de la sextique. On a la la relation

$$2UU' = E^2.$$

14. Soient M un point variable d'une ellipse donnée, M′ le point diamétralement opposé à M, N la projection de M′ sur la tangente en M et Q la projection de N sur MM′. Les aires des courbes, lieux des points N et Q, ont pour expressions

$$\pi ab + \frac{4\pi ab\,(a-b)}{a+b}, \quad \pi ab - \frac{4\pi a^2b^2\,(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^3}.$$

Soient ε, η, σ les aires de l'ellipse donnée, de la courbe (N) et de la podaire (P) du centre O de l'ellipse, P étant la projection de O sur MN. Les droites MN, MP en roulant sur l'ellipse engendrent des aires quadruples l'une de l'autre. On en conclut

$$\eta - \varepsilon = 4\,(\sigma - \varepsilon), \text{ d'où } \eta = 4\sigma - 3\varepsilon = \pi ab + 2\pi\,(a-b)^2,$$

résultat différent de celui de M. Barisien. (J. N.)

15. On considère une ellipse E de demi-axes a et b, et le cercle C concentrique à E, de rayon $\sqrt{2(a^2+b^2)}$. D'un point quelconque M de C on mène les tangentes à E qui touchent E en P et Q. On projette le

centre O de E en H sur PQ, et le point M en I sur PQ. Montrer que les courbes lieux des points I et H ont même aire

$$\frac{\pi (a^4 + b^4)}{4 (a^2 + b^2)}.$$

La corde PQ touche son enveloppe au milieu N du segment HI. Cette propriété suffit pour établir que les points H et I engendrent des aires égales. L'expression de ces aires s'obtient en ajoutant à l'aire de l'ellipse engendrée par le point N celle d'une courbe dont le rayon vecteur (émanant d'un point fixe) est égal et parallèle à la droite NH. Appelons ω l'inclinaison de PQ sur Ox, et α l'angle de OM avec PQ; la dernière aire s'exprime par $\frac{1}{8}\int \overline{OM}^2 \cos^3 \alpha d\omega$. (J. N.)

16. On considère une ellipse E de centre O, et une ellipse E_1, concentrique et homothétique à E, E_1 étant extérieure à E. D'un point M quelconque situé sur E_1, on mène à E les deux tangentes dont les points de contact sont P et Q. Soient H et I les projections des points O et M sur PQ. Montrer que les aires des courbes lieu de H et lieu de I ne sont équivalentes que si le rapport d'homothétie entre les ellipses E_1 et E, est égal à $\sqrt{2}$.

La droite PQ touche son enveloppe en son milieu N ; les aires engendrées par les segments NH et NI sont proportionnelles aux carrés des longueurs NH et NI; pour avoir HN = NI, le rapport d'homothétie de E_1 et E doit être égal à $\sqrt{2}$.

On pourrait aussi projeter E et E_1 suivant deux circonférences, etc. (J. N.)

17. On donne une parabole P et une ellipse E ayant son centre au sommet de P et même direction d'axes que P. — D'un point quelconque M de E on abaisse les normales sur P dont les pieds sont A, B, C. 1° Le lieu du centre de gravité du triangle formé par les centres de courbure de A, B, C est une ellipse E'. 2° Quel doit être le rapport des axes de l'ellipse E pour que l'ellipse E' soit un cercle.

18. Trouver la courbe enveloppe des paraboles qui sont circonscrites à une série de trapèzes, isoscèles tels que 1° les milieux des bases soient fixes; 2° la somme des bases soit constante.

Traiter la même question lorsque : 1° la différence des bases est constante; 2° le produit des bases est constant.

On trouve une ellipse.

19. On considère un cercle fixe et l'une de ses tangentes fixe. On prend sur cette tangente deux points variables B et C tels que BC soit

égale au rayon du cercle. Les secondes tangentes menées de B et C au cercle se rencontrent en A. Montrer que

1° Le lieu du point A est une ellipse ;

2° Tous les triangles ABC jouissent de la propriété suivante : La somme (ou différence) de BC et de la hauteur issue de A est égale à la somme (ou différence) des côtés AB et AC.

3° Le lieu des centres des cercles tritangents au triangle ABC se compose d'une parabole et de deux cubiques.

4° Généraliser la question en prenant B et C tels que BC soit égale à une longueur constante quelconque.

20. Soient M et N deux points fixes situés sur une conique Σ de centre O, P et Q deux points situés sur un axe de Σ, à égale distance de O, T le point de rencontre de la corde MN avec l'axe considéré. On construit une conique Σ' passant par les points M, N, P et Q; elle rencontre Σ en deux autres points R et S. Montrer que, lorsque la distance PQ varie, la droite RS passe par le point fixe T′ symétrique du point T par rapport à O.

21. En chaque point M d'une ellipse donnée, on considère le centre C du cercle osculateur en M à l'ellipse, et le second point de rencontre P de ce cercle avec l'ellipse.

1° Etudier la variation de l'aire du triangle MPC lorsque le point M parcourt l'ellipse.

2° Montrer que le lieu du centre de gravité du triangle MPC est une courbe dont l'aire est une fonction linéaire des aires de l'ellipse et de sa développée.

3° Voir ce que devient la question précédente si on remplace l'ellipse par une parabole.

22. On considère tous les triangles ABC tels que le côté BC soit fixe et que la hauteur issue de A soit égale à la différence des côtés AB et AC.

Trouver 1° Le lieu du point A; 2° Le lieu des centres des cercles tritangents au triangle ABC; 3° Le lieu des points de contact de ces cercles avec les côtés AB et AC.

23. On considère une parabole P et deux droites Δ et Δ' parallèle à l'axe et équidistantes de cet axe. D'un point Q quelconque de Δ on mène les tangentes à P dont les points de contact sont M et M′. Le cercle circonscrit au triangle QMM′ rencontre P en deux autres points M_1 et M'_1.

1° Le lieu des points de rencontre des sécantes communes au cercle et à la parabole se compose de la directrice de P et d'une cubique.

2° Le lieu des pôles des sécantes communes, par rapport à la parabole, se compose des droites Δ et Δ′ et d'une quartique.

3° Examiner le cas où l'écartement des droites Δ et Δ′ est égal à quatre fois la distance du sommet de P à son foyer.

24. Démontrer l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\,d\varphi = \frac{a^2+b^2+ab}{3(a+b)}.$$

25. Démontrer l'intégrale

$$\int_0^b \frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2-b^2)x^2+b^4}} = \frac{b^3(a+2b)}{3(a+b)^2}.$$

(*A continuer*).

×ENCORE UNE DÉMONSTRATION DU POSTULATUM D'EUCLIDE (*).

1. *Théorèmes de* LEGENDRE *et de* LAMBERT. « Nous avons prouvé d'une manière rigoureuse, dit Legendre dans la note II de la 12e édition de ses *Éléments de Géométrie*, que la somme des angles d'un triangle ne peut être plus grande que deux angles droits, proposition qui sépare tout d'un coup, par une différence essentielle, les triangles rectilignes des triangles sphériques (**). »

Il en résulte, comme corollaire, que dans un polygone de p côtés, la somme des angles ne peut surpasser $2(p-2)$ droits.

« Cette première partie établie, continue Legendre, il restait à prouver que la somme des angles ne peut être plus petite que deux angles droits; or, comme l'excès des trois angles sur deux angles droits qui a lieu dans les triangles sphériques, est proportionnel à l'aire du triangle; de même, *le* DÉFICIT, *s'il y en avait un dans les triangles rectilignes, serait proportionnel à l'aire du triangle.* »

(*) Nous supposons admis dans cette note que *deux droites ne peuvent enclore un espace* (Postulat des deux droites, ou postulat VI d'Euclide).

(**) Legendre a aussi prouvé que si la somme des angles est égale à deux droits dans un seul triangle, il en est ainsi dans tous et qu'alors on peut établir le postulatum d'Euclide.

Par suite, l'aire d'un polygone de p côtés serait aussi proportionnelle à son déficit, c'est-à-dire à ce qui manque à la somme de ses angles pour être égale à $2(p-2)$ droits.

Ce curieux *théorème du déficit*, qui est dû à Lambert, est assez facile à démontrer dans sa partie essentielle, que l'on peut énoncer comme il suit : « *le déficit d'un polygone qui est une partie d'un autre polygone est une partie du déficit de celui-ci.* »

Le théorème du déficit, sous cette dernière forme, est très utile pour découvrir le défaut caché de certains essais de démonstration du postulatum, comme nous allons le montrer, d'abord sur un exemple, puis d'une manière générale.

2. *Nouvel essai de démonstration.* Considérons n triangles équilatéraux égaux AA_1C_1, $A_1A_2C_2\ldots$, $A_{n-1}BC_n$, situés d'un même côté de la droite AB, sur laquelle se trouvent leurs bases AA_1, A_1A_2, ..., A_nB. Aux points A, B, élevons sur AB les perpendiculaires(*) $AD = BC$ et joignons CD.

Soient 2 droits $-\alpha$, la somme des angles de chacun de ces triangles équilatéraux, β la somme des angles C et D du quadrilatère ABCD.

On trouve aisément les valeurs suivantes pour les angles du polygone $AC_1A_1C_2A_2\ldots C_nBCD$:

$$\text{angle } DAC_1 = \text{angle } C_nBC = 1 \text{ droit} - \tfrac{1}{3}(2 \text{ dr.} - \alpha) = \tfrac{1}{3} \text{ dr.} + \tfrac{1}{3}\alpha$$

$$\text{angle } C_1A_1C_2 = \text{angle } C_2A_2C_3 = \ldots = C_{n-1}A_{n-1}C_n =$$
$$2 \text{ droits} - \tfrac{2}{3}(2 \text{ dr.} - \alpha) = \tfrac{2}{3} \text{ dr.} + \tfrac{2}{3}\alpha$$

$$\text{angles convexes en } C_1, C_2, \ldots C_n = 4 \text{ droits} - \tfrac{4}{3}(2 \text{ dr.} - \alpha) = 3\tfrac{1}{3} \text{ dr.} + \tfrac{1}{3}\alpha$$

$$\text{angle } C = \text{angle } D = \tfrac{1}{2}\beta.$$

Par suite, la somme S de tous les angles de ce polygone est

$$n(\tfrac{2}{3} \text{ dr.} + \tfrac{2}{3}\alpha) + n(3\tfrac{1}{3} \text{ dr.} + \tfrac{1}{3}\alpha) + \beta = 4n \text{ dr.} + n\alpha + \beta.$$

On peut écrire

$$S = 2(2n+1) \text{ droits} + (n\alpha - 2 \text{ droits}) + \beta.$$

Si α n'est pas nul, on peut prendre n assez grand pour que $n\alpha$ égale ou surpasse deux droits; alors on aura $S > 2(2n+1)$ droits, ce qui est

(*) On peut aussi prolonger AC_1 d'une longueur C_1D suffisante, puis faire en B, un angle ABC supplément de DAB et prendre $BC = AD$. On peut d'ailleurs remplacer le triangle équilatéral par un triangle quelconque.

contraire au corollaire du théorème de Legendre cité plus haut. On doit supposer $\alpha = 0$, ce qui, comme on le sait, équivaut au postulatum d'Euclide.

3. *Défaut de cette démonstration.* La démonstration précédente, dont nous avons emprunté l'idée fondamentale à une brochure récente, suppose implicitement que la figure $AC_1A_1C_2A_2\ldots C_{n-1}BCD$ soit un polygone, c'est-à-dire que la ligne CD ne coupe pas la ligne brisée $AC_1A_1C_2A_2\ldots B$. Or, si n est assez grand pour que S surpasse ou égale $2(2n+1)$ droits, ou que l'on ait

$$n\alpha \geqq 2 \text{ droits} - \beta, \qquad (1)$$

CD coupe cette ligne brisée. En effet, $n\alpha$ est le déficit de l'ensemble des triangles équilatéraux AC_1A_1, $A_1C_2A_2$, $\ldots$ $A_{n-1}C_nB$; 2 droits $-\beta$ est celui du quadrilatère ABCD. Donc, d'après le *principe du déficit*, il résulte de la relation (1) que l'aire des triangles équilatéraux est égale ou supérieure à celle du quadrilatère ABCD; par suite, ces triangles ne peuvent se trouver complètement à l'intérieur du quadrilatère ABCD; le côté BC rencontre donc la ligne brisée $AC_1A_1C_2A_2\ldots B$, et la conclusion de la fin du n° 2 n'est pas établie.

4. *Théorème général.* Considérons deux polygones $M = AP_1P_2\ldots P_pBQ_1Q_2\ldots Q_qA$, $N = AP_1P_2\ldots P_pBR_1R_2\ldots R_rA$, situés d'un même côté de la partie commune $AP_1P_2\ldots P_pB$ de leur périmètre et ayant respectivement $(p+q+2)$ et $(p+r+2)$ côtés. Dans ces polygones, appelons P, Q, R la somme des angles en $P_1, \ldots, P_p$, en $Q_1, \ldots, Q_q$, en $R_1, \ldots, R_r$; α, β les angles en A et B de M, α', β' les angles en A, B de N, Δ le déficit de M, Δ' le déficit de N. On aura

$$P + Q + \alpha + \beta + \Delta = 2(p+q) \text{ droits},$$
$$P + R + \alpha' + \beta' + \Delta' = 2(p+r) \text{ droits},$$

et, par suite,

$$R - Q + \alpha' - \alpha + \beta' - \beta + \Delta' - \Delta = 2(r-q) \text{ droits}. \qquad (2)$$

Cherchons la somme S' des angles de la *figure* $AQ_q\ldots Q_1BR_1\ldots R_rA$, en supposant, pour fixer les idées que les côtés AQ_q, BQ_1 soient à l'intérieur du polygone N. Nous trouverons

$$S' = \alpha' - \alpha + R + \beta' - \beta + q.4 \text{ droits} - Q,$$

ou, d'après (2),

$$S' = 2(q+r) \text{ droits} - (\Delta' - \Delta).$$

Si la ligne $AQ_r \ldots Q_1B$ est à l'intérieur du polygone N, cette relation exprime simplement que le déficit

$$\Delta'' = 2(q + r) \text{ droits} - S'$$

du polygone

$$L = AQ_q \ldots Q_1BR_1 \ldots R_rA,$$

différence des polygones N et M, est égal à la différence $\Delta' - \Delta$ des déficit de ces polygones, c'est-à-dire la partie essentielle du théorème de Lambert.

Si Δ est supérieur ou égal à Δ', d'après ce théorème de Lambert, M a une aire supérieure à N; donc la ligne $AQ_q \ldots Q_1B$ ne peut être toute entière à l'intérieur de N : elle coupe au moins une fois $AR_r \ldots R_1B$, entre A et B et la figure $AQ_q \ldots Q_1BR_1 \ldots R_rA$ n'est pas un polygone proprement dit. La somme S' de ses angles est supérieure ou égale à $2(q + r)$ droits; mais cela n'est pas en contradiction avec le corollaire du théorème de Legendre et, par suite, on ne peut rien en conclure touchant le postulatum d'Euclide. (P. M).

NOTES MATHÉMATIQUES.

15. *Sur la question* 1115 (*Mathesis*, (2) VII, p. 276). Pour trouver le lieu du foyer F d'une parabole variable π, qui touche une droite donnée AB en un point donné A et dont l'axe passe par un point donné P, on peut se servir des coordonnées polaires. En effet, A étant le pôle et AB l'axe polaire, posons $AF = \rho$, angle $FAB = \omega$, angle $PAB = \theta$, $AP = d$. Le triangle formé par FA et par l'axe avec AB étant isoscèle, l'angle $AFB = 2\omega$ (on suppose AF entre AB et AP), et le triangle AFP donne

$$\rho : d = \sin(\theta + \omega) : \sin 2\omega;$$

d'où l'équation en coordonnées rectilignes :

$$2xy = d(x \sin\theta + y \cos\theta).$$

(A. C.)

16. *Sur le lieu des sommets des courbes du second ordre*, par M. Barbette, professeur à Liége. Supposons les axes rectangulaires et considérons l'équation générale des coniques

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (1)$$

Une conique satisfaisant à quatre conditions est donnée par une équation de la forme

$$f(x, y, \lambda) = 0, \qquad (2)$$

où λ est un paramètre variable.

Pour déterminer le lieu des sommets de cette conique, on sait qu'il suffit d'éliminer λ entre son équation (dont nous désignons les coefficients par A, B, C, D, E, F) et la relation

$$(A - C) f'_x(x, y, \lambda) f'_y(x, y, \lambda) = B [f'^2_x(x, y, \lambda) - f'^2_y(x, y, \lambda)].$$

Or, cette élimination est souvent très difficile; c'est pourquoi la méthode que nous allons exposer semble préférable.

L'équation focale étant

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (mx + ny + t)^2,$$

soit $f(\alpha, \beta) = 0$ l'équation du lieu des foyers des coniques satisfaisant à quatre conditions données, les paramètres m, n et t ayant été exprimés en fonction de α et β.

Les coordonnées du point d'intersection D de la directrice,

$$mx + ny + t = 0,$$

et de la perpendiculaire abaissée sur cette directrice du foyer correspondant F (α, β),

$$y - \beta = \frac{n}{m}(x - \alpha),$$

sont

$$\frac{n^2\alpha - mn\beta - mt}{l^2}, \quad \frac{m^2\beta - nm\alpha - nt}{l^2},$$

en posant $l^2 = m^2 + n^2$.

Or le sommet (x, y) partage la distance FD du foyer à la directrice dans le rapport e, et ainsi les génératrices de ce sommet ont pour équations

$$x = \frac{\alpha e^2 + n^2\alpha - mn\beta - mt}{e^2(e + 1)}, \quad y = \frac{\beta e^2 + m^2\beta - nm\alpha - nt}{e^2(e + 1)}.$$

Si nous éliminons α et β entre $f(\alpha, \beta) = 0$ et ces deux dernières équations, nous aurons une relation $\varphi(x, y) = 0$ qui représentera le lieu des sommets.

Remarques I. La transformation

$$\alpha = \rho \cos \omega, \quad \beta = \rho \sin \omega,$$

simplifie souvent la recherche du lieu.

II. Si l'on donne une directrice et qu'on la prenne pour axe des y, les équations des génératrices d'un sommet sont

$$x = \frac{\alpha e}{e+1}, \qquad y = \frac{\beta(e^2+m^2)}{e^2(e+1)}.$$

Si, de plus, la conique est une parabole, ces dernières équations deviennent $x = \frac{1}{2}\alpha$, $y = \beta$, le lieu des sommets sera $f(2x, y) = 0$.

17. *Sur la figure du carré de l'hypoténuse.* Soient M, N, P les centres des carrés construits extérieurement sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle rectangle en A. On a les propriétés suivantes dont quelques-unes s'appliquent aussi à un triangle quelconque ABC :

1° Les droites AM, BN, CP sont les hauteurs du triangle MNP.

2° Les triangles ABC, MNP ont le même centre de gravité.

3° L'aire MNP = BPNC = $\frac{1}{4}(b+c)^2$ = ABMC.

4° Les distances de l'orthocentre du triangle MNP aux droites AB et AC sont égales à $\frac{1}{2}\frac{bc}{b+c}$.

5° En prenant pour axes coordonnés AB et AC, on a pour équation de l'axe d'homologie des triangles ABC et MNP,

$$c^2x + b^2y - bc(b+c) = 0.$$

6° Les points de rencontre de MN avec AC et BC, et ceux de MP avec BA et BC sont sur une conique touchant NP en A ; cette courbe a pour équation

$$(2c+b)bx^2 + (2b+c)cy^2 - bcxy + bc(b+c)(x+y) = 0.$$

(ZAHRADNIK, *Archives de Grunert*, (2), XIV, p. 105).

18. *Projection oblique d'une aire plane.* Étant donnés deux plans α, β et une droite p, soit S_α une aire quelconque prise dans le plan α et soit S_β la projection de S_α sur le plan β, les projetantes étant parallèles à p. Le rapport $S_\alpha : S_\beta$ est constant.

Pour démontrer cette proposition, appelons S_π la section droite du cylindre projetant S_α sur S_β ; c'est à la fois la projection orthogonale de S_α et de S_β sur un plan π perpendiculaire à p. Par conséquent

$$S_\pi = S_\alpha \cos(\alpha, \pi), \quad S_\pi = S_\beta \cos(\beta, \pi),$$

d'où

$$S_\beta = S_\alpha \frac{\cos(\alpha, \pi)}{\cos(\beta, \pi)}.$$

On peut aussi imiter la démonstration que l'on donne dans le cas d'une projection orthogonale. A cet effet, considérons d'abord un triangle $A_\alpha BC$ dont la base BC est située sur l'intersection d des plans α, β; si A_β est la projection de A_α sur B, la projetante étant parallèle à p, les triangles $A_\beta BC$, $A_\alpha BC$ sont entre eux comme les perpendiculaires abaissées des points A_β et A_α sur d. Mais le rapport de ces perpendiculaires ne change pas avec le point A_α dans le plan α; car si M_α et M_β sont deux nouvelles positions de A_α et A_β, les droites $A_\alpha M_\alpha$ et $A_\beta M_\beta$ se coupent en un point N de d, et l'on a

$$\frac{(A_\alpha, d)}{(M_\alpha, d)} = \frac{A_\alpha N}{M_\alpha N} = \frac{A_\beta N}{M_\beta N} = \frac{(A_\beta, d)}{(M_\beta, d)}.$$

Considérons ensuite un triangle quelconque $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ situé dans le plan α, et soit $A_\beta B_\beta C_\beta$ sa projection oblique sur le plan β; les côtés homologues de ces triangles se coupent en des points M, N, P de d. Le triangle $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ est la somme (algébrique) des triangles ANP, BMN, CPM, etc.

De l'aire d'un triangle, on passe à celle d'un polygone, puis à l'aire limitée par un contour courbe.

19. *Lieu des centres des coniques inscrites à un quadrilatère donné* ABCD. Soient M, N, P, Q les points de contact des côtés AB, BC, CD DA avec une conique inscrite, de centre O. La droite OB passe par le milieu de la corde MN; on en conclut que les triangles MOB, NOB sont équivalents. De même les triangles NOC et POC, POD et QOD, QOA et MOA sont équivalents. Il en résulte que la somme des triangles OAB et OCD, égale à celle des triangles OBC et ODA, vaut la moitié du quadrilatère ABCD. Cela posé, si l'on prend à partir du point d'intersection E des droites AB, DC sur EB une longueur EF = AB, sur EC une longueur EG = DC, la somme des triangles OEF, OEG sera égale à $\frac{1}{2}$ ABCD; par suite, le triangle OFG a une surface constante, et le lieu du point O est une droite parallèle à FG. Mais les milieux des diagonales AC, BD satisfont à la condition OAB + OCD = $\frac{1}{2}$ ABCD; donc le lieu cherché est la droite qui unit les milieux des diagonales du quadrilatère donné.

Cette démonstration, que nous empruntons à l'*Educationa Times* (juillet 1898), est peut être connue depuis longtemps; du moins, dans

les premières années des N. A. M., on démontre par ce moyen que le centre du cercle inscrit à un quadrilatère est sur la droite joignant les milieux des diagonales.

BIBLIOGRAPHIE.

Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. Vorlesungen von H. Zeuthen, Professor an der Universität Kopenhagen. Kopenhagen, Verlag von Andr. Fred. Höst u. Sön. 1896 (VII-344 p. petit in-8°). Prix : 7 marcs.

L'histoire des Mathématiques constitue en Danemark (comme en Belgique, depuis 1884) l'une des matières de l'examen que doivent subir les aspirants-professeurs dans les gymnases ou collèges. M. Zeuthen, à qui l'on doit une magistrale étude sur la *Théorie des coniques dans l'antiquité* et des *Notes sur l'histoire des mathématiques* qui, sur plusieurs points importants, rectifient ou transforment complètement les idées courantes, a publié, en 1893, un manuel excellent, malheureusement inaccessible à la plupart des lecteurs, parce qu'il est écrit en danois. Mais, dès 1896, il a été mis à la portée du grand public, par M. Fischer-Benzon, qui en a donné une traduction allemande, où l'auteur a d'ailleurs introduit les résultats des recherches historiques les plus récentes, particulièrement celles de M. P. Tannery.

Ce dernier savant, dont on connait la haute compétence, dit à propos de ce manuel de M. Zeuthen : « A côté d'un grand ouvrage historique comme celui de Moritz Cantor, le besoin d'un bon abrégé se faisait sentir, comme le prouvent les essais » (Gow, Ball, Cajori) « récemment tentés en Angleterre et aux États-Unis. Je n'hésite pas à signaler le travail de M. Zeuthen comme très supérieur à ces essais; non seulement il donne avec exactitude tout ce qu'il est essentiel de savoir, mais il s'attache à mettre en pleine lumière le caractère des méthodes et leur développement. Il est ainsi parvenu à éclairer d'un jour tout nouveau un certain nombre de questions obscures, qui à mon avis, sont précisément celles dont l'intérêt est le plus considérable ». Sans doute, comme le remarque M. Cantor, en essayant surtout de retrouver la genèse des méthodes de l'antiquité, M. Zeuthen a dû parfois, inconsciemment sans doute, moderniser les géomètres grecs; mais pour l'étudiant qui se sert de son livre comme manuel, le moindre contact avec Euclide, Archimède ou Apollonius, remettra les choses au point et lui permettra de se familiariser avec la forme antique de l'exposition mathématique.

Tandis que le grand ouvrage de Cantor est un tableau aussi complet que possible de l'histoire des Mathématiques, dans tous ses détails, jusque 1758, le manuel de Zeuthen est un exposé rapide des principaux progrès de la science avant l'époque moderne. C'est ce qui explique l'importance accordée aux grands géomètres grecs : Euclide, Archimède, Apollonius et Diophante et la façon sommaire dont il est parlé des Egyptiens, des Babyloniens, des Indous et des Arabes.

Voici au reste quelles sont les matières traitées dans les 39 chapitres dont se

compose l'ouvrage. *Introduction* I. Les mathématiques avant la naissance de la science. 2. Egyptiens et Babyloniens. *Les mathématiques grecques.* 1. Aperçu général. 2. Les mathématiques pythagoriciennes. 3. L'arithmétique géométrique. 4. L'algèbre géométrique. 5. Equations numériques du second degré; extraction de la racine carrée. 6. L'infini. 7. La quadrature du cercle. 8. La trisection de l'angle; solutions mécaniques. 9. Duplication du cube. 10. Problèmes et théorèmes; signification de la construction géométrique. 11. La méthode analytique; forme d'exposition analytico-synthétique. 12. Des éléments; auxiliaires analytiques. 13. Aperçu sur les éléments d'Euclide; système synthétique. 14-15. Définitions, postulats, axiomes d'Euclide; remarques. 16. La théorie générale des proportions; les livres 5 et 6 d'Euclide. 17. Les grandeurs commensurables; leur représentation par des nombres : les livres 7, 8, 9 d'Euclide. 18. Les grandeurs incommensurables; le livre 10 d'Euclide. 19. Les éléments de la stéréométrie; polyèdres réguliers; les livres 11 et 13 d'Euclide. 20. La méthode d'exhaustion : le livre 12 d'Euclide. 21. Les recherches infinitésimales d'Archimède. 22. La théorie de l'équilibre d'Archimède. 23. La théorie des coniques avant Apollonius. 24 Les coniques chez Apollonius. 25. Lieux et problèmes solides. 26. Le calcul en géométrie. 27. La géométrie sphérique. 28. La décadence de la géométrie grecque. 29. L'arithmétique après Euclide; Diophante. *Les mathématiques chez les Indous.* 1. Aperçu général. 2. Numération parlée, numération écrite, calcul numérique avant les Indous et chez les Indous. 3. Applications du calcul numérique. 4. Algèbre et théorie des nombres; géométrie. *Le moyen-âge.* 1. Introduction générale. 2. Arithmétique et algèbre des Arabes. 3. Trigonométrie des Arabes. 4. Première renaissance des mathématiques en Europe.

L'ouvrage de M. Zeuthen ne contient que très peu de renseignements biographiques et bibliographiques. Comme le remarque M. Eneström, il existe heureusement un petit livre qui en est pour ainsi dire le complément indispensable sous ce rapport, savoir les *Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre* 1500, *mit Hinweis auf die Quellen-Literatur* von F. Müller (Leipzig, Teubner, 1892), que nous avons annoncées autrefois dans *Mathesis*, (2), III, pp. 66. (P. M.)

Gino Loria, Professore ordinario dell'Università di Genova. **Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche.** Secunda edizione accresciuta ed interamente rifatta. Torino, Carlo Clausen, 1896 (In-8° de XX-346 pages). Prix : 8 francs.

La première édition de cette admirable monographie historico-bibliographique a paru en 1887; une traduction allemande et une traduction polonaise avec des additions, quelques années après. La présente édition considérablement augmentée est donc, en réalité, la quatrième. Elle comprend douze chapitres. 1. La géométrie jusque vers 1850. 2. Théorie des courbes planes algébriques. 3. Théorie des surfaces algébriques. 4. Théorie des courbes algébriques à double courbure. 5. Géométrie différentielle. 6. Recherches sur la forme des courbes, des surfaces et des

autres figures géométriques. Analysis situs. Configurations. 7. Géométrie plückérienne de la droite dans l'espace. 8. Correspondances, représentations, transformations. 9. Géométrie énumérative. 10-11. Géométrie non euclidienne ou à n dimensions. 12. Epilogue (coordonnées projectives; projection centrale; notations symboliques pour les formes algébriques; invariants différentiels; géométrie cinématique; moments d'inertie; π; constructions par la règle et le compas; équipollences, quaternions, méthode de Grassmann; géométrie récente du triangle).

Autant que nous avons pu en juger par l'examen du chapitre 10, cette *carte détaillée du pays géométrique* est très complète et très-exacte et est indispensable, comme le célèbre *Rapport* de Chasles *sur les Progrès de la Géométrie*, à ceux qui veulent faire des voyages de découverte dans les régions encore inexplorées ou peu connues de ce vaste domaine. (P. M.)

Cours de problèmes de géométrie analytique à l'usage des candidats à l'École navale, à l'École centrale et à l'École polytechnique par G. DE LONGCHAMPS, ancien professeur de mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis, censeur des études au Lycée Charlemagne. Tome II. Paris, Delagrave. In-8° de 435 pages, 106 figures.

Table des matières. Chap. IX. Le problème des normales (le pôle normal), p. 1-50. 28 exercices. — Chap. X. Le problème des cordes (l'équation en λ), p. 51-98. 40 exercices. — Chap. XI. Les problèmes à relations métriques, p. 99-166. 62 exercices. — Chap. XII. Les coniques et la forme normale, p. 167-198. 13 exercices. — Chap. XIII. Les problèmes de foyers. Les problèmes de sommets. (Les axes et les directrices), p. 199-236. 32 exercices. Chap. XIV. Les problèmes de simple contact, p. 237-262. 9 exercices. — Chap. XV. Les problèmes de contact supérieur, p. 263-286. 18 exercices. — Chap. XVI. Coniques inscrites et circonscrites. Coniques conjuguées, p. 287-327. 26 exercices. — Chap. XVII. 1re partie, coordonnées barycentriques, p. 327-338; 2e partie, coordonnées tangentielles, p. 339-379. 69 exercices. — Chap. XVIII. Les transformations et les problèmes de la géométrie analytique, p. 380-435. 36 exercices.

Comme nous l'avons déjà dit en annonçant le tome I de cet ouvrage, le Cours de problèmes de M. de Longchamps se distingue des autres recueils de problèmes de géométrie analytique : chaque chapitre résume les conseils à donner sur un genre spécial de questions, traite ensuite *in extenso* plusieurs de ces questions, puis indique en abrégé les solutions d'un grand nombre d'exercices, originaux et même différents de ceux que l'auteur a proposés dans diverses publications mathématiques.

Partout, dans les deux volumes déjà parus du *Cours de problèmes*, on constate que M. de Longchamps, dans sa longue carrière professorale, a porté tous ses efforts à contribuer au développement de la science et aux progrès de l'enseignement. Le livre est très *excitateur* : l'intérêt n'y languit jamais et l'on y trouve une foule d'idées nouvelles propres à fournir au lecteur la matière de recherches personnelles. (J. N.).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 1083.

(Voir *Mathesis*, (2) tome VI, p. 80).

On donne trois droites parallèles AA', BB', CC' *non situées dans un même plan. Les plans* A'BC, B'CA, C'AB *se coupent en un point* S; *les plans* AB'C', BC'A', CA'B', *en un point* S'. *Démontrer que la droite* SS' *est parallèle à* AA', *et coupe les plans* ABC, A'B'C' *en des points* T *et* T' *tels que* TS = SS' = S'T'; *que la droite* TT' *est une moyenne harmonique entre* AA', BB', CC'. (J. N.)

Solution par MM. Colart (Huy), Soons (Tirlemont), Francq (Charleroi) et Droz Farny. Soient A_1, B_1, C_1, les intersections des droites BC' et B'C, AC' et A'C, AB' et A'B. Le point S sera l'intersection commune des droites AA_1, BB_1, CC_1, et le point S' sera l'intersection commune des droites A_1A', B_1B', C_1C'.

La droite SS' étant l'intersection des plans AA_1A', BB_1B', CC_1C' passant par les trois droites parallèles AA', BB', CC', sera parallèle à ces droites.

Soient A_2, A'_2 les points où les droites BC, B'C' coupent la parallèle menée par A_1 à BB' : les points T, T' seront les intersections respectives de SS' avec AA_2 et $A'A'_2$. La droite A_2A' passe par le point S. Par suite, dans le trapèze $AA'A_1A_2$, on a SS' = TS. De même, la droite AA'_2 passe par le point S' et l'on a SS' = T'S'.

Enfin, dans les trapèzes $AA'A_1A_2$, BCC'B', on a

$$\frac{1}{TS'}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{AA'}+\frac{1}{A_1A_2}\right),\quad \frac{1}{A_2A'_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{CC'}+\frac{1}{BB'}\right).$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{TT'}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{AA'}+\frac{1}{BB'}+\frac{1}{CC'}\right).$$

Note. Comme on a

$$B'A_1 : A_1C = B'B : C'C,\quad B'C_1 : C_1A = B'B : AA',$$

le point d'intersection S des droites AA_1 et CC_1 est le centre de gravité des points A, B_1, C chargés des poids $\frac{1}{AA'}$, $\frac{1}{BB'}$, $\frac{1}{CC'}$. Par suite, le point T est le centre de gravité des mêmes poids attachés en A, B, C. (J. N.)

×Question 1067.

(Voir *Mathesis*, (2), VI, p. 104).

Parmi tous les triangles rectangles ABC *de même hypoténuse* BC, *quel est celui dans lequel le produit du côté* AB *par la bissectrice de l'angle opposé* C *est un maximum?* (Brierley).

Solutions par MM. Colart, Degueldre, Droz Farny, V. Maes, Brien, Francq et Deprez. Si CD est la bissectrice de l'angle C, on trouve

$$AB.DC = 2a^2 \sin\frac{C}{2} \cos C = a^2 \sqrt{2(1 - \cos C)\cos^2 C}.$$

Le maximum du radical a lieu pour

$$1 - \cos C = \frac{\cos C}{2}, \quad \text{d'où} \quad \cos C = \frac{2}{3}, \; C = 48°12'23''.$$

Par suite, $AC = \frac{2}{3}BC$.

MM. Barisien et Streymeersch égalent à zéro la dérivée de $\sin\frac{C}{2}\cos C$.

M. Streymeersch donne une seconde solution en partant de la relation :

$$\overline{AB}^2 . \overline{DC}^2 = 2ab^3 (a - b),$$

et en posant $\frac{b}{2} = \frac{a-b}{1}$, d'où $b = \frac{2}{3}a$.

×Question 1068.

(Voir *Mathesis*, (2) VI, p. 128).

Par trois droites données a, b, c *non situées dans un même plan, mener trois plans formant un trièdre trirectangle.* (J. Neuberg.)

Solution par MM. Jeřábek *et* Brien. Soit c' une droite parallèle à c et s'appuyant sur a en A et sur b en B. Si l'on connaissait un point O' tel que les plans O'a, O'b, O'c' fussent rectangulaires deux à deux, il suffirait de mener par c un plan γ parallèle au plan O'c', et les trois plans O'a, O'b, γ satisferaient à la question.

Soit D la projection de O' sur le plan ac'; le plan DO'B, à la fois perpendiculaire aux plans O'a et ac', est perpendiculaire à la droite a, et s'il rencontre a au point B', l'angle BO'B' est droit. Donc O' se trouve

sur la circonférence de diamètre BB', dont le plan est perpendiculaire à a. Il se trouve aussi sur la circonférence de diamètre AA', dont le plan est perpendiculaire à b, A' désignant la projection de A sur b. On peut donc le déterminer au moyen de l'une de ces circonférences et de la droite suivant laquelle se coupent les plans des deux cercles.

×Question 1073.

(Voir *Mathesis*, (2), VI, p. 142).

Trouver la condition pour que le système

$$x^2=a(x+y)(x+z),\quad y^2=b(y+z)(y+x),\quad z^2=c(z+x)(z+y)$$

admette une solution non nulle. (J. N.)

Première solution par MM. Déprez et Mandart. Retranchons la seconde équation de la première, puis la troisième de la première; il vient

$$x^2-y^2=(x+y)[a(x+z)-b(y+z)],$$
$$x^2-z^2=(x+z)[a(x+y)-c(y+z)],$$

ou, si l'on tient compte de l'énoncé,

$$x-y=a(x+z)-b(y+z),\quad x-z=a(x+y)-c(y+z),$$

ou encore,

$$x(a-1)+y(1-b)+z(a-b)=0,$$
$$x(a-1)+y(a-c)+z(1-c)=0.$$

D'où les rapports égaux :

$$\frac{x}{1+a-b-c}=\frac{y}{1+b-a-c}=\frac{z}{1+c-a-b}.$$

Remplaçons x, y, z par les conséquents dans la première équation du système donné; il vient, après réductions, la condition cherchée :

$$(a+b+c-1)^2-4abc=0. \qquad (1)$$

Seconde solution par MM. Déprez et Legrand. Les équations du système peuvent être mises sous la forme suivante :

$$\frac{x^2(1-a)}{a}=\frac{y^2(1-b)}{b}=\frac{z^2(1-c)}{c}=xy+xz+yz,$$

ou

$$x:y:z=\sqrt{\frac{a}{1-a}}:\sqrt{\frac{b}{1-b}}:\sqrt{\frac{c}{1-c}}.$$

Remplaçons x, y, z par ces radicaux dans la première équation du système; on trouvera, toutes réductions faites, la condition (1).

Question 1077.

(Voir *Mathesis*, (2), VI, p. 192).

On considère l'hyperbole équilatère ayant pour centre un point donné et bitangente à une conique donnée. Quand cette dernière tourne autour de son centre, le pôle de la corde de contact reste invariable.

Démontrer et généraliser cette proposition. (E. Duporcq).

Solution par M. Cl. Servais. I. Les cercles de Monge de toutes les coniques φ tangentes en deux points à une conique Σ, forment un faisceau dont les points limites sont le pôle A de la corde de contact et le centre de l'hyperbole équilatère du système φ. Donc, connaissant le centre O d'une hyperbole équilatère bitangente à une conique Σ, le pôle A de la corde de contact est commun au diamètre de Σ passant par le point O, et à la polaire du même point par rapport au cercle de Monge de la conique Σ. Ce pôle A est donc indépendant de la rotation de Σ autour de son centre.

II. Le problème suivant généralise dans le plan la question proposée : *connaissant le cercle de Monge d'une conique bitangente à une conique donnée Σ, construire le pôle de la corde de contact.* Ce pôle est l'un des points doubles de l'involution, déterminée sur le diamètre commun aux deux coniques, par les cercles de Monge de ces mêmes courbes. Le problème a donc deux solutions, qui restent invariables, si la conique Σ tourne autour de son centre.

III. Une droite l passant par A a la même droite conjuguée rectangulaire l', par rapport à toutes les coniques φ. Or si une droite tourne autour d'un point fixe A, sa conjuguée rectangulaire par rapport à une conique φ, enveloppe une parabole tangente aux axes de cette conique. Par suite : *L'enveloppe des axes des coniques φ est une parabole π.* (*Mathesis*, (2), VI, p. 39).

IV. Les deux droites conjuguées rectangulaires passant par A, sont tangentes à la parabole π; A est donc un point de la directrice de cette courbe. Si F est un foyer de l'une des coniques φ, la conjuguée rectangulaire de AF, est la perpendiculaire élevée au point F sur cette droite.

Donc : *le lieu des foyers des coniques* φ *est la podaire du point* A *par rapport à la parabole* π, *ou une strophoïde* (*Mathesis*, (2), VI, p. 40).

V. Généralisation dans l'espace. Les sphères de Monge de toutes les quadriques φ, circonscrites à une quadrique Σ le long d'une même conique, forment un faisceau, dont les points limites sont le pôle du plan de contact, et le centre d'un hyperboloïde spécial H, appartenant au système φ et ayant trois plans asymptotes rectangulaires. Donc, connaissant le centre O d'un hyperboloïde spécial H circonscrit à une quadrique Σ, le pôle du plan de contact est commun au diamètre de Σ passant par O, et au plan polaire du même point par rapport à la sphère de Monge de Σ. Ce pôle reste invariable, si Σ tourne autour de son centre.

VI. Problème. *Connaissant la sphère de Monge d'une quadrique circonscrite à une quadrique donnée* Σ, *construire le pôle du plan de contact.* Ce pôle est l'un des points doubles de l'involution déterminée sur le diamètre commun aux deux quadriques, par les sphères de Monge de ces mêmes surfaces. Le problème a donc deux solutions, qui restent invariables, si Σ tourne autour de son centre.

VII. Considérons un système de quadriques tangentes en deux points B et C à deux plans lB et lC. Tout plan passant par la droite l a même pôle par rapport à chacune des quadriques. Or si un plan tourne autour d'une droite fixe l, la normale à ce plan, menée par son pôle relatif à une quadrique φ, décrit un paraboloïde hyperbolique, tangent aux plans de symétrie de la quadrique φ. Dans le cas où les droites l et BC sont perpendiculaires, la normale enveloppe une parabole. Donc : *Les plans de symétrie des quadriques tangentes en deux points donnés à deux plans donnés, enveloppent un paraboloïde hyperbolique, ou sont tangents à une parabole.*

VIII. Dans le cas où les quadriques φ sont circonscrites à une quadrique Σ, le long d'une même conique, considérons deux couples quelconques de points B et C, B′ et C′ de cette conique.

D'après le paragraphe VII, les plans de symétrie des quadriques φ sont tangents à deux paraboloïdes hyperboliques. Ces deux surfaces ont d'ailleurs une génératrice commune, normale au plan polaire du point d'intersection des droites BC et B′C′. Par suite : *Les plans de symétrie des quadriques circonscrites à une quadrique* Σ *le long d'une même conique, sont osculateurs à une parabole gauche.*

Solution analytique par M. Déprez.

*Question 1078.

(Voir *Mathesis*, (2), tome VI, p. 192).

Soient O, I, I_a, I_b, I_c *les centres du cercle circonscrit et des cercles inscrits et exinscrits à un triangle* ABC, *et* R, r, r_a, r_b, r_c *les rayons de ces cercles. Les quatrièmes tangentes communes à deux des cercles* I_a, I_b, I_c *forment un triangle* $A_1B_1C_1$. *Démontrer que le cercle inscrit à* $A_1B_1C_1$ *a même centre que le cercle circonscrit au triangle* $I_aI_bI_c$ *et qu'il a pour rayon*

$$r_1 = 2R + r = \frac{r + r_a + r_b + r_c}{2}. \qquad \text{(J. Neuberg).}$$

Solution par MM. Colart (Huy), Déprez *et* Delahaye. Le centre I_1 du cercle inscrit à $A_1B_1C_1$ est le point de rencontre des bissectrices A_1I_a, B_1I_b, C_1I_c. On voit aisément que les triangles (BC, A_1B_1, A_1C_1), (CA, B_1C_1, A_1B_1), (AB, A_1C_1, B_1C_1) sont isoscèles, les angles à la base étant respectivement égaux aux angles A, B, C. Par suite, les droites A_1I_a, B_1I_b, C_1I_c sont respectivement perpendiculaires sur BC, AC, AB, et, dans les triangles $I_bI_1I_c$, $I_aI_1I_c$, $I_aI_1I_b$ les angles à la base valent respectivement $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}$. Ces triangles sont donc isoscèles et $I_1I_a = I_1I_b = I_1I_c$.

Dans le triangle isoscèle $I_aI_1I_b$, on a

$$I_1I_a = \frac{I_aI_b}{2\cos\frac{1}{2}C},$$

ou, à cause de la formule connue, $I_aI_b = 4R\cos\frac{1}{2}C$,

$$I_1I_a = 2R\,(*).$$

Or, on a la proportion

$$\frac{r_1}{r_a} = \frac{A_1I_1}{A_1I_a},$$

d'où, en observant que, dans le triangle $A_1B_1C_1$, les angles A_1, B_1, C_1 valent respectivement $2^d - 2A$, $2^d - 2B$, $2^d - 2C$, et que, par conséquent, $A_1I_a = \frac{r_a}{\cos A}$,

$$\frac{r_1 - r_a}{r_a} = \frac{I_1I_a}{A_1I_a} = \frac{2R\cos A}{r_a}.$$

(*) Plus simplement, ABC est triangle orthique de $I_aI_bI_c$, et le cercle ABC est celui des neuf points de $I_aI_bI_c$. (J. N.)

Par suite,

$$r_1 = r_a + 2R\cos A.$$

On aurait de même,

$$r_1 = r_b + 2R\cos B,$$
$$r_1 = r_c + 2R\cos C,$$

et, en additionnant,

$$3r_1 = r_a + r_b + r_c + 2R(\cos A + \cos B + \cos C).$$

Mais on a les formules

$$r_a + r_b + r_c = r + 4R, \quad \cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}.$$

Par conséquent,

$$r_1 = 2R + r = \frac{r_a + r_b + r_c + r}{2}.$$

Solution par M. Jeřabek (*Extrait*). Soient A_c, B_c les points de rencontre de A_1B_1 avec BC, AC; le triangle CA_cB_c est symétrique de CAB par rapport à I_bI_a. Les droites A_cI_a, B_cI_b, IC se coupent au centre i_c du cercle inscrit au triangle CA_cA_c; soit P le point de contact de A_cB_c avec ce cercle, de sorte que $i_cP = r$. Nous allons démontrer que i_c appartient à la circonférence $I_aI_bI_c$ et que les points I_1, i_c, P sont en ligne droite; il sera établi par là que $r_1 = I_1P = 2R + r$. En effet, l'angle $A_ci_cB_c = AIB = \pi - AI_cB$; dont le quadrilatère $I_cI_ai_cI_b$ est inscriptible. De plus,

$$\text{angle } I_1i_cI_a = I_1I_aA_c = I_aA_cA_1 + A_cA_1I_a = \frac{1}{2}A_1A_cC + \left(\frac{\pi}{2} - A_1A_cC\right);$$

d'où $I_1i_cI_a + A_1A_ci_c = \frac{1}{2}\pi$, ce qui démontre que I_1i_c passe par P.

Remarque. Les angles du triangle $A_1B_1C_1$ sont égaux à $\pi - 2A$, $\pi - 2B$, $\pi - 2C$; les côtés, la surface, le périmètre et le rayon du cercle circonscrit ont pour expressions :

$$a_1 = \frac{(2R+r)\sin A}{\cos B\cos C}, \text{ etc.}, \quad S_1 = (2R+r)^2 \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C,$$

$$p_1 = (2R+r)\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C, \quad R_1 = \frac{2R+r}{4\cos A\cos B\cos C}.$$

(Déprez)

Question 1131.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 126).

Si k^2 *est un cercle réel de centre* O, *et* k_1^2 *son cercle conjugué (complémentaire) :* 1° *les coniques passant par* O *et bitangentes à* k^2 *sont des ellipses*; 2° *les coniques passant par* O *et bitangentes au cercle imaginaire* k_1^2 *sont des ellipses, hyperboles ou paraboles suivant que la corde de contact coupe le cercle réel* k^2 *en deux points imaginaires, coïncidents ou distincts.* (V. Retali.)

Solution par M. R. Buyssens *et* Déprez. Soit O un point de l'axe d'une conique; O_1 le conjugué de O par rapport aux foyers situés sur cet axe; o_1 la polaire de O_1. Les perpendiculaires abaissées des points de o_1 sur leurs polaires respectives passent par O. Ce point est donc le centre d'un cercle qui a un double contact avec la conique considérée sur la droite o_1.

1° Si O est une extrémité du petit axe d'une ellipse, on voit aisément que le cercle (O) est toujours réel.

2° Si O est une extrémité du grand axe d'une ellipse, ce point est situé entre O_1 et ω, ω étant le point où o_1 rencontre l'axe; on a d'ailleurs $O\omega > O_1O$. Le cercle (O) est donc imaginaire et la corde de contact o_1 coupe le cercle conjugué en deux points imaginaires.

Lorsque O est un sommet d'une hyperbole, il tombe entre O_1 et ω et d'ailleurs $O\omega < O_1O$. Le cercle (O) est imaginaire et la corde de contact O_1 coupe le cercle conjugué en deux points réels.

Enfin si O est le sommet d'une parabole, il est le milieu de $O_1\omega$. Le cercle est imaginaire et la corde de contact o_1 est tangente au cercle conjugué.

Question 1135.

(Voir *Mathesis*, (2) VII, p. 214).

En un point M *d'une parabole, on trace la tangente et la normale, et, par le foyer* F *de la courbe, on mène une perpendiculaire à* FM *qui rencontre la tangente et la normale respectivement aux points* A *et* B. *Trouver*

1° *Le lieu du point* C, *milieu de* AB.

2° *Le lieu de l'orthocentre du triangle* CMA.

3° *Le lieu du point* D *symétrique de* A *par rapport à* M. (G. Andrien).

Solution par M. J. Degueldre. 1° Soit P le point d'intersection de la tangente MA avec l'axe focal de la parabole. Les triangles CAM, PFM étant isoscèles, les angles AMC, MPF sont complémentaires et, par suite, MC est perpendiculaire sur PF. Cela posé, prenons le foyer F pour origine des axes coordonnés ; l'axe des x, PF, rencontre MC en K et le triangle rectangle CFM donne

$$\overline{FK}^2 = CK.KM$$

d'où en désignant par x, y les coordonnées de C,

$$y = \frac{x^2}{\pm\sqrt{2px + p^2}}.$$

Le point C décrit donc une courbe symétrique par rapport à l'axe des x, tangente à cet axe en F et admettant pour asymptote la tangente au sommet de la parabole ;

2° Si x', y' désignent les coordonnées de M, celles du point A, qui appartient à la directrice, sont $-p$, $\frac{px'}{y'}$; les hauteurs du triangle CMA correspondant aux sommets A et M ont pour équations respectives :

$$y = p\frac{x'}{y'}, \quad y = \frac{y'}{x'}x,$$

d'où, par multiplication,

$$y^2 = px.$$

Le lieu est une parabole rapportée à son axe focal et à sa tangente au sommet.

3° Soient x, y les coordonnées de D ; on a

$$2x' = x - p, \quad 2y'^2 = yy' + px', \quad y'^2 = 2px' + p^2.$$

Eliminant x' et y' entre ces relations, on a pour l'équation du lieu

$$y = \frac{p(3x + p)}{\pm\sqrt{px}}.$$

Cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des x et elle admet l'axe des y pour asymptote. On peut s'assurer que la valeur $x = \frac{1}{3}p$ rend y^2 maximum et que la courbe présente deux points d'inflexion dont les coordonnées sont $x = p$ et $y = \pm 2p$.

M. Barisien résout la même question en se servant de coordonnées polaires pour les n^os 1 et 2. Il cherche également le lieu du point B et celui de l'orthocentre du triangle CMB, et trouve respectivement :

$$r = \frac{p\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}, \qquad r = \frac{p\cos\theta}{4\sin^4\frac{\theta}{2}}.$$

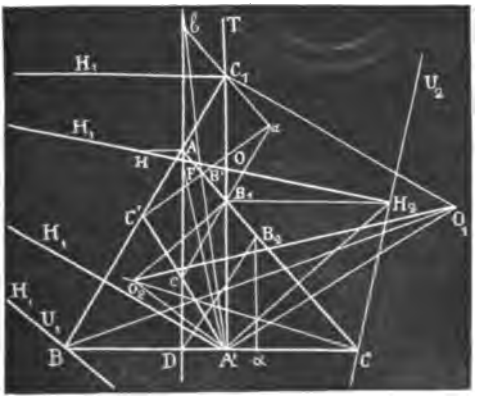
Question 1155.

Voir *Mathesis* (2) t. VIII, p. 31).

On considère les paraboles qui touchent deux côtés AB, AC *d'un triangle et sont normales au troisième* BC. *Chercher* 1° *l'enveloppe de la directrice*; 2° *les enveloppes des cordes joignant les points de contact de* AB *et* AC *ou joignant ces points au point d'incidence de* BC; 3° *le lieu du foyer.*

(J. Neuberg.)

Solution par M. H. Lez. Prenons pour axes le côté CB et la hauteur AD. Soient B', C' les points de contact de AC et AB avec l'une des paraboles



variables, A' le point d'incidence de la normale BC et A'T la tangente en A'.

Une conique tangente au côté AB ($hx + ny - nh = 0$) et à la droite A'T ($x - d = 0$), avec la droite A'C' ($lx + dy - dl = 0$) pour corde de contact, aura pour équation

$$(hx + ny - nh)(x - d) + k(lx + dy - dl)^2 = 0. \qquad (1)$$

Développant, nous trouverons une parabole si

$$k = \frac{n^2}{4d(dh - ln)}.$$

L'équation (1) devient alors

$$[(2dh - ln)x + ndy]^2 - 2d[ln^2(l - 2h) + 2dh^2(d + n) - 2dhln]x$$
$$- 2d^2n(2dh - ln)y + d^2n(nl^2 - 4hln + 4dh^2) = 0. \qquad (2)$$

De même, une parabole tangente au côté AC ($hx - my + mh = 0$) et à DE, suivant la corde A'B' ($\lambda x - dy - d\lambda = 0$) sera représentée par

$$[(2dh - \lambda m)x - mdy]^2 - 2d[\lambda m^2(\lambda + 2h) + 2dh^2(d - m) - 2dh\lambda m]x$$
$$+ 2d^2m(2dh - m\lambda)y + d^2m(m\lambda^2 + 4h\lambda m - 4dh^2) = 0.$$

Si ces courbes coïncident, elles satisferont à l'énoncé de la question ; il suffit pour cela que les coefficients de leurs équations soient proportionnels. De là, les relations suivantes, en considérant les coefficients de y^2, de xy et les termes connus,

$$\frac{n^2}{m^2} = -\frac{n(2dh - nl)}{m(2dh - m\lambda)} = \frac{n(nl^2 - 4hln + 4dh^2)}{m(m\lambda^2 + 4h\lambda m - 4dh^2)};$$

nous en tirons

$$-2dhn + nm\lambda = 2dhm - mnl,$$
$$-4dh^2n + 4h\lambda mn + mn\lambda^2 = 4dh^2m - 4hlmn + mnl^2,$$

égalités qui donnent les valeurs de l et de λ :

$$l = \frac{h(dm + dn + nm)}{mn} \qquad \lambda = \frac{h(dm + dn - mn)}{mn}. \qquad (3)$$

Cela trouvé, soient a, b, c, f, g, h, les coefficients de l'équation (2), de sorte que

$$a = (2dh - nl)^2 = \frac{h^2}{m^2}(dm - dn - nm)^2,$$

$$h = \frac{dhn}{m}(dm - dn - mn),$$

$$b = n^2d^2,$$

$$g = -\frac{dh^2}{m^2}(d^2m^2 + d^2n^2 - m^2n^2),$$

$$f = -\frac{d^2hn}{m}(dm - dn - mn),$$

$$c = \frac{d^2h^2}{m^2}[(dm + dn + nm)^2 - 4mn^2(d + m)],$$

les déterminants mineurs du discriminant de la conique ou

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \Delta$$

seront $A = bc - f^2 = \frac{4d^4h^2mn^3}{m^2}(d-n)(d+m)$,

$$B = ac - g^2 = -\frac{4d^2h^4n^2}{m^2}(d-n)^2(d+m)^2,$$

$$C = ab - h^2 = 0,$$

$$F = gh - af = -\frac{2d^2h^3n^2}{m^2}(d-n)(d+m)(dm-dn-mn),$$

$$G = hf - bg = \frac{2d^3h^2mn^3}{m^2}(d-n)(d+m),$$

$$H = fg - ch = -\frac{2d^3h^3n^2}{m^2}(d-n)(d+m)(dm-dn-nm).$$

1° L'équation générale de la directrice d'une parabole, c'est-à-dire $Gx + Fy = \frac{1}{2}(A+B)$, devient pour la parabole (2) :

$$dmnx - h(dm-dn-nm)y - d^2mn + h^2(d-n)(d+m) = 0 \quad (4)$$

ou

$$d^2(h^2-mn) - d[-mnx + h(m-n)(y-h)] + nmh(y-h) = 0.$$

La variable d figurant au 2me degré, cette droite enveloppe une conique

$$4mnh(y-h)(h^2-mn) = [h(m-n)(y-h) - mnx]^2,$$

soit la parabole

$$0 = [mnx + h(n-m)y]^2 - 2mnh^2(n-m)x -$$

$$2h[h^2(n-m)^2 - 2mn(mn-h^2)]y + h^2[h^2(n-m)^2 - 4mn(mn-h^2)],$$

qui passe par A.

2° Par suite des relations (3), les équations des cordes de contact A'C' et A'B' deviennent :

$$h(dm+dn+nm)x + dmny - dh(dm+dn+mn) = 0,$$

et

$$h(dm+dn-mn)x - dmny - dh(dm+dn-mn) = 0.$$

Elles peuvent s'écrire aussi :

$$d^2h(m+n) + d(hmn - hmx - hnx - mny) - hmnx = 0$$

et

$$d^2h(m+n) - d(hmn + hmx + hnx - mny) + hmny = 0.$$

La variable d figurant de nouveau au 2me degré, ces deux droites enveloppent des coniques qui sont les paraboles :

$$[h(m+n)x+mny]^2+2h^2mn(m+n)x-2hm^2n^2y+h^2m^2n^2=0,$$
$$[h(m+n)x-mny]^2-2h^2mn(m+n)x-2hm^2n^2y+h^2m^2n^2=0,$$

tangentes à l'axe des Y au point A ($y=h$) et tangentes à l'axe des X en des points symétriques $x=\mp\frac{mn}{m+n}$.

Pour $y=h$, $x=\mp\frac{4mn}{m+n}$.

Nous obtiendrions de même l'enveloppe de la corde B'C' dont l'équation est

$$0=h[d(m^2+n^2)+mn(n-m)]x-mn[d(n-m)+2mn)]y-$$
$$h[d^2(m+n)^2-dmn(n-m)-2m^2n].$$

3° Les coordonnées du foyer d'une parabole étant données par les relations :

$$(F^2+G^2)x=FH+\tfrac{1}{2}(A-B)G,$$
$$(F^2+G^2)y=GH-\tfrac{1}{2}(A-B)F,$$

nous aurons pour la parabole (2) :

$$[d^2m^2n^2+h^2(dm-dn-nm)^2]x=$$
$$d^2[m^2d(h^2+n^2)+h^2n(n-m)(d+m)]$$
$$[d^2m^2n^2+h^2(dm-dn-nm)^2]y=h^2(d-n)(d+m)(dm-dn-mn).$$

Eliminant la variable d, nous aurons une relation qui représentera le lieu du foyer cherché. Prenant pour nouvel axe des X une parallèle passant par le sommet A, on aura pour ce lieu la cubique

$$(x^2+y^2)[h^2(m-n)x-\{m^2n^2+h^2(m^2+n^2-mn\}y]-$$
$$h[(h^2+mn)x-h(m-n)y]^2=0.$$

L'origine A fait partie du lieu.

La droite $y=-h$ rencontre la courbe en trois points dont les abscisses sont les racines de l'équation

$$(m-n)x^3+(m^2+n^2-3mn-h^2)x^2-(m-n)(h^2+2mn)x+$$
$$mn(h^2+mn)=0,$$

décomposable en un produit de trois facteurs

$$(x-n)(x+m)[x(m-n)-h^2-mn]=0.$$

La cubique passe donc par les points C et B. C'est une hyperbole défective qui s'étend vers l'infini avec une asymptote parallèle à la droite

$$k^2(m-n)x-[m^2n^2+k^2(m^2+n^2-mn)]y=0.$$

Solution géométrique. En un point quelconque A′ de BC élevons une perpendiculaire, qui coupe AB en C_1, AC en B_1. Une parabole π du système considéré touche AB, AC et B_1C_1, la dernière droite en A′. Il est facile de déterminer les points de contact C′ et B′ de AB et AC. En effet, soit *abc* le triangle des parallèles menées aux côtés du triangle AB_1C_1 par les sommets opposés; d'après un théorème connu, les cordes de contact A′B′, A′C′, B′C′ des angles C_1, B_1, A du triangle AB_1C_1 passent respectivement par les points *c*, *b*, *a*.

Cela posé, si le point A′ se déplace sur BC, les points A′, B_1, C_1, *c*, *b*, *a* décrivent des ponctuelles semblables. On en conclut que les droites A′B′ et A′C′ enveloppent deux paraboles π_c, π_b qui touchent le côté BC et la hauteur AD, celle-ci en A; car, lorsque A′ est en D, le parabole π devient la droite double AD, et B′ et C′ se confondent avec A. Le point de contact de BC avec la parabole π_b est la position de A′ qui correspond à *c* confondu avec D; on l'obtient donc en menant DB_2 parallèle à AB et en abaissant $B_2\alpha$ perpendiculaire à BC; la parabole π touche alors AB en B et αB_1 en α. On trouve de même le point de contact de BC avec π_c. Supposons A′ en C; alors A′*c* est parallèle à AB et C′ est à l'infini; la parabole π dégénère en une droite double qui est la parallèle menée à AB par C, et cette parallèle touche π_b. Semblablement, la parabole π peut dégénérer en la parallèle menée par B à AC; cette parallèle est une tangente de π_c.

Lorsque l'on considère toutes les paraboles inscrites à un triangle AB_1C_1, les cordes de contact de trois angles du triangle engendrent des faisceaux projectifs. On en déduit facilement que dans la question proposée, le point *a* engendre une ponctuelle projective avec le faisceau directeur(*) de la droite B′C′; par suite, B′C′ enveloppe une parabole π_a qui touche en A la droite A*a*, conjuguée harmonique de la hauteur AD par rapport à l'angle BAC. Les parallèles à AB par C et à AC par B sont tangentes à la parabole π_a.

(*) Nous appelons ainsi l'ensemble des parallèles menées par un point fixe à une droite mobile.

La directrice de π passe par les orthocentres H, H_1, H_2 des triangles circonscrits AB_1C_1, (BC_1, $A'C_1$, $A'C_1$)(*), (CB_1, $A'B_1$, $A'B_1$). Le point H_1 est à l'intersection de la perpendiculaire abaissée de A' sur BC_1, avec la perpendiculaire élevée en C_1 sur $A'C_1$; lorsque A' se déplace sur BC, H_1 décrit sur une droite fixe BU_1 une ponctuelle semblable à celle du point A'. Par analogie, H_2 décrit aussi une ponctuelle rectiligne CU_2 semblable à la ponctuelle (A'). On en conclut que la directrice H_1H_2 enveloppe une parabole, qui touche les droites BU_1, CU_2 et la parallèle à BC par A.

Le foyer F de π se trouve à l'intersection des circonférences circonscrites aux triangles AB_1C_1, (BC_1, $A'C_1$, $A'C_1$), (CB_1, $A'B_1$, $A'B_1$). Les centres O, O_1, O_2 de ces circonférences décrivent trois ponctuelles semblables; par suite, les droites OO_1, O_1O_2, OO_2 enveloppent trois paraboles. F est à l'intersection de la circonférence AB_1C_1 avec la symédiane du triangle AB'C' issue du sommet A. Le centre O du cercle et la symédiane engendrent une ponctuelle et un faisceau projectifs. Si donc on prend pour origine des coordonnées le sommet A et pour axe des x la droite AO, F est déterminé par deux équations de la forme

$$y = \lambda x, \quad x^2 + y^2 - 2\frac{m\lambda + n}{p\lambda + q}x = 0,$$

où λ est un paramètre variable; m, n, p, q sont des constantes. On en conclut (en éliminant λ) que F décrit une cubique circulaire. (J. N.)

Question 1168.

(Voir *Mathesis* (2), VIII, p. 104).

On mène en un point M *d'une parabole la tangente* MT *et la normale* MQP *qui rencontre l'axe en* Q *et la courbe en* P. *On projette* P *en* R *sur la directrice, et on mène en* P *la normale qui coupe en* N *l'axe. Démontrer* 1° *que* MQ *est égale à la distance de* R *à la parallèle menée par le foyer* F *à* MT; 2° *que* QP *est égale à la distance de* N *à* MT. (A. C.)

Solution par M. E. Colart. 1° En désignant par x', y' les coordonnées de M, on trouve aisément pour coordonnées de P,

$$x = \frac{(p + x')^2}{x'}, \quad y = -\frac{2p(p + x')}{y'}.$$

(*) Une tangente $A'C_1$ avec son point de contact A' remplace deux tangentes menées par A'.

Par conséquent, la perpendiculaire abaissée de R sur la tangente MT et la parallèle menée par F à cette tangente ont pour équations

$$y + \frac{2p(p+x')}{y'} = -\frac{y'}{p}\left(x + \frac{p}{2}\right),$$

$$y = \frac{p}{y'}\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

En résolvant ces deux équations, on trouve $x = -\frac{3p}{2}$.

Par suite, en désignant par C la projection de R sur la parallèle menée par F à la tangente MT, par D la projection de C sur la directrice, et par E la projection de M sur l'axe, on aura

$$CD = p = EQ,$$

et les deux triangles rectangles RCD, MEQ seront égaux. Donc RC = MQ.

2° Projetons P en G sur l'axe, N en H sur MP, N en I sur MT, en K sur la directrice. Les deux triangles NPG et FRK étant égaux, les triangles FCR, NHP sont égaux. Par suite, HP = RC = MQ, et l'on a

$$NI = MQ + HQ = PQ.$$

Autre solution analytique par M. Barisien; solution géométrique par M. Droz Farny.

×Question 1169.

(Voir *Mathesis* (2), VIII, p. 128).

Résoudre le système

$$\operatorname{tg}(y+z) = a \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{tg}(z+x) = b \operatorname{tg} y, \quad \operatorname{tg}(x+y) = c \operatorname{tg} z.$$

Solution par M. Barbette. Après avoir développé les premiers membres, chassé les dénominateurs, puis divisé par le produit $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z$, si l'on fait

$$\frac{1}{\operatorname{tg} y \operatorname{tg} z} = x', \quad \frac{1}{\operatorname{tg} z \operatorname{tg} x} = y', \quad \frac{1}{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = z', \tag{1}$$

le système proposé s'écrit

$$ax' - y' - z' = a; \quad -x' + by' - z' = b; \quad -x' - y' + cz' = c;$$

d'où

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ b & b & -1 \\ c & -1 & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c \end{vmatrix}}, \quad y' = \frac{\begin{vmatrix} a & a & -1 \\ -1 & b & -1 \\ -1 & c & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c \end{vmatrix}}, \quad z' = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ -1 & b & b \\ -1 & -1 & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c \end{vmatrix}}.$$

Or

$$\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y \operatorname{tg}^2 z = \frac{1}{x'y'z'};$$

par conséquent, d'après les égalités (1),

$$\operatorname{tg} x = x' \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = \pm \sqrt{\frac{x'}{y'z'}}, \text{ etc.}$$

MM. Barisien et Coppeters (Gand) ont résolu la même question.

QUESTIONS D'EXAMEN.

351. Les formules

$$x = at^2 + bt + c, \quad y = a_1 t^2 + b_1 t + c, \quad z = a_2 t^2 + b_2 t + c_2,$$

où x, y, z sont les coordonnées d'un point par rapport à trois axes Ox, Oy, Oz, et où t est un paramètre variable, représentent une courbe plane.

Car on a

$$\begin{vmatrix} x - c, & a_1 & b \\ y - c_1, & a_1 & b_1 \\ z - c_2, & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

352. Chercher la condition pour que les formules

$$x = at^3 + bt^2 + ct + d,$$
$$y = a't^3 + b't^2 + c't + d',$$
$$z = a''t^3 + b''t^2 + c''t + d''$$

définissent une courbe plane.

Si $Ax + By + Cz + D = 0$ est l'équation du plan de la courbe, on doit avoir :

$$Aa + Ba' + Ca'' = 0, \quad Ab + Bb' + Cb'' = 0,$$
$$Ac + Bc' + Cc'' = 0, \quad Ad + Bd' + Cd'' + D = 0,$$

d'où la condition

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

853. Résoudre l'équation

$$\frac{1}{\sin(x-a)} + \frac{1}{\sin(x+a)} = \frac{2}{\sin x}.$$

Réponse : $\sin x = \pm\sqrt{2}\sin\frac{a}{2}$.

854. Trouver les six derniers chiffres d'un nombre sachant que son cube est terminé par 777777. (Gelin).

Le chiffre des unités est évidemment 3. Le cube de $(10x+3)$ est un multiple de cent plus $270x+27$; on voit que $27x$ doit être terminé par 5, donc $x=5$. Le cube de $(100y+53)$ est un multiple de mille plus $842700y+148877$; donc $7y+8$ doit se terminer par 7; le dernier chiffre de y est donc 7. En continuant ainsi, on voit que le nombre cherché se termine par 660753.

855. Résoudre le système

$$x+y+z=a, \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{b},$$

$$xy+yz+zx=c.$$

856. Construire un triangle connaissant les longueurs des côtés b et c, et l'inclinaison de a sur la médiane correspondante.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1181. On considère toutes les paraboles qui touchent une droite donnée OA en un point fixe A, et une droite OB au point B; la droite OB est supposée tourner autour de O et la distance OB est égale à une longueur connue b. Trouver le lieu des points d'intersection de l'une de ces paraboles avec la bissectrice de l'angle correspondant AOB.

(Chaikevitsch.)

1182. Une courbe Δ est rapportée à deux axes rectangulaires Ox, Oy. En un point quelconque M de Δ on mène la tangente MT et l'ordonnée MP. Soit M' le point où la parallèle à MT par l'origine O coupe MP. Construire la tangente à la courbe Δ', lieu du point M'. Trouver une relation entre les aires engendrées par les ordonnées MP et M'P.

(Petit-Bois.)

1182. Par un point P du plan d'un triangle donné ABC, on mène des parallèles aux symédianes; soient A', B', C' les points de rencontre de ces parallèles avec les côtés correspondants de ABC.

1° Trouver le lieu d'un point P tel que

$$A'B'C' = \frac{3}{16} ABC.$$

2° Quel est, dans ce cas, le lieu du centre de gravité du triangle A'B'C'?

3° Trouver l'enveloppe de chaque côté de A'B'C'. (J. Déprez).

×**1184.** Résoudre et construire un triangle ABC, connaissant a, B et $b + \alpha c$, α étant un nombre donné, positif ou négatif. — Discussion.

×**1185.** Étant donné un tétraèdre quelconque ABCD, on considère une aire quelconque S_α située dans le plan BCD. Soit S_β la projection de S_α sur le plan ACD, les projetantes étant parallèles à l'arête SB; soient S_γ, S_δ les projections analogues de S_α sur les plans ABD, ABC. Appelons V_β, V_γ, V_δ les volumes des cônes qui ont pour sommet commun un point quelconque M du plan BCD, et pour bases respectives S_β, S_γ, S_δ. Démontrer que la somme algébrique de ces volumes est égale au volume du cône de sommet A et de base S_α. (J. N.)

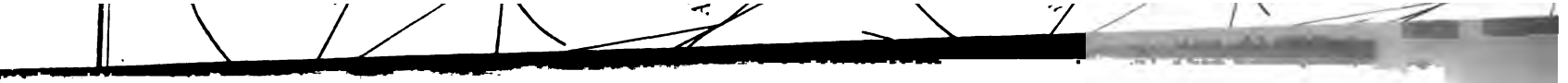
1186. L'angle A du triangle ABC est fixe, et la somme (différence) des côtés AB, AC est constante. Démontrer que la droite d'Euler HO passe par un point fixe de la bissectrice intérieure (extérieure de l'angle A). Si l'angle A est de 120° (60°), la droite HO est parallèle à la bissectrice de l'angle A. (Soons).

1187. Etant données quatre droites a, b, c, d et un point P dans un même plan, on mène par le point de rencontre S des droites a et b une sécante variable m, qui coupe c en C et d en D. La droite PC rencontre a en A, b en B; la droite PD rencontre a en A', b en B'. Démontrer que les droites A'B, AB' pivotent chacune autour d'un point fixe et que leur point d'intersection décrit une droite. (Davidoglou.)

1188. Soient F, F' les foyers d'une conique, MA et MB deux tangentes à la courbe, A le point de contact de l'une d'elles et B le point où la seconde rencontre la tangente parallèle à MA; démontrer que les cercles circonscrits aux triangles MAF et MBF' se coupent au point de rencontre des droites AF' et BF. (M. Stuyvaert).

Rectification. Page 174, ligne 3 en remontant, lire $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ au lieu de $\cos 2\alpha$, $\cos 2\beta$, $\cos 2\gamma$.

ig.



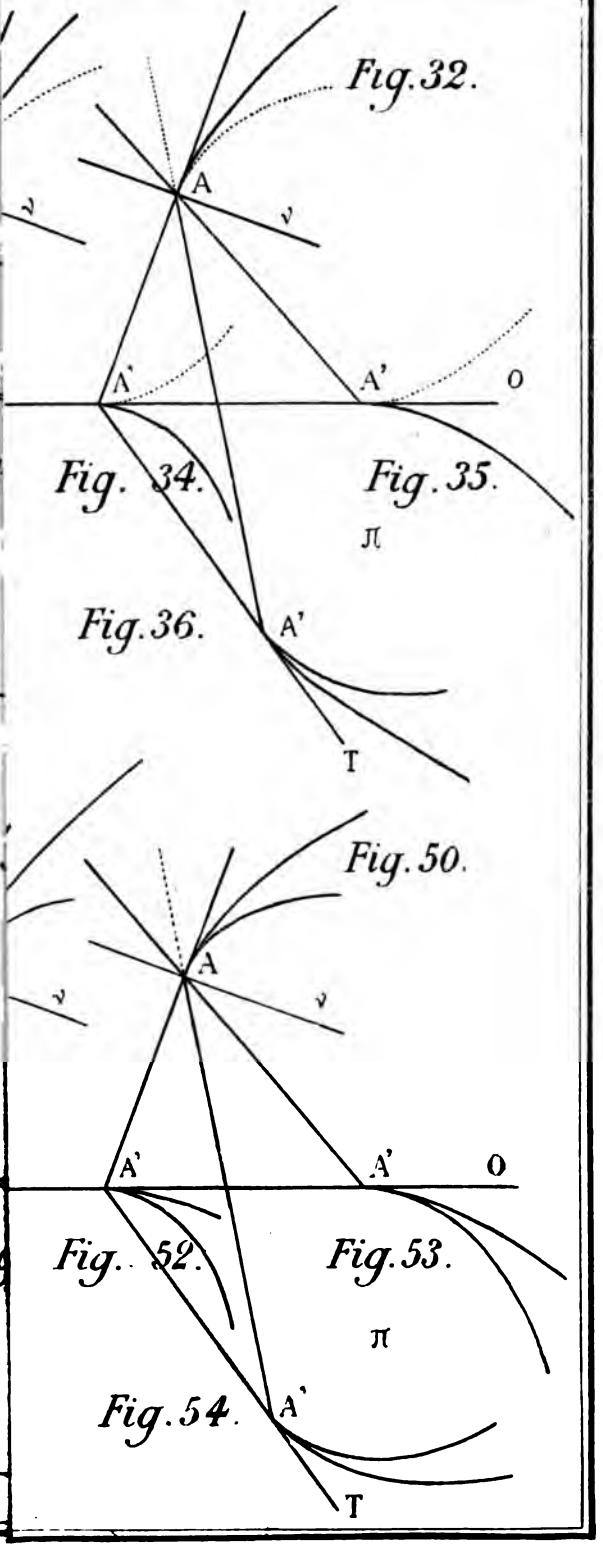


Fig.32.
A
ν
ν
A'
A'
A'
O
Fig. 34.
Fig. 35.
π
Fig.36.
A'
T
Fig.50.
A
ν
ν
A'
A'
A'
O
Fig. 52.
Fig.53.
π
Fig.54.
A'
T

SIMPLE REMARQUE SUR LE TRIANGLE;

par M. De Tilly.

1. Je distinguerai les triangles, pour simplifier un peu le langage, en triangles de première, de seconde et de troisième espèce, selon que la somme de leurs angles sera égale à deux droits, supérieure ou inférieure à deux droits.

2. S'il existe un triangle de première espèce, tous les triangles sont de première espèce (Legendre et Lobatchefsky).

3. S'il n'existe pas de triangle de première espèce, tout triangle est de même espèce que les triangles qu'on obtient en le décomposant en deux parties par une droite quelconque issue d'un sommet.

Soit 2 droits $+ x$ la somme des angles du triangle ABC, x pouvant être positif ou négatif; et supposons qu'il puisse exister un triangle tel que ABD ou ACD, dont la somme des angles soit 2 droits $+ y$, y étant de signe contraire à x; D est situé sur BC entre B et C.

Faisons mouvoir le point D sur la droite BC, en joignant ses positions successives, D′, D″,...., au point A, et en choisissant le sens du mouvement de manière à agrandir le triangle sur lequel on raisonne (ABD par exemple). La somme des angles du triangle variable, qui est 2 droits $+ y$ pour ABD, se modifiera par voie de continuité, et deviendra 2 droits $+ x$ quand D sera arrivé en C. Or, y et x étant de signes contraires, cette somme aura dû passer par 2 droits, ce qui est en opposition avec l'hypothèse (*).

4. Deux triangles rectangles qui ont un côté de l'angle droit égal sont de même espèce. En effet, ils peuvent être accolés par leur côté égal, de manière à former un triangle total analogue à ABC, et l'on rentre dans le n° 3.

5. Deux triangles rectangles quelconques sont de même espèce. Car s'ils ont respectivement pour côtés de l'angle droit a et b, c et d, ils peuvent être comparés, comme au n° 4, à un troisième triangle rectangle, ayant pour côtés de l'angle droit a et c, a et d, b et c, ou b et d.

(*) Nous avons fait observer à M. De Tilly qu'il admettait ici que y varie continuement avec BD. Il nous a répondu que, suivant lui, on ne peut trouver aucune exposition des premiers principes de la géométrie qui soit affranchie d'un semblable postulat (P. M.).

6. Deux triangles quelconques sont de même espèce. En effet, on peut les décomposer, l'un et l'autre, en triangles rectangles, et l'on est ramené aux nos 5 et 3.

7. On peut maintenant, si l'on veut, démontrer d'une manière simple (c'est-à-dire comme cela est fait aux pages 107 à 109 de mon *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique*) le théorème suivant :

Si les triangles plans sont de la deuxième ou de la troisième espèce, la différence entre la somme de leurs angles et deux angles droits est proportionnelle à l'aire du triangle.

Il en résulte que, dans tout système de géométrie autre que le système usuel, l'aire du triangle ne peut dépasser un certain maximum.

Juin 1898.

SUR LA SPHÈRE ET LES QUADRIQUES DE DOUZE POINTS DU TÉTRAÈDRE GÉNÉRAL ;

par M. L. Ripert.

1. Tout triangle dont le cercle circonscrit est C a son *cercle des neuf points* C′, les centres de similitude étant l'orthocentre H (direct) et le barycentre G (inverse). D'après une remarque due à M. Brocard, la considération de ces deux centres de similitude suffit pour définir les neuf points de C′.

Tout tétraèdre *orthocentrique*, dont la sphère circonscrite est S, a une *seconde sphère de douze points* S′, les centres de similitude qui sont également l'orthocentre H et le barycentre G permettant de définir douze points de S′.

Dans le tétraèdre *général*, on peut définir une *sphère de douze points* par les mêmes considérations. En effet, la sphère S de centre O circonscrite au tétraèdre ABCD et la sphère S′ de centre O′ déterminée par les centres de gravité des faces, ont, par définition, le barycentre G pour centre de similitude inverse. Leur centre de similitude directe est le centre H de l'hyperboloïde des hauteurs, car ce point est défini par $OG = GH$, égalité qui, avec $OG = 3GO'$, entraîne $HO = 3HO'$. Donc, le théorème suivant est démontré :

Dans tout tétraèdre ABCD, *les centres de gravité des faces, les points*

situés sur les droites AH, BH, CH, DH *au tiers des distances à partir de* H, *les points situés, sur le prolongement de ces droites, au tiers des distances de* H *à la sphère circonscrite* S, *sont douze points d'une même sphère* S', *dont le rayon est le tiers de celui de la sphère* S *et dont le centre est au tiers de la distance de* H *au centre de* S.

2. On peut définir géométriquement, sur la sphère S', au moins huit autres points. Car, soit A_1 le point de rencontre de AG et de S. En prenant, sur le prolongement de A_1G, $GA' = \frac{1}{3} A_1G$, on aura un point A' de S'. Menant HA' et prenant $HA_2 = 3HA'$, on aura un point A_2 de S, qui, en menant A_2G et prenant $GA'' = \frac{1}{3} A_2G$, donnera un point A'' de S'. D'ailleurs, par chaque sommet A passent une infinité de droites remarquables (AI, AI_b, ... AL, ... et toutes les droites qui joignent A à un point remarquable du triangle BCD). Chacune de ces droites coupe S en un second point, auquel correspondent, par H, puis par G, deux points de S'. On peut donc déterminer géométriquement une infinité de points sur la sphère S'.

Il est facile de voir en outre que le cercle complémentaire (par rapport au tétraèdre) du cercle circonscrit à une face (BCD) est l'intersection de la sphère S' et du cône ayant pour sommet le sommet opposé (A) et pour directrice le cercle des neuf points de cette face (BCD). Donc, les quatre cercles de S' circonscrits aux faces du tétraèdre complémentaire sont des cercles remarquables.

3. La *première sphère de douze points* du tétraèdre orthocentrique (sphère de centre G passant par les milieux des arêtes et les pieds des perpendiculaires communes aux arêtes opposées) n'existe pas dans le tétraèdre général. Mais, par une première transformation homographique (le plan de l'infini étant conservé et une conique quelconque de ce plan se substituant au cercle de l'infini), on obtient ce théorème : *Dans tout tétraèdre, les milieux des arêtes et les pieds des conjuguées communes aux arêtes opposées, par rapport à une quadrique donnée* Σ *telle que les conjuguées des faces menées par les sommets opposés soient concourantes*(*), *sont douze points d'une même quadrique* Σ', *homothétique à* Σ *et ayant*

(*) Il existe une infinité de quadriques Σ remplissant cette condition. Ce sont celles par rapport auxquelles deux couples d'arêtes opposées (d'où résulte le troisième) sont conjuguées.

pour centre le barycentre G. On peut ensuite généraliser ce théorème en substituant au plan I de l'infini un plan arbitraire P, puis le transformer par dualité.

Lorsque l'on remplace I par P, le milieu de AB devient le conjugué harmonique du point de rencontre de AB avec P par rapport au couple de points (A, B); nous dirons, par abréviation, le *point harmonique* de AB (par rapport à P). — Le barycentre G est le centre d'homothétie (correspondant au plan d'homothétie I) des tétraèdres ABCD, A'B'C'D', A' étant le centre d'homothétie des triangles BCD, *bcd*, ce dernier ayant pour sommets les milieux des côtés de BCD. Il devient le *centre* K d'homologie *correspondant* au plan d'homologie P des tétraèdres ABCD, $A'_1B'_1C'_1D'_1$, A'_1 étant le centre d'homologie des triangles BCD, $b_1c_1d_1$, ce dernier ayant pour sommets les points harmoniques des côtés de BCD.

Deux droites sont perpendiculaires si leurs points d'intersection avec le plan I sont pôles conjugués par rapport au cercle de l'infini γ. Deux plans sont perpendiculaires si leurs droites d'intersection avec I sont polaires conjuguées par rapport à γ. Une droite et un plan sont perpendiculaires si le pied de la droite sur I est le pôle par rapport à γ, de la droite commune à P et à I. La perpendiculaire commune à deux droites est l'intersection des plans menés par chacune d'elles perpendiculairement au plan de leurs directions communes, c'est-à-dire à un plan passant par leurs pieds sur I. Toutes ces définitions subsistent lorsque l'on remplace le cercle γ du plan I par une conique Γ du plan P, le mot *conjugué* (par rapport à P, Γ) étant substitué au mot *perpendiculaire*.

Dès lors, le théorème général est le suivant : *Dans tout tétraèdre considéré par rapport à un plan* P *et à une quadrique* Σ, *qui coupe* P *suivant la conique* Γ *et qui est telle que les droites menées des sommets aux pôles, par rapport à* Γ, *des droites d'intersection de* P *et des faces opposées soient concourantes, les points harmoniques des arêtes et les pieds des conjuguées communes aux arêtes opposées sont douze points d'une même quadrique* Σ', *passant par* Γ *et par rapport à laquelle le pôle du plan* P *est son centre correspondant* K.

4. Moyennant quelques définitions (ou explications) que l'on trouve immédiatement par corrélation, le théorème corrélatif est : *Dans tout tétraèdre, considéré par rapport à un point* P *et à une quadrique* Σ,

inscrite au cône Γ *de sommet* P *et qui est telle que les droites d'intersection des faces avec les plans polaires, par rapport au cône* Γ, *des droites*(*) *de jonction de* P *et des sommets opposés soient dans un même plan, les plans harmoniques des arêtes et les plans conjugués correspondant aux couples d'arêtes opposées sont douze plans tangents à une même quadrique* Σ′, *inscrite à* Γ *et par rapport à laquelle le plan polaire de* P *est son plan d'homologie correspondant* K.

Il n'est pas difficile de trouver des généralisations et dualisations analogues pour tout théorème intéressant soit le cercle ou la sphère, soit les coniques ou quadriques considérées dans leurs relations avec la droite ou le plan de l'infini.

EXERCICES,

par M. E. N. Barisien (*Suite et fin*; voir p. 156 et 185).

26. On considère un cercle fixe O, un diamètre fixe Δ de ce cercle et une corde variable Δ′ perpendiculaire à Δ.

1° Le lieu des centres des huit cercles tangents à la fois au cercle O et aux droites Δ et Δ′ se compose de deux paraboles.

2° Si on ne considère que les quatre cercles situés d'un même côté de Δ, le lieu du centre des moyennes distances des centres de ces quatre cercles est le diamètre du cercle O perpendiculaire à Δ.

3° Pour ces quatre mêmes cercles, la somme des rayons des deux cercles tangents extérieurement à O, diminuée de la somme des rayons des deux cercles tangents intérieurement à O, est égale à quatre fois le rayon du cercle O.

27. En un point quelconque du périmètre d'une ellipse on décrit un cercle ayant pour centre ce point et de rayon quelconque. Montrer que le centre de l'hyperbole équilatère passant par les points d'intersection du cercle et de l'ellipse se trouve toujours sur une même ellipse.

(*) De même que, par rapport à une conique, un point *du plan* a une droite (et non un plan) polaire, de même, par rapport à un cône du 2e degré, un plan *passant par le sommet* a une polaire (et non un pôle). Le fait est d'ailleurs élémentaire; nous le rappelons comme exemple de la manière de lever, par l'examen de la corrélation, toute difficulté apparente.

28. Les courbes dont les équations en coordonnées rectilignes sont

$$(ab)^{n-1}(x^2+y^2)^{n+1} = (a^2x^2+b^2y^2)^n$$
$$(ab)^{n+2}(x^2+y^2)^n = (a^2x^2+b^2y^2)^{n+1}$$

ont des aires équivalentes.

29. Le lieu des points tels qu'en menant des tangentes à une ellipse donnée, le produit des distances du centre aux tangentes soit égal au produit des demi-axes de l'ellipse, se compose d'une hyperbole et d'une ellipse.

Les coefficients angulaires de ces tangentes vérifient l'équation $mm' = \pm\frac{a}{b}$.

(J. N.)

30. Mener à l'ellipse une normale telle que le cercle ayant pour diamètre la portion de normale interceptée entre les axes, soit tangent à l'ellipse.

31. Les coniques osculatrices ayant un contact du 3e ordre avec une ellipse donnée et passant par le centre de cette conique ont une aire constante.

32. Une ellipse de grandeur invariable se déplace de façon à rester tangente à une droite donnée en un point donné. Si $2a$ et $2b$ sont les axes de l'ellipse, montrer que :

1° Le lieu des centres se compose de deux ovales dont l'aire totale est $\pi(a-b)^2$.

2° Le lieu des foyers a pour aire totale $\pi a(a-b)$.

3° Le lieu des sommets du grand axe a pour aire totale $\pi a^2 + \pi(a-b)^2$.

4° Le lieu des sommets du petit axe a pour aire totale $\pi b^2 + \pi(a-b)^2$.

5° La courbe enveloppe du grand axe a pour aire totale

$$\frac{\pi b(a-b)^2(a+3b)}{8a(a+b)}.$$

6° La courbe enveloppe du petit axe a pour aire totale

$$\frac{\pi a(a-b)^2(3a+b)}{8b(a+b)}.$$

7° Le lieu des projections du point donné sur le grand axe a pour aire $\frac{\pi b^2}{a+b}$.

8° Le lieu des projections du point donné sur le petit axe a pour aire $\frac{\pi a^3}{a+b}$.

33. Le lieu des sommets des angles d'ouverture constante θ, circonscrits à une ellipse de demi-axes a et b se compose de deux ovales dont la somme des aires est $\frac{2\pi(a^2+b^2)}{\sin^2\theta}$.

34. Si une ellipse de grandeur donnée roule sur deux droites rectangulaires :

1° le lieu des foyers se compose de quatre ovales dont chacun a une aire équivalente à celle d'un cercle ayant pour rayon la demi-distance focale ;

2° le lieu des sommets du grand axe se compose de quatre ovales égaux ayant chacun pour aire celle du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre ;

3° le lieu des sommets du petit axe est formé par quatre ovales égaux ayant chacun une aire équivalente à celle du cercle décrit sur le petit axe comme diamètre.

35. On donne deux ellipses E et E′, concentriques et ayant mêmes directions d'axes. Une normale quelconque à E rencontre E′ en deux points A et B. Les normales en A et B à E′ se coupent en P. De P, on peut abaisser sur E′ deux autres normales de pieds C et D. Montrer que : 1° la droite CD enveloppe une ellipse ; 2° les tangentes à E′ en A et B se rencontrent sur une kreuzcurve.

36. Le quadruple de l'aire de la courbe, lieu des milieux des rayons de courbure d'une ellipse, est équivalent à trois fois l'aire de la développée, moins l'aire de l'ellipse.

37. Montrer que, si φ est l'angle d'anomalie excentrique en un point variable d'une ellipse, et si α est un angle constant, $2a$ et $2b$ les axes de l'ellipse, la droite

$$x(a\operatorname{tg}\alpha\sin\varphi - b\cos\varphi) + \alpha(a\sin\varphi + b\operatorname{tg}\alpha\cos\varphi) = ab(1+\sin\varphi\cos\varphi)$$

enveloppe une courbe fermée ayant pour aire

$$U = \frac{5}{8}\pi ab\cos^2\alpha.$$

38. 1° La courbe enveloppe des cordes communes à une ellipse et à

son cercle osculateur a une aire équivalente à $1\frac{1}{2}$ fois celle de l'ellipse.

2° La développée de cette enveloppe a une aire égale à 6 fois l'aire de l'ellipse plus $5\frac{1}{4}$ fois l'aire de la développée de l'ellipse.

3° Le lieu des milieux des cordes communes a son aire égale à la moitié de celle de l'ellipse.

4° La perpendiculaire élevée à la corde commune au point de contact du cercle osculateur avec l'ellipse enveloppe une développée d'ellipse.

Voir, au sujet de cette question, les N. A. M. 1873, pp. 34-40. (J. N.)

39. Parmi toutes les ellipses ayant un foyer donné F et passant par deux points donnés A et B tels que l'angle BFA soit droit : 1° quelle est celle d'aire maxima ou minima? 2° quelle est celle qui se rapproche le plus de la forme circulaire?

SUR UNE CUBIQUE CIRCULAIRE;

par M. V. Jerabek.

I. Étant données une circonférence (O) et une tangente AC, cherchons le lieu du milieu M du segment d'une tangente variable compris entre le point de contact B et la tangente fixe AC.

Si l'on prend pour axes OA et le diamètre perpendiculaire, et qu'on appelle (x,y), (x',y') les coordonnées des points M, B, on trouve facilement les équations

$$x'^2 + y'^2 = r^2, \quad xx' + yy' = r^2, \quad x = \frac{1}{2}(x' + r);$$

d'où, en éliminant x' et y' :

$$4xy^2(x - r) = -(2x^2 - rx - r^2)^2,$$

et, en supprimant le facteur $x - r$ commun aux deux membres,

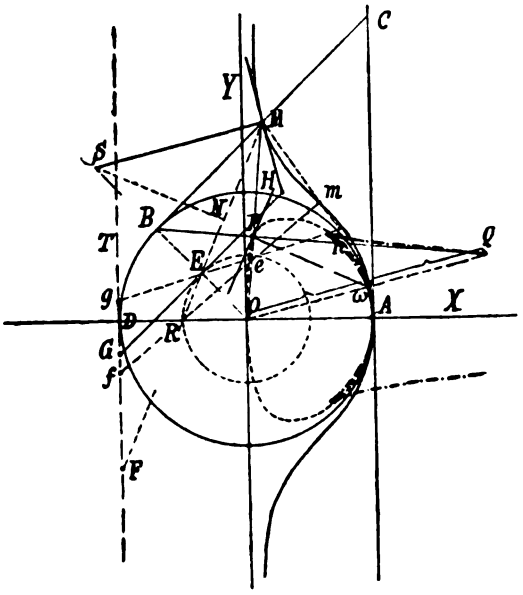
$$4x(x^2 + y^2) - 3r^2x - r^3 = 0. \qquad (1)$$

Le lieu de M est donc une cubique circulaire.

On peut démontrer géométriquement que ce lieu est une *cissoïdale*. En effet, menons la tangente T au point D diamétralement opposé à A. Les droites OC et BD étant perpendiculaires à AB sont parallèles, et si l'on mène par le milieu M de BC une parallèle à BD, elle passera par les milieux E, R des droites OB, OD et rencontrera T en un point F tel que RF = ME (les triangles FDR et MBE sont égaux). Or, le point E décrit la circonférence de centre O et de rayon $\frac{1}{2}r$, et l'on a RM = FE;

donc M décrit la cissoïdale du point R par rapport à la circonférence $(O, \frac{1}{2}r)$ et à la droite T.

II. Lorsque F s'éloigne indéfiniment sur T, M s'éloigne indéfiniment de OX en se rapprochant continuellement de OY, car les points F et M sont à des distances égales de la perpendiculaire abaissée du milieu de



RE sur OA. On arrive à la même conclusion en faisant tendre la droite BC vers T.

Si l'on écrit l'équation (1) sous forme homogène :

$$4x(x^2+y^2) = z^2r^2(3x+r),$$

on voit immédiatement que les droites

$$x=0, \quad y=x\sqrt{-1}, \quad y=-x\sqrt{-1}$$

sont des asymptotes.

Donc les droites isotropes menées par O sont des asymptotes, et O est un *foyer* de la cissoïdale.

Le point R est un point isolé de la courbe, et deux points d'inflexion correspondent à $x=\frac{1}{3}r$.

III. Cherchons la tangente au point M. L'angle ARM, égal à OAC,

vaut la moitié de l'angle AOB; par suite, la vitesse angulaire de RM tournant autour de R vaut la moitié de celle de OB tournant autour de O ou de celle de la tangente BM tournant autour de son centre instantané B. Donc, si les vitesses sont tournées de 90° autour de leurs points d'application, on peut représenter la vitesse de circulation de M autour de B par MB, et celle de M autour de R par le segment MN $= \frac{1}{2}$ MB. La règle du quadrilatère des vitesses nous conduit alors à élever en N une perpendiculaire NS sur MN, en B une perpendiculaire OB à MB; ces perpendiculaires se coupent en un point S de la normale MS.

On peut aussi appliquer la méthode des transversales réciproques, due à M. de Longchamps. Si m est un second point de la cissoïdale, et que la droite Rm coupe la petite circonférence en e, T en f, on a $fR = em$. Il en résulte que les droites Ff, Mm, transversales réciproques du triangle REe coupent le côté Ee en deux points g et h tels que $Eg = eh$. Lorsque le point m se rapproche indéfiniment de M, Ee a pour limite la tangente EG en E au cercle REe; donc T et la tangente en M doivent intercepter sur la tangente EGH des segments égaux EG = HE(*).

IV. Soit P l'intersection de la polaire de M par rapport au cercle donné, avec la droite OM. Comme on a OP. OM $= r^2$, le point P décrit la courbe inverse de la cubique circulaire (M), le pôle étant en O.

De l'équation (1), en faisant $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$, on déduit l'équation polaire de la courbe (M) :

$$4\rho^3 \cos\varphi - 3\, r^2\rho \cos\varphi - r^3 = 0;$$

puis, en remplaçant ρ par $\frac{r^2}{\rho}$, celle de la courbe (P) :

$$\rho^3 + 3\, r\rho^2 \cos\varphi - 4\, r^3 \cos\varphi = 0;$$

enfin, on déduit de là l'équation de la même courbe (P) en coordonnées rectangulaires :

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 3rx) - 4r^3x = 0.$$

Cette ligne est donc une quartique bicirculaire.

Les tangentes aux points M et P ont des directions symétriques par rapport à OM.

(*) Le lieu du point H est traité dans la question 384 (Barbarin) (*Mathesis*, 1890 (1), VI, p. 229).

V. La droite BP enveloppe une courbe qu'on peut considérer soit comme la polaire réciproque de la ligne (M), soit comme l'antipodaire de la ligne (P).

Le point de contact Q de BP peut donc s'obtenir, soit par l'intersection de cette droite avec la perpendiculaire abaissée du centre O sur la tangente MH, soit en menant par O une droite OωQ dont le milieu ω se trouve sur la normale Pω à la courbe (P).

Remarque. La polaire du point O par rapport à la ligne (M) est indiquée, en partie, sur la figure en trait mixte.

BIBLIOGRAPHIE.

Compléments d'Arithmétique et d'Algèbre, à l'usage des Classes supérieures de la section scientifique des Athenées et des Collèges, par C. Bergmans, docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur honoraire. Deuxième édition, revue, corrigée et augmentée. Gand, Hoste, 1898. (In-8° de 293 pages; autographie). Prix : 5 francs.

La première édition de cet ouvrage a paru en 1894, et a été analysée sommairement dans *Mathesis*, 1895, (2), V, p. 18. Le but de l'auteur est de mettre à la portée des jeunes gens qui se préparent aux examens d'entrée des écoles spéciales belges, les théories nouvelles (ou les procédés nouveaux d'exposition des théories anciennes) relatives aux matières du programme d'arithmétique et d'algèbre de la première et de la seconde scientifique des athénées. On trouve, en outre, dans son livre, 22 séries d'exercices qui permettent aux élèves de faire preuve d'initiative personnelle. Quelques petites notices biographiques, en piquant la curiosité des lecteurs, ont pour but de les engager à compléter leur bagage scientifique par l'étude d'ouvrages plus étendus sur l'arithmétique et sur l'algèbre.

La nouvelle édition contient une trentaine de pages de plus que la première.

Considérations sur le postulatum d'Euclide, par M. G. Tarry. Paris, 1897, (15 pages in-8; imprimé chez M. Gauthier-Villars).

Ce petit opuscule contient : 1° La démonstration des deux théorèmes de Legendre sur la somme des angles dans un triangle. 2° Le raisonnement analysé et critiqué, dans le § I de la note intitulée : *Deux nouvelles démonstrations du postulatum d'Euclide*, p. 25 de ce volume de *Mathesis*. 3° Quelques remarques sur ce que M. Tarry appelle la *géométrie du plan isotrope* et ses relations possibles avec un cas-limite de la géométrie cayleyenne.

Nouvelles tables de logarithmes à cinq décimales pour les Nombres et les Lignes trigonométriques par E. Mougin, professeur au Collège de Blois. Blois, Migault; Bruxelles, Schepens, 1898 (38 p. petit in-4° carré). Prix : fr. 1,25.

Sommaire : 1° Logarithmes de 1 à 10000 (3 pages). 2° Logarithmes des sinus

cosinus et cotangentes de minute en minute pour un quadrant (18 pages). 3° Des notices explicatives et deux tables de parties proportionnelles (7 pages). 4° Des formules mathématiques (arithmétique, algèbre, géométrie, trigonométrie, mécanique) et physiques (cosmographie, physique et chimie) (4 pages).

Les tables sont disposées d'une manière condensée très ingénieuse, trop ingénieuse peut-être.

Notions d'Algèbre à l'usage des classes élémentaires, par E. Colart, professeur à l'athénée royal et à l'École Industrielle de Huy. Bruxelles, Castaigne, 1898 (In-12 de 132 p., cartonné). Prix :

Cet ouvrage est spécialement destiné aux écoles moyennes de filles et aux écoles industrielles. Voici les matières qui y sont traitées :

Première partie. 1. Notations algébriques. 2. Transformation des égalités. 3. Théorie des proportions. Partages proportionnels. 4. Résolution des équations et des problèmes à une inconnue. 5. Applications : intérêt simple, escompte, mélanges et alliages. 6. Résolution de deux équations à deux inconnues.

Deuxième partie. I. *Calcul algébrique.* 1. Définitions. 2. Valeur numérique des polynomes. 3-5. Addition, soustraction, multiplication, division. 6. Plus grand commun diviseur et moindre multiple. 7. Fractions algébriques. II. *Équations et problèmes du premier degré* à une, à deux, ou à plus de deux inconnues. III. *Équations et problèmes du second degré.* 1. Carrés et racines carrées. 2. Résolution des équations du second degré.

Il y a des exercices à la suite de la plupart des chapitres du livre.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 971.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 216).

Soit P *un point donné dans le plan d'une ellipse* E. *Une sécante quelconque menée par* P *coupe* E *aux deux points* A, B ; *soit* N *le point de concours des normales à* E *en* A *et* B, *et soient* C *et* D *les pieds des deux autres normales issues de* N. *Démontrer que* : 1° *la corde* CD *enveloppe une parabole qui touche les axes de* E (*Si* P *est sur l'un de ces axes,* CD *passe par un point fixe*) ; 2° *Le pôle de la corde* CD *décrit une hyperbole équilatère* ; 3° *Trouver le lieu du point de rencontre des cordes* AB *et* CD. *Dans le cas où* P *est sur l'un des axes de* E, *ce lieu est une hyperbole* ; 4° *Dans la même hypothèse, le point* N *décrit une conique et le centre de l'hyperbole équilatère passant par les points* A, B, C, D *décrit également une conique.* (Déprez).

Solution par M. Cl. Servais. La droite CD joint les projections, sur les axes de E, du symétrique du pôle de AB par rapport au centre O de E. AB passant par un point fixe P, ce symétrique décrit une droite *l*, et CD enveloppe une parabole (Q) tangente aux axes. La droite AB rencontre les axes en deux points, qui sont les projections du symétrique par rapport à O, du pôle de CD. Ce symétrique décrit une hyperbole équilatère, dont les asymptotes sont parallèles aux axes de E. Le pôle de CD décrit donc une courbe identique. Si le point P est sur un axe, la droite *l* est perpendiculaire à cet axe, et la corde CD passe par le pied de cette perpendiculaire. Dans ce cas, les droites AB et CD engendrent deux faisceaux projectifs, et leur point d'intersection décrit une conique. Si AB est parallèle à l'une des diagonales du rectangle des axes, CD est aussi parallèle à cette droite; la conique est donc une hyperbole, dont les asymptotes sont parallèles aux diagonales du rectangle des axes.

Si la position de P est quelconque, le faisceau décrit par AB est projectif à la série des pôles de ces droites, ou de leurs symétriques; ce faisceau est donc projectif à la série des projections de ces derniers points sur un axe, ou bien projectif à la série des tangentes CD à la parabole (Q). Le lieu du point d'intersection de AB et CD, est donc une cubique ayant P pour point double; les tangentes en ce point sont les rayons du faisceau, correspondant aux tangentes menées de P à la parabole (Q).

Cette courbe passe par les projections du point P sur les axes. Les rayons du faisceau P qui sont parallèles aux tangentes correspondantes de la parabole, sont les parallèles menées de P aux diamètres conjugués égaux de E, et le diamètre passant par P. Les asymptotes de la cubique sont donc parallèles à ces droites.

Pour le lieu décrit par N, voir Salmon, *Sections coniques*, p. 569. Les coordonnées du centre de l'hyperbole équilatère passant par les points A, B, C, D sont

$$x_1 = \frac{a^2}{c^2}\, x_0, \quad y_1 = -\frac{b^2}{c^2}\, y_0 ,$$

(x_0, y_0) étant les coordonnées du point N. Ce centre et le point N décrivent donc des courbes, qui se correspondent dans une transformation linéaire.

Solution par MM. Barisien, Gillet, Bastin, Cristesco, Droz Farny *et* J. Jonesco. Soient Q (α, β), R (α', β') les pôles des cordes AB, CD

et x, y les coordonnées de N. Les équations des cordes AB, CD étant

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1=0, \quad \frac{\alpha' x}{a^2}+\frac{\beta' y}{b^2}-1=0,$$

celle de l'hyperbole d'Apollonius de N est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+\lambda\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1\right)\left(\frac{\alpha' x}{a^2}+\frac{\beta' y}{b^2}-1\right)=0. \qquad (1)$$

En l'identifiant avec

$$c^2xy+b^2x\mathrm{Y}-a^2y\mathrm{X}=0, \qquad (2)$$

on trouve d'abord, le terme indépendant étant nul, $\lambda=1$; ensuite,

$$\alpha\alpha'=-a^2, \quad \beta\beta'=-b^2, \qquad (3)$$

$$\frac{\alpha'\beta+\alpha'\beta}{c^2}=-\frac{\alpha+\alpha'}{\mathrm{Y}}=\frac{\beta+\beta'}{\mathrm{X}}. \qquad (4)$$

Si la corde AB tourne autour d'un point P (p, q), son pôle Q parcourt la polaire de P ; on a donc

$$\frac{p\alpha}{a^2}+\frac{q\beta}{b^2}=1, \qquad (5)$$

d'où, en éliminant α et β au moyen des relations (3),

$$\frac{p}{\alpha'}+\frac{q}{\beta'}+1=0, \text{ ou } \alpha'\beta'+p\beta'+q\alpha'=0. \qquad (6)$$

Le point R décrit donc une hyperbole qui a pour asymptotes les parallèles aux axes coordonnés menées par le symétrique de P par rapport à l'origine O.

Si l'on tire de (6) la valeur de β' pour la porter dans l'équation de la droite CD, on trouve

$$\frac{\alpha'^2x}{a^2}+\left(\frac{px}{a^2}-\frac{qy}{b^2}-1\right)\alpha'-p=0; \qquad (7)$$

l'équation de l'enveloppe de CD s'obtient en égalant à zéro le discriminant de (7) par rapport à α'. On trouve après quelques transformations

$$\frac{\sqrt{-px}}{a}\pm\frac{\sqrt{-qy}}{b}=\pm 1;$$

cette enveloppe est donc une parabole qui touche les axes coordonnés aux points symétriques des projections de P par rapport à O.

Cependant, si P est sur l'un des axes coordonnés, par exemple sur Ox, on a $q = 0$; alors l'équation (6) donne $\alpha' = -p$. Le point Q glisse donc sur une droite perpendiculaire à Ox, et CD tourne autour du pôle de cette ligne.

L'équation du lieu décrit par l'intersection des cordes AB, CD s'obtient en éliminant α, β, α', β' entre les équations de ces droites et les relations (3) et (5). On trouve

$$(qx - py)\,[b^2x\,(x - p) - a^2y\,(y - q)] = a^2b^2\,(x - p)\,(y - q);$$

le lieu est donc une cubique, qui se réduit à l'hyperbole

$$p\,(b^2x^2 - a^2y^2) - b^2\,(a^2 - p^2)\,x - a^2b^2p = 0,$$

si P est situé sur le grand axe de E.

Le lieu de N, lorsque P est sur l'axe des x, s'obtient en éliminant α, β, α', β' entre les équations (3), (4) et $p\alpha = a^2$; il a donc pour équation

$$a^2p\,(p^2 - a^2)^2\,X^2 + b^2p\,(p^2 + a^2)^2\,Y^2 - c^2\,(p^2 - a^2)^2\,X - c^4p\,(p^2 - a^2)^2 = 0.$$

C'est un cercle si $p^2 = a^2\left(\dfrac{a \pm b}{a \mp b}\right)$.

Le centre (x_0, y_0) de l'hyperbole d'Apollonius du point (X, Y) a pour coordonnées

$$x_0 = \frac{a^2}{c^2}X, \quad y_0 = -\frac{b^2}{c^2}Y;$$

par suite, ce point et N décrivent des courbes dont l'une se déduit facilement de l'autre.

Question 1060.

Voir *Mathesis* (2) t. VI, p. 80).

On donne une hyperbole équilatère et deux points A, B *de la courbe. Par ces points, on fait passer une circonférence quelconque qui rencontre la conique en deux autres points* C, D. *Trouver le lieu des secondes extrémités des cordes* CC', DD' *de cette circonférence lorsque ces droites sont parallèles à* AB, *ou à une asymptote, ou à un axe de l'hyperbole. Cas particuliers où les points* A *et* B *sont confondus, ou diamétralement opposés ou situés sur une parallèle à l'axe.* (H. Brocard).

Solution par M. R. Buysens. La perpendiculaire m élevée à la corde AB en son milieu, est le lieu du centre de la circonférence variable. Lorsque CC′ est parallèle à AB, le point C′ est le symétrique du point C et le lieu cherché est la courbe symétrique de l'hyperbole donnée par rapport à la droite m. — Si les points A et B sont situés sur une parallèle à un axe, le lieu du point C′ se confond avec la courbe donnée.

Les cordes AB et CD sont également inclinées sur les axes ; le milieu M de CD décrit le diamètre parallèle à m ; la perpendiculaire élevée en M à la corde CD coupe m au centre I du cercle variable. Appelons X, Y les points à l'infini des asymptotes, Z le point à l'infini de CD. Les ponctuelles (M), (I) étant perspectives par rapport à un point de la droite de l'infini, il en résulte que les faisceaux perspectifs X (I), Z (M) engendrent une droite n parallèle à m ; donc : *la corde* CD *rencontre le diamètre parallèle à une asymptote sur une droite fixe perpendiculaire à* AB. Cette droite est en même temps le lieu de l'extrémité C′ de la corde CC′ parallèle à l'autre asymptote. Car les droites n et CD étant également inclinées sur IX, l'un des ponts de rencondre C_1 de n et du cercle, est tel que CC_1 est perpendiculaire à IX ; par suite, C_1 et C′ sont identiques. — Si les points Aet B sont diamétralement opposés, le lieu est le diamètre perpendiculaire à AB. Lorsque les points A et B sont situés sur une parallèle à l'un des axes, le lieu est une parallèle à l'autre axe ; en effet, les ponctuelles superposées (M) et (I) projectives au faisceau de cercles sont projectives entre elles et ont un seul point double à l'infini. Cela montre en outre que le segment MI est constant.

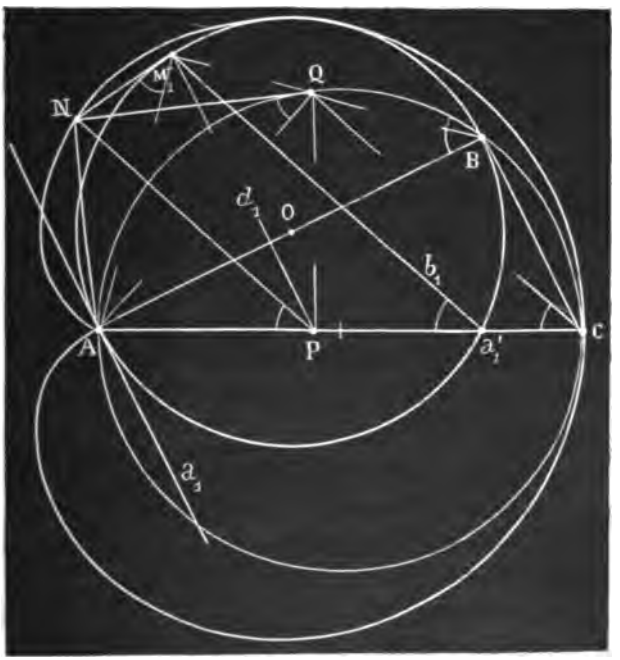
Désignons par V, W les points à l'infini des axes de l'hyperbole, par Z_1 le point à l'infini de AB. Les faisceaux Z (M), V (I), sont perspectifs et le point de rencontre L de deux rayons ZM et VI décrit une droite l parallèle à m ; donc *la corde* CD *rencontre le diamètre parallèle à un axe de l'hyperbole sur une droite fixe perpendiculaire à* AB. Si l'on mène la corde CC′ parallèle à l'autre axe, l'extrémité C′ sera le point d'intersection des droites WC et Z_1L. Le lieu cherché correspond donc à la courbe donnée dans une homologie (affinité) de centre W, d'axe l, dans laquelle Z et Z_1 sont deux points homologues. — Lorsque les points A et B sont situés sur une parallèle à un axe, la corde CC′ parallèle à cet axe, est la corde CD même ; la corde CC′ parallèle à l'autre axe vaut 2 MI ; le lieu du point C′ est donc congru à la courbe donnée.

Question 1121.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 213).

Une droite fixe a est tangente en A *à un cylindre de révolution dont l'axe est vertical ; soit a la génératrice du cylindre passant par le point diamétralement opposé à* A.

Une droite mobile b s'appuie sur a et a' et est constamment horizontale ; elle engendre un paraboloïde qui rencontre le cylindre suivant une



certaine courbe gauche. Trouver le lieu décrit par la tangente à cette courbe sur le plan horizontal mené par A. (Stuyvaert).

Solution par M. Audibert. Prenons ce dernier plan pour celui des xy, pour origine le centre O du cercle de rayon r, section droite du cylindre, et pour axe des x la droite OA. Les équations de la tangente a seront

$$x = r, \quad z = py.$$

et celles d'une des droites b,

$$y = m(x + r), \quad z = t.$$

Pour que b rencontre a, nous aurons la condition $m = \frac{t}{2rp}$, et l'équation du paraboloïde s'écrira

$$xz + rz - 2rpy = 0. \tag{1}$$

La tangente à la courbe gauche au point (x, y, z) sera représentée par les deux équations

$$zX - 2rpY + (x + r)Z + rz - 2rpy = 0,$$
$$xX + yY = r^2;$$

pour $Z = 0$, la première se réduit à

$$zX - 2rpY + rz - 2rpy = 0.$$

L'élimination de z à l'aide de (1) réduit le problème à l'élimination de x et de y entre les équations

$$Xy - Y(x + r) - xy = 0,$$
$$Xx + Yy - r^2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

La résultante est

$$r^2Y^2 = (X^2 + Y^2 - r^2)\,[(X - r)^2 + Y^2],$$

ou, en transportant l'origine au point A;

$$r^2Y^2 = (X^2 + Y^2 + 2rX)\,(X^2 + Y^2),$$

et, en coordonnées polaires,

$$\rho = r(1 - \cos\theta),$$

qui représente une conchoïde de cercle facile à construire.

Généralisation par M. Jeřabek. Nous prenons pour plan horizontal de projection le plan de la section droite du cylindre menée par A; soit O le centre de cette section. La droite donnée a se projette suivant la tangente a_1 en A au cercle O.

Au paraboloïde considéré par M. Stuyvaert, nous substituons celui qui a pour plan directeur le plan horizontal et pour directrice la tangente a projetée suivant a_1 et une génératrice quelconque a' du cylindre projetée en a'_1. Considérons la génératrice b de ce paraboloïde qui a pour projection horizontale la corde a'_1M_1 de la base. M_1 est la projection du point M où b rencontre le cylindre; ce point M_1 appartient donc à la courbe gauche, intersection du cylindre avec le paraboloïde.

Il s'agit de trouver le lieu de la trace horizontale N de la tangente MN à cette courbe.

MN est l'intersection des plans tangents menés en M au cylindre et paraboloïde. Le premier plan a pour trace horizontale la tangente en M_1 au cercle O. Le second plan passant par b, sa trace horizontale est parallèle à la droite a'_1M_1. Ce plan doit aussi contenir la seconde génératrice d du paraboloïde passant par M ; or, le second plan directeur du paraboloïde étant le plan a_1a, la projection horizontale de d est la parallèle d_1 menée par M_1 à a_1, et sa trace horizontale est le point de rencontre P de d_1 avec la génératrice Aa'_1 contenue dans le plan horizontal. D'après cela, la trace horizontale du plan tangent mené en M au paraboloïde est parallèle à a'_1M_1 et passe par P.

Le lieu (N) peut donc être construit de la manière suivante : Mener une corde quelconque a'_1M_1 du cercle O par le point fixe a'_1 ; tirer par M_1 une parallèle M_1P à a_1, puis par P une parallèle à a'_1M_1 ; cette dernière parallèle rencontre la tangente menée en M_1 au cercle O en un point N du lieu cherché.

Traçons le diamètre AOB. Les angles Aa'_1M_1 et AM_1N ayant la même mesure, l'angle $APN = AM_1N$; donc les quatre points A, N, P, M_1 appartiennent à une même circonférence. Soit Q le point où la perpendiculaire élevée en P sur Aa_1 coupe la corde BM_1. A cause des angles droits APQ et AM_1Q, le quadrilatère AM_1QP est inscriptible ; donc Q appartient à la circonférence ANM_1P. Il résulte de là que les angles APM_1 et AQM_1 sont égaux, et comme le premier est constant, il en est de même du second. Par suite, le lieu de Q est une circonférence passant par les points A et B.

Cette circonférence est tangente à la droite NQ ; car l'angle $AQN = AM_1N = ABQ$. Enfin, l'angle ANQ est droit, AQ étant un diamètre de la circonférence $APQM_1N_1$. Donc le lieu (M) est la podaire de la circonférence AQB par rapport à l'un de ses points ; c'est donc une cardioïde.

Dans la question de M. Stuyvaert, a'_1 coïncide avec B, et le cercle AQB se confond avec le cercle O.

Le lieu est encore une cardioïde quand on remplace a par une tangente au cylindre qui s'appuie sur la tangente menée par a'_1 au cercle (O).

Autre solution par M. Buysens.

Question 1158.

(Voir *Mathesis*, (2) VIII, p. 55).

D'un point M *on mène les deux tangentes à une ellipse; soient* P *et* Q *les points de contact. Trouver le lieu du point* M *tel que la circonférence* MPQ *soit tangente à l'ellipse.* (E. Lemoine).

Solution par MM. E. N. Barisien, H. Lez, Morin de la Pillière, Deprez et Soons. Si α et β sont les coordonnées du point M, l'équation de PQ est

$$b^2\alpha x + a^2\beta y - a^2b^2 = 0. \tag{1}$$

Celle de la seconde sécante d'intersection du cercle MPQ avec l'ellipse est de la forme

$$b^2\alpha x - a^2\beta y + \mu = 0. \tag{2}$$

L'équation générale d'une conique qui passe par les points d'intersection des droites (1) et (2) avec l'ellipse, s'écrit

$$\lambda(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)+(b^2\alpha x+a^2\beta y-a^2b^2)(b^2\alpha x-a^2\beta y+\mu)=0. \tag{3}$$

Les conditions pour que cette conique passe par le point M et soit un cercle sont

$$\lambda + b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 + \mu = 0, \quad \lambda b^2 + b^4\alpha^2 = \lambda a^2 - a^4\beta^2.$$

D'où l'on déduit

$$\lambda = \frac{b^4\alpha^2 + a^4\beta^2}{c^2}, \quad \mu = -\frac{a^2b^2(\alpha^2+\beta^2)}{c^2}.$$

L'équation de la seconde sécante (2) devient donc

$$b^2\alpha x - a^2\beta y = \frac{a^2b^2(\alpha^2+\beta^2)}{c^2}. \tag{4}$$

Si cette droite est tangente à l'ellipse, l'équation (4) doit être identique avec celle de la tangente au point d'angle excentrique φ :

$$bx\cos\varphi + ay\sin\varphi = ab, \tag{5}$$

ce qui donne les relations

$$\frac{b\alpha}{\cos\varphi} = \frac{-a\beta}{\sin\varphi} = \frac{ab(\alpha^2+\beta^2)}{c^2}.$$

L'élimination de φ entre ces deux équations donne immédiatement

$$(\alpha^2+\beta^2)^2 = \frac{c^4\alpha^2}{a^2} + \frac{c^4\beta^2}{b^2}.$$

Le lieu de M est donc la quartique, podaire du centre de l'ellipse dont les sommets sont les points de rebroussement de la développée de l'ellipse donnée.

Remarque. Si l'ellipse donnée est remplacée par la parabole $y^2 = 2px$, le lieu du point M est la parabole

$$\beta^2 + 2p\alpha - 2p^2 = 0. \qquad \text{(Barisien.)}$$

Solution par MM. Droz Farny *et* Déprez. Si le point M est quelconque, la circonférence MPQ coupera l'ellipse en deux autres points P' et Q' et l'on sait que le pôle M' de P'Q' appartient aussi à la circonférence. OM et OM' sont symétriquement disposés par rapport au grand axe et

$$OM \cdot OM' = c^2.$$

Si la circonférence MPQ devient tangente à l'ellipse, P'Q' est tangente à cette courbe au point M'. Soit m le symétrique de M' par rapport au grand axe; on a alors

$$OM \cdot Om = c^2.$$

Le lieu cherché est donc une inverse de l'ellipse par rapport à son centre comme pôle.

ˣQUESTIONS D'EXAMEN.

857. Démontrer les formules (*) :

$$1 - \frac{1}{4}\sin^2 2\varphi - \cos^4 \varphi = \sin^2 \varphi,$$

$$1 + \sin 2\varphi + \cos 2\varphi = 2\sqrt{2}\cos\varphi \cos(45^\circ - \varphi).$$

$$1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} 2\varphi = \sec 2\varphi, \quad \frac{2}{\operatorname{tg} 2\varphi (1 - \operatorname{tg}\varphi)} = 1 + \cot\varphi,$$

$$\frac{\cos 3\varphi}{\cos^3 \varphi} = 1 - 3\operatorname{tg}^2 \varphi, \quad \sin 3\varphi + \sin^3 \varphi = 3\cos^2 \varphi \sin \varphi.$$

$$1 - \cos\varphi \cos 3\varphi + 4\sin^4 \varphi = 5\sin^2 \varphi.$$

$$\frac{1 + \sin 2\varphi}{1 + \cos 2\varphi} = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg}\varphi)^2, \quad \frac{\cos 2\varphi}{1 - \cos 2\varphi} = \frac{1}{2}(\cot^2 \varphi - 1),$$

(*) Nous empruntons ces exercices à une dissertation de M. Fuhrmann, intitulée : *Beiträge zur Transformation algebraisch-trigonometrischer Functionen, erster Teil.* (Voir Programme du *Realgymnasium auf der Burg, Königsberg*, 1898).

$$4(\sin^6\varphi + \cos^6\varphi) = 1 + 3\cos^2 2\varphi,$$

$$\cos^8\varphi + \sin^8\varphi = \cos^2 2\varphi + \frac{1}{8}\sin^4 2\varphi.$$

$$(\cos\varphi + \sin\varphi)(\cos n\varphi + \sin n\varphi) = \cos(n-1)\varphi + \sin(n+1)\varphi$$

$$\frac{\sin 3\varphi \cos^3\varphi - \cos 3\varphi \sin^3\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = 2 + \cos 4\varphi = 1 + 2\cos^2 2\varphi.$$

$$\cos\varphi + 3\cos 3\varphi - 4\cos^3\varphi \cos 3\varphi = 2\sin\varphi \sin 4\varphi.$$

$$(\sin a - \sin b)^2 + (\cos a - \cos b)^2 = 4\sin^2\frac{a-b}{2}.$$

$$(\sin a + \sin b)^2 + (\cos a + \cos b)^2 = 4\cos^2\frac{a-b}{2}.$$

$$(\sin a - \sin b)^2 - (\cos a - \cos b)^2 = 4\cos(a+b)\sin^2\frac{a-b}{2}.$$

$$(\sin a + \sin b)(\cos a + \cos b) = 2\sin(a+b)\sin^2\frac{a-b}{2}.$$

$$\frac{(\sin^3 a - \sin^3 b)(\cos a + \cos b)}{\sin(a-b)}$$

$$= 1 + \cos a \cos b\,[1 - \cos(a+b) - \cos(a-b)\cos^2(a+b)].$$

$$\sin a \cos a + \sin b \cos b = \sin(a+b)\cos(a-b).$$

$$\frac{\sin^3 a \cos a + \sin^3 b \cos b}{\sin(a+b)} = \cos(a-b)(\sin^2 a + \sin^2 b) - \sin a \sin b.$$

$$\frac{\sin^3 a \cos b - \sin^3 b \cos a}{\sin(a-b)} = \sin^2 a + \sin^2 b + \sin a \sin b \cos(a+b).$$

858. Deux points se meuvent sur une même circonférence de rayon R. Les espaces parcourus s, s', mesurés à partir d'un même point A de la circonférence et dans le même sens, sont exprimés en fonction du temps t par les formules

$$s = at^2 + bt + c, \quad s' = a't^2 + b't + c',$$

où a, b, c, a', b', c' sont des constantes données. Déterminer le point de rencontre de ces mobiles.

Équation du problème

$$at^2 + bt + c = a't^2 + b't + c' + 2n\pi R,$$

n étant un nombre entier. Soit $a \gtrless a'$; on doit avoir

$$n \geqq \frac{4(a-a')(c-c') - (b-b')^2}{8(a-a')\pi R}, \text{ si } a > a'$$

$$n \leqq \frac{4(a-a')(c-c')-(b-b')^2}{8(a-a')\pi R}, \text{ si } a < a'.$$

Pour chaque valeur de n satisfaisant à cette inégalité, on trouve deux valeurs de t.

Si $a = a'$, $b \gtrless b'$, on a

$$t = \frac{c-c'-2n\pi R}{b'-b}, \text{ etc.}$$

859. Résoudre et discuter l'équation

$$8(1-\mu)\cos y \sin^2\frac{y}{2} - 3\cos^3 y + 2(\mu-2) = 0,$$

μ étant un paramètre variable.

En posant $\cos y = x$, $2(\mu-1) = \lambda$, on ramène l'équation à

$$(2\lambda-3)x^2 - 2\lambda x + \lambda - 2 = 0.$$

Pour que x soit réel, λ doit être compris entre 1 et 6. Si $1 < \lambda < \frac{3}{2}$, une seule valeur de x est comprise entre -1 et $+1$; si $\frac{3}{2} < \lambda < 5$, les deux valeurs absolues de x sont plus grandes que l'unité; si $5 < \lambda < 6$, les deux valeurs de x sont comprises entre -1 et $+1$.

(*Supplemento al Periodico di Matematica*).

QUESTIONS PROPOSÉES.

1188bis (*). On donne un triangle ABC et une transversale variable Δ tournant autour d'un point fixe P et coupant BC, CA, AB en A', B', C'. On considère le quadrilatère déterminé par ces quatre droites. 1° Quelle est l'enveloppe de toutes les droites de Newton (droites passant par les milieux de AA', BB', CC')? 2° Le lieu des points de Monge (intersections des circonférences de diamètres AA', BB', CC') est une quartique bicirculaire qui, lorsque le point P coïncide avec le centre du cercle circonscrit à ABC, dégénère en deux cercles, le cercle circonscrit à ABC et son cercle des neuf points. (A. Droz Farny.)

1189. On considère les triangles variables formés par un point M d'une ellipse donnée et les deux foyers F et F' de l'ellipse. La polaire

---

(*) La question 1183, p. 216, doit être supprimée, M. Stuyvaert en ayant donné d'avance une solution, dans la Note mathématique insérée dans *Mathesis*, (2) t. VII, p. 195.

du centre de l'ellipse par rapport au cercle inscrit dans le triangle MFF' enveloppe une courbe dont l'aire est

$$U = \frac{\pi c^2}{8}\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}.$$ (E. N. Barbier).

1190. On considère les paraboles tangentes à trois droites données a, b, c. Soient F le foyer de l'une de ces courbes, et A, B, C les points où elle touche a, b, c.

1° Démontrer que les droites FA, FB, FC pivotent autour de trois points fixes (Soons). 2° On mène à la parabole considérée une quatrième tangente d parallèlement à une direction fixe; D étant le point de contact, le rayon FD tourne autour d'un point fixe (Plücker). 3° Les cordes DA, DB, DC tournent autour de trois points fixes (J. N.). 4° Le point D décrit une conique. (J. N.).

1191. Etant donnés une ellipse E et le point de rencontre Q des tangentes menées aux sommets A et B, soit p la polaire d'un point P par rapport à E et soit q la polaire de Q par rapport au cercle Σ passant par le centre O de E et par les points de rencontre de p avec E. On demande le lieu de P et celui du centre de Σ, lorsque p et q sont parallèles ou perpendiculaires. (Davidoglou.)

1192. Etant donné un cycle, ou cercle dirigé, dont les tangentes sont par suite dirigées, on mène d'un point M les deux tangentes MA, MB, sur lesquelles on prend, en tenant compte des signes, $\overline{AC} = \overline{BD} = k$: la droite CD où n sera la *transformée* du point M. En changeant k en $-k$, on aura une autre droite l, qui sera appelée la *primitive* du point M, et M sera le *point transformé* de l. Démontrer que, si un point M et une droite m sont *associés*, c'est-à-dire si M est sur m, les éléments transformés n et N sont aussi associés.

Généraliser par projection conique; et montrer que, sauf la question de réalité, la construction obtenue se rapporte à la corrélation plane la plus générale. (G. Fontené).

JEAN-NICOLAS MISTER (1832-1898).

Nous avons la douleur d'apprendre aux lecteurs de *Mathesis* la mort de l'un de nos plus chers collaborateurs : JEAN-NICOLAS MISTER est décédé inopinément à Gand, le 19 octobre 1898, quelques jours après avoir été admis à l'éméritat.

MISTER naquit à Verviers, le 29 décembre 1832. Après de brillantes études moyennes dans sa ville natale, il remporta, au concours général de 1851, le second prix d'honneur pour les Mathématiques, puis il entra comme élève à l'École du Génie civil de Gand. Il en sortit, en 1856, avec le grade d'Ingénieur honoraire des Ponts et Chaussées.

De 1856 à 1867, il fut successivement professeur de mathématiques supérieures aux collèges communaux de Bouillon et de Nivelles, puis à l'athénée royal de Bruges. Les succès éclatants de ses élèves dans les concours et les examens attestèrent l'excellence de son enseignement et attirèrent sur lui l'attention du Gouvernement.

En 1867, il fut nommé répétiteur d'Analyse et de Géométrie descriptive à l'Université de Gand et chargé d'initier à la pratique de l'enseignement les élèves de l'École Normale des Sciences. Il remplit ces fonctions avec un zèle et un dévouement qui ne se démentirent jamais et il conquit un grand ascendant sur la jeunesse des Écoles.

En 1880, nommé professeur ordinaire à l'Université, il organisa pour les élèves des Écoles spéciales de Gand qui n'appartenaient pas à la section des Ponts et Chaussées, un cours d'Analyse, de Géométrie analytique et de Mécanique rationnelle. Il le fit avec un succès complet : il sut trouver pour ces élèves, parfois imparfaitement préparés, la voie la plus courte et la plus facile pour leur enseigner les parties des hautes Mathématiques indispensables à l'ingénieur.

Pendant près d'un quart de siècle, MISTER a été examinateur aux Écoles spéciales de Gand et correcteur du Concours général de l'enseignement moyen. C'était un examinateur consciencieux, tout entier à sa tâche, toujours bienveillant, même lorsqu'il devrait reprendre un récipiendaire trop peu préparé. Dans le doute, il inclinait toujours à l'indulgence.

MISTER a publié, par l'autographie, deux éditions successives de ses cours à l'Université; on lui doit aussi un assez grand nombre d'articles (dont beaucoup sans signature) publiés dans *Mathesis*, et, au début de sa carrière, dans la *Revue de l'Instruction publique en Belgique* et dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Depuis janvier 1881, jusqu'en octobre 1893 inclusivement, il a corrigé, par dévouement à notre œuvre, les épreuves de *toutes* les livraisons de *Mathesis*.

Le souvenir de MISTER vivra parmi ceux qui l'ont connu, maîtres et élèves, le souvenir d'un examinateur indulgent, d'un répétiteur habile, d'un professeur entièrement dévoué à ses devoirs, d'un savant modeste, d'un ami sûr, fidèle et plein d'aménité. Il a légué sa belle bibliothèque mathématique à l'École préparatoire du Génie civil de Gand.

(P. M. et J. N.)

*SUR LES POLYÈDRES RÉGULIERS,

par J. Wasteels, professeur à l'Athénée royal de Gand.

I. Etant donné un polyèdre régulier P, si l'on construit le polyèdre convexe Q ayant pour sommets les centres des faces de P, il est aisé de voir que ce nouveau polyèdre est également régulier.

A chaque face de P correspond un sommet de Q, et à chaque face de Q, un sommet de P ; à chaque arête de l'une des figures correspond dans l'autre une arête qui lui est perpendiculaire. Les deux polyèdres sont concentriques.

II. On peut recommencer la construction qui a été indiquée, en partant d'un polyèdre régulier Q' semblable à Q et on en déduira un polyèdre régulier P', semblable à P, puisqu'il a le même nombre de faces.

Nous dirons que *les polyèdres réguliers* P et Q (abstraction faite de leur grandeur relative et de leur position) *sont corrélatifs*. Ainsi, le cube et l'octaèdre régulier sont corrélatifs; le dodécaèdre régulier et l'icosaèdre régulier sont corrélatifs ; le polyèdre corrélatif du tétraèdre régulier est le tétraèdre régulier lui-même.

III. Soient O le centre commun des deux polyèdres dont il a été question au n° I; A un sommet de P; M, N, K,.... les centres des faces de ce polyèdre qui forment l'angle solide A ; AB l'arête commune aux faces de centres M et N, AC l'arête commune aux faces de centres N et K. Il est à remarquer que MN, NK,.... sont les côtés de la face de Q qui correspond au sommet A du premier.

On verra que l'angle MON, que nous appellerons *angle au centre* du nouveau polyèdre, est le supplément de l'angle dièdre formé par les faces de centres M et N ; que les droites MN et NK sont perpendiculaires respectivement aux plans OAB et OAC, et que, par suite, l'angle MNK est le supplément du dièdre formé par les plans OAB, OAC.

Donc, chaque angle dièdre d'un polyèdre régulier est le supplément d'un angle au centre du polyèdre correlatif, et l'angle formé par les plans de deux angles au centre correspondant à deux arêtes consécutives du premier polyèdre est le supplément de l'angle formé par deux arêtes consécutives du second polyèdre.

IV. Menons la droite OA ; elle est perpendiculaire au plan de la face MNK... et passe par son centre S. Menons encore la droite OT, T étant

le milieu de AB; cette droite rencontre MN en son milieu V et lui est perpendiculaire.

Les triangles OMA, OMS sont semblables, ainsi que les triangles OMT, OMV. On en déduit les proportions suivantes :

$$\frac{OA}{OM}=\frac{OM}{OS}=\frac{MA}{MS},\quad \frac{OM}{OV}=\frac{OT}{OM}=\frac{MT}{MV}.$$

Désignons par R, r et ρ respectivement le rayon de la sphère circonscrite au premier polyèdre, celui de la sphère inscrite et celui de la sphère tangente aux milieux des arêtes de ce polyèdre; soient R', r' et ρ' les éléments analogues du second polyèdre ; R_f, r_f les rayons des cercles circonscrit et inscrit à une face du premier polyèdre; R'_f le rayon du cercle circonscrit à une face du second polyèdre, a' une arête de ce dernier polyèdre; les proportions précédentes deviennent alors :

$$\frac{R}{R'}=\frac{r}{r'}=\frac{R_f}{R'_f}; \tag{1}$$

$$\frac{r}{\rho'}=\frac{\rho}{R'}=\frac{2r_f}{a'}. \tag{2}$$

Les proportions (1) et (2) restent vraies, si les éléments R', r', ρ', R'_f, a' se rapportent à un polyèdre quelconque semblable au second, c'est-à-dire à un polyèdre régulier corrélatif quelconque de celui dans lequel on a pris les éléments R, r, ρ, R_f, r_f.

V. *Conséquences.* I. D'après les proportions (1), *si deux polyèdres réguliers corrélatifs sont inscrits dans la même sphère, ils sont aussi circonscrits à la même sphère et les cercles circonscrits aux faces des deux polyèdres sont égaux.*

II. D'après les proportions (2), *si une sphère est tangente aux milieux des arêtes d'un polyèdre régulier et si l'on construit le polyèdre régulier corrélatif circonscrit à la même sphère, la sphère tangente aux milieux des arêtes de ce nouveau polyèdre sera en même temps circonscrite au premier; en outre, le diamètre du cercle inscrit à une face du dernier est égal à une arête du premier.*

III. Si les deux polyèdres réguliers corrélatifs sont des tétraèdres réguliers égaux, les proportions (2) deviennent (a désignant une arête d'un de ces tétraèdres) :

$$\frac{r}{\rho'}=\frac{\rho}{R}=\frac{2r_f}{a}.$$

SUR LES PUISSANCES DES NOMBRES ENTIERS,

par M. le Dr F. Mariantoni.

1. M. Barisien a fait observer (*) que la *5ième puissance d'un nombre quelconque a le même chiffre des unités que ce nombre.* On peut établir, plus précisément, que *la cinquième puissance de tout nombre entier a le même chiffre des unités que ce nombre.* En effet, cela est évident si ce chiffre est 0 ou 5; ces deux cas étant exclus, si a est un nombre premier avec 10, puisque le nombre des nombres premiers avec 10 et moindres que 10 est égal à 4, on a, par le théorème d'Euler,

$$a^4 \equiv 1 \pmod{10},$$

et par suite

$$a^5 \equiv a \pmod{10}.$$ C. Q. F. D.

Si, enfin, $a = 2^k a_1$ (a_1 premier avec 10 et $k \geq 1$), on a, par ce qui précède,

$$a_1^5 \equiv a_1 \pmod{10}$$

et, en outre, puisque $2^5 = 3.10 + 2$,

$$2^{5k} \equiv 2^k \pmod{10};$$

donc

$$a^5 \equiv a \pmod{10}.$$ C. Q. F. D.(**)

2. Nous ajouterons une observation qui découle très facilement du théorème cité d'Euler. Si x est la base d'un système de numération quelconque, pour tout nombre premier avec x, on a la propriété

$$a^{\varphi(x)+1} \equiv a \pmod{x}$$

c'est-à-dire : *un nombre premier avec x et sa puissance $\varphi(x)+1$ ont le même dernier chiffre*(***). Une propriété analogue, pour les nombres premiers avec x, aura lieu pour un exposant $n < \varphi(x)+1$ seulement dans le cas où x n'a pas de racines primitives, c'est-à-dire quand $x = p^\alpha$ ou $x = 2 . p^\alpha$ (p nombre premier impair, $\alpha \geq 2$).

(*) Voir *Mathesis* de mai 1898, p. 113.

(**) Il suffit de chercher le chiffre terminal de 2^5, 3^5,... 9^5 au moyen de multiplications successives pour démontrer directement cette formule. La démonstration précédente ne sert que d'introduction aux développements qui vont suivre.

(***) φ est la fonction de Gauss, bien connue dans la théorie des nombres. J'entends par dernier chiffre d'un nombre le chiffre des unités; les deux derniers chiffres sont celui des unités et celui des dizaines, etc.

Voyons maintenant à quelle condition le théorème susciste pour un nombre a qui n'est pas premier avec x. Soit k le produit de tous les facteurs premiers de x qui appartiennent à a, de manière que $a = ka_1$, a_1 étant premier avec x. Puisque

$$a_1^{\varphi(x)+1} \equiv a_1 \pmod{x},$$

on aura aussi

$$a^{\varphi(x)+1} \equiv a \pmod{x},$$

si

$$k^{\varphi(x)+1} \equiv k \pmod{x}.$$

Mais $k^{\varphi(x)} - 1$ ne pourrait être divisible que par un diviseur p de x qui n'entrerait pas dans k, et alors k devrait être divisible par l'autre facteur q de x. Donc : *la condition nécessaire pour que la dernière congruence se vérifie est qu'on puisse décomposer x en deux facteurs p et q, de manière que k soit multiple de q et, à la fois, premier avec p. Cette condition est aussi suffisante,* car si elle est remplie, la différence $k^{\varphi(x)} - 1$, égale à $\{k^{\varphi(q)}\}^{\varphi(p)} - 1$ est (en vertu du théorème d'Euler) divisible par p. Dans le cas de $x = 10$, cela a parfaitement lieu, mais peut bien ne pas avoir lieu en beaucoup de cas, comme, par exemple, si $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots$ et $a = p_1^{\alpha'} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots$ ($p_1, p_2, \ldots q_1, q_2 \ldots$ nombres premiers) avec $\alpha' < \alpha_1$;

3. Le théorème d'Euler peut servir à établir des propriétés des puissances des nombres, analogues aux précédentes, mais relatives à *un groupe quelconque de chiffres terminaux* de la base et de la puissance. Je me bornerai ici au cas où l'on considère les deux derniers chiffres seulement. Puisque $\varphi(100) = 40$. si a est un nombre premier avec 10, on a :

$$a^{41} \equiv a \pmod{100}$$

ou : *tout nombre premier avec 10 et sa 41ième puissance ont les mêmes deux derniers chiffres.* Si a n'est pas premier avec 10, il sera en général de la forme $2^m.5^n.a_1$ (a_1 premier avec 10), et pour que la propriété précédente ait lieu, on doit avoir

$$(2^m.5^n)^{41} \equiv 2^m.5^n \pmod{100}.$$

Mais on reconnaît aisément que cela ne peut arriver que dans ces deux cas : 1° $m \geq 2$, $n = 0$; 2° $m = 0$, $n \geq 2$; on peut donc conclure : *tout nombre qui ne se termine pas par un seul zéro a les mêmes deux derniers chiffres que sa 41ième puissance.* Ajoutons que *dans ce cas, 41 n'est pas l'exposant le plus petit qui donne lieu à une semblable propriété, car 100 n'a pas de racines primitives.*

Rien n'empêcherait de continuer ces applications dont nous avons donné un essai; cette question constituerait un exercice utile pour les étudiants.

Sondrio, juillet 1898.

×QUESTIONS D'ARITHMOLOGIE;

par M. G. DE ROCQUIGNY.

1. Le produit de deux nombres triangulaires consécutifs quelconques est : 1° la moitié d'un triangulaire; 2° la somme de deux triangulaires.

On a, en effet,

$$\frac{(n-1)n}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2(n^2-1)}{2}$$

ou

$$T_{n-1}\,.\,T_n=\frac{1}{2}T_{n^2-1}.$$

On a, également

$$\frac{(n-1)n}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(n^2-n-2)(n^2-n)}{8}+\frac{(n^2+n-2)(n^2+n)}{8}$$

ou

$$T_{n-1}.\,T_n=T_{T_{n-1}-1}+T_{T_n-1}.$$

2. Le produit de deux nombres triangulaires consécutifs de rang pair (impair) est le double d'un triangulaire.

On a :

$$\frac{(n-1)n}{2}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2-\frac{n(n+1)}{2}$$

ou

$$T_{n-1}\,.\,T_{n+1}=2.\,T_{T_n-1}.$$

3. Soient quatre nombres triangulaires consécutifs quelconques, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens diminués chacun d'une unité. On a

$$\frac{(n-2)(n-1)}{2}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\left[\frac{(n-1)n}{2}-1\right]\cdot\left[\frac{n(n+1)}{2}-1\right]$$

ou

$$T_{n-2}\,.\,T_{n+1}=(T_{n-1}-1).\,(T_n-1).$$

4. Tout carré d'un multiple de 3 est la somme d'un triangulaire, d'un carré et d'un pentagonal :

$$(3.n)^2 = \frac{2n(2n+1)}{2} + n^2 + \frac{3.(2n)^2 - 2n}{2}.$$

5. Si l'on ajoute deux nombres pentagonaux consécutifs, on obtient une somme 1° de trois trangulaires; 2° de trois carrés :

$$\frac{3n^2 - n}{2} + \frac{3(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$$

$$+\frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{2n(2n+1)}{2} = n^2 + n^2 + (n+1)^2.$$

6. Désignons par N la somme de trois carrés entiers consécutifs,

$$N = a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2.$$

Si a est plus grand que 3, N est toujours au moins d'une seconde manière la somme de trois carrés *effectifs*. En effet, a ne peut être que de l'une des formes :

$$3n-2, \quad 3n-1, \quad 3n,$$

et l'on a

$$(3n-2)^2 + (3n-1)^2 + (3n)^2 = n^2 + (n+1)^2 + (5n-2)^2;$$
$$(3n-1)^2 + (3n)^2 + (3n+1)^2 = (n-1)^2 + (n+1)^2 + (5n)^2;$$
$$(3n)^2 + (3n+1)^2 + (3n+2)^2 = (n-1)^2 + n^2 + (5n+2)^2.$$

7. On peut généraliser le n° 6 et écrire

$$(3n \quad 2r)^2 + (3n-r)^2 + (3n)^2 = n^2 + (n+r)^2 + (5n-2r)^2.$$
$$(3n-r)^2 + (3n)^2 + (3n+r)^2 = (n-r)^2 + (n+r)^2 + (5n)^2.$$
$$(3n)^2 + (3n+r)^2 + (3n+2r)^2 = (n-r)^2 + n^2 + (5n+2r)^2.$$

8. Tout bicarré entier est la somme d'un cube et de deux carrés :

$$n^4 = [2(n-1)]^2\,[2(n-1)]^3 + [2(n-1)^2 - n^2]^2.$$

Soit $n = 3$, on a

$$81 = 16 + 64 + 1.$$

En faisant $n = 2a^2 + 1$, on a

$$(2a^2+1)^4 = (4a^4 - 4a^2 - 1)^2 + (2a)^4 + (2a)^6$$

ou, un bicarré somme d'un carré, d'un bicarré et d'une puissance sixième.

9. La somme (différence) du bicarré et du cube d'un entier quelconque > 1 peut toujours être exprimée par trois nombres triangulaires *effectifs*:

$$n^4 + n^3 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2(n^2-1)}{2} + \frac{(n^2+n)(n^2+n-1)}{2}.$$

$$n^4 - n^3 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n^2(n^2-1)}{2} + \frac{(n^2-n)(n^2-n-1)}{2}.$$

Soit $n = 2$:

$$2^4 + 2^3 = 24 = 3 + 6 + 15$$
$$2^4 - 2^3 = 8 = 1 + 6 + 1.$$

10. La somme (différence) des puissances sixième et cinquième d'un entier quelconque > 1 peut toujours être exprimée par trois nombres triangulaires *effectifs* :

$$n^6 + n^5 = \frac{(n^2+n)(n^2+n-1)}{2}$$
$$+\frac{(n^3+n^2)(n^3+n^2-1)}{2} + \frac{(n^3-n)(n^3-n-1)}{2}.$$

$$n^6 - n^5 = \frac{(n^2-n)(n^2-n-1)}{2}$$
$$+\frac{(n^3-n^2)(n^3-n^2+1)}{2} + \frac{(n^3-n)(n^3-n+1)}{2}.$$

Soit $n = 2$;

$$2^6 + 2^5 = 96 = 15 + 66 + 15,$$
$$2^6 - 2^5 = 32 = 1 + 10 + 21.$$

11. On a aussi

$$n^6 + n^5 = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$+\frac{n^2(n^2-1)}{2} + \frac{(n^3-n)(n^3-n+1)}{2} + \frac{(n^3+n^2)(n^3+n^2-1)}{2}.$$

12. Le nombre $\frac{n^9 - n^2}{n-1}$ est la somme de trois triangulaires. On a

$$\frac{n^9 - n^2}{n-1} = n^2 + n^3 + n^4 + n^5 + n^6 + n^7 + n^8$$
$$= \tfrac{1}{2} n^3 (n^5 - 1) + \tfrac{1}{2} (n^4 - n^2 - n)(n^4 - n^2 - n - 1,$$
$$+ \tfrac{1}{2} (n^4 + n^3 + n^2 + n)(n^4 + n^3 + n^2 + n - 1).$$

13. La différence des puissances huitième et sixième d'un entier quelconque > 1 est une somme de deux triangulaires :

$$n^8 - n^6 = \tfrac{1}{2}(n^4 - n^3 - n^2 + n)(n^4 - n^3 - n^2 + 1)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(n^4 + n^3 - n^2 - n)(n^4 + n^3 - n^2 - n + 1).$$

14. La différence des puissances sixième et quatrième d'un entier quelconque > 1 est une somme de deux triangulaires :

$$n^6 - n^4 = \tfrac{1}{2}(n^3 + n^2 - n)(n^3 + n^2 - n - 1)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(n^3 - n^2 - n)(n^3 - n^2 - n + 1).$$

15. Le nombre $n^{2\alpha} \mp n^{\alpha+\beta} + n^{2\beta}$ est la somme de trois triangulaires.

On a :

$$n^{2\alpha} + n^{\alpha+\beta} + n^{2\beta} = \frac{n^\alpha(n^\alpha \mp 1)}{2} + \frac{n^\beta(n^\beta \mp 1)}{2}$$
$$+ \frac{(n^\alpha + n^\beta)(n^\alpha + n^\beta \mp 1)}{2},$$

$$n^{2\alpha} - n^{\alpha+\beta} + n^{2\beta} = \frac{n^\alpha(n^\alpha \mp 1)}{2} + \frac{n^\beta(n^\beta \mp 1)}{2} + \frac{(n^\alpha - n^\beta)(n^\alpha - n^\beta \mp 1)}{2}.$$

16. Tout bicarré entier est la demi-somme d'un carré, d'un cube et de la moitié d'un triangulaire :

$$n^4 = \left\{ n^2 + (2n-1)^3 + (n-1)^2[2.(n-1)^2 - 1] \right\}.\tfrac{1}{2}.$$

Soit $n = 3$:

$$3^4 = 81 = \tfrac{1}{2}(9 + 125 + 28) = \frac{162}{2} = 81.$$

SOMMATION D'UNE SÉRIE;

par M. A. Boutin.

Soit à sommer la série

$$y = u_0 + \frac{u_1 x}{1} + \frac{u_2 x^2}{1.2} + \frac{u_3 x^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{u_n x^n}{1.2.3\ldots n} + \cdots$$

$u_0, u_1, u_2 \ldots u_n \ldots$ étant les termes successifs d'une suite récurrente. Soit, pour simplifier, l'échelle de récurrence

$$(1) \qquad u_n + \alpha u_{n-1} + \beta u_{n-2} + \gamma u_{n-3} = 0.$$

La différentiation donne :

$$y' = u_1 + u_2 x + \cdots + \frac{u_{n+1} x^n}{1.2.3\ldots n} + \cdots$$

$$y'' = u_2 + u_3 x + \cdots + \frac{u_{n+2} x^n}{1.2.3\ldots n} + \cdots$$

$$y''' = u_3 + u_4 x + \cdots + \frac{u_{n+3} x^n}{1.2.3\ldots n} + \cdots$$

d'où

$$y''' + \alpha y'' + \beta y' + \gamma y = u_3 + \alpha u_2 + \beta u_1 + \gamma u_0 + \cdots$$

$$+ \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}(u_{n+3} + \alpha u_{n+2} + \beta u_{n+1} + \gamma u_n) + \cdots,$$

mais, en vertu de (1), les coefficients des différentes puissances de x sont identiquement nuls, et par suite, la fonction y satisfait à l'équation différentielle

$$y''' + \alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0 \tag{2}$$

dont l'intégration est classique.

L'équation caractéristique est

$$\rho^3 + \alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0.$$

Supposons, pour fixer les idées, que les racines de cette équation, réelles et inégales, soient r', r'', r'''.

L'intégrale générale de (2) est

$$y = ae^{r'x} + be^{r''x} + ce^{r'''x}$$

a, b, c, étant des constantes arbitraires que l'on détermine par la condition que y, y', y'' se réduisent respectivement à u_0, u_1, u_2 pour $x = 0$, ce qui donne, pour déterminer a, b, c :

$$a + b + c = u_0, \quad ar' + br'' + cr''' = u_1, \quad ar'^2 + br''^2 + cr'''^2 = u_2.$$

Exemple. Soit à sommer :

$$y = 1 - \operatorname{cotg}\alpha . x + \frac{2\operatorname{cotg}^2\alpha + 1}{1.2} x^2 - \frac{4\operatorname{cotg}^3\alpha + 3\operatorname{cotg}\alpha}{1.2.3} x^3 + \cdots$$

Les coefficients de $\frac{x^n}{1.2.3\cdots n}$ satisfaisant à la relation

$$u_n = -2u_{n-1}\operatorname{cotg}\alpha + u_{n-2},$$

ici, y satisfait à l'équation différentielle

$$y'' + 2y'\operatorname{cotg}\alpha - y = 0. \tag{3}$$

L'équation caractéristique est

$$\rho^2 + 2\rho \operatorname{cotg} \alpha - 1 = 0$$

dont les racines sont $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$ et $-\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha$. L'intégrale générale de (3) est donc

$$y = ae^{x \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha} + be^{-x \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha};$$

mais on doit avoir

$$a + b = 1, \qquad a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha - b \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha = -\operatorname{cotg} \alpha,$$

d'où $a = b = \frac{1}{2}$, et par suite

$$y = \frac{1}{2}\left(e^{x \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha} + e^{-x \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha}\right)$$

NOTES MATHÉMATIQUES.

16. *Sur la généralisation et la dualisation des propriétés de la parabole, par* M. L. Ripert. I. Une parabole P est une conique tangente à la droite i de l'infini en un point I, qui est son centre. De cette considération découlent toutes ses propriétés *descriptives;* on peut déduire toutes ses propriétés *métriques* de l'adjonction à P d'un cercle (c'est-à-dire d'une conique passant par les points cycliques I_1 et I_2 de la droite i).

II. J'appelle (pour la dénommer) *quasi-parabole ponctuelle* une conique C quelconque, considérée spécialement par rapport à une de ses tangentes s en un point N, abstraction faite du centre, des diamètres et des points à l'infini. Dans ces conditions, le point N sera dit *quasi-centre* de C; toutes les cordes passant par N seront des *quasi-diamètres.* Soient, sur la droite s (substituée à i) deux points réels ou imaginaires N_1 et N_2. Celui des quasi-diamètres qui est tel qu'à son extrémité S (*quasi-sommet*), la tangente passe par le conjugué harmonique de N par rapport à (N_1, N_2) sera dit *quasi-axe.* Soit t une tangente quelconque à C; elle coupe la tangente en S en un point G et s en un point k, dont le conjugué harmonique, par rapport à (N_1, N_2) est un point L. La droite GL passe par un point fixe F, situé sur le quasi-axe et qui sera dit *quasi-foyer* de C. La polaire de F par rapport à C sera dite *quasi-directrice.* La droite qui joint un point M de C où la tangente est m au conjugué harmonique du point mn par rapport à (N_1, N_2) sera dite *quasi-normale* en M, etc.

Dans la parabole P, SF est le quart du paramètre $2p$. En d'autres termes, un *cercle-unité* O (de rayon égal à l'unité) étant donné(*), si l'on mène OI qui rencontre le cercle en E, puis OS dont le point à l'infini est U, puis EU qui coupe SF en D, le *nombre* $2p$ est donné par :

$$\frac{p}{2} = \frac{SF}{SD} = \frac{SF.DI}{SD.FI} = (FDSI).$$

De même, pour la quasi-parabole ponctuelle C, une conique passant par N_1, N_2 et ayant pour pôle de n un point O étant prise pour *conique-unité*, si l'on mène ON qui rencontre cette conique en E, puis OS qui rencontre n en U, puis EU qui coupe SF en D, le nombre $2p = 4\,(FDSN)$ sera dit le *quasi-paramètre ponctuel* de C, etc.

III. Considérons *la même* conique C, par rapport au point N où la tangente est n, et à cause de cette permutation de (n, N) avec (N, n), appelons-la *quasi-parabole tangentielle*. La tangente n sera dite *quasi-centrale*; tous les points de n seront de *quasi-diamétraux*. Soient, passant par N, deux droites réelles ou imaginaires n_1 et n_2. Celui des quasi-diamétraux qui est tel que la seconde tangente menée par lui à C a son point de contact S sur la conjuguée harmonique de n par rapport à (n_1, n_2) sera dit *quasi-axial*. Soit T un point quelconque de C; sa jonction avec S est une droite g, et sa jonction avec N est une droite K, dont la conjuguée harmonique par rapport à (n_1, n_2) est une droite l. Le point gl est sur une droite fixe f, passant par le quasi-axial et qui sera dite la *quasi-focale* de C. Le pôle de f par rapport à C sera dit point *quasi-directeur*. Le point d'intersection d'une tangente m à C en M avec la conjuguée harmonique de la droite MN par rapport à (n_1, n_2) sera dit *quasi-normal sur m*, etc.

Pour la quasi-parabole C, une conique tangente à n_1, n_2 et ayant pour polaire de N une droite o étant prise pour *conique-unité*, si on lui mène de on une tangente e, puis que l'on prenne le point os dont la jonction à n est une droite u, puis le point eu qui, joint à sf, donne une droite d, le *nombre*

$$2P = 4\,\frac{\sin(s, f)}{\sin(s, d)}\,\frac{\sin(d, n)}{\sin(f, n)} = 4\,(fdsn)$$

sera dit le *quasi-paramètre tangentiel* de C, etc.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

IV. Les définitions qui précèdent permettent d'étendre, en les doublant par dualité, à une conique quelconque C, considérée successivement comme quasi-parabole ponctuelle ou tangentielle, toutes les propriétés spéciales de la parabole. Je citerai, comme exemples d'application, dans le tome VIII de *Mathesis*, les questions 1155, 1160, 1161 (p. 104), 1168, 1172.

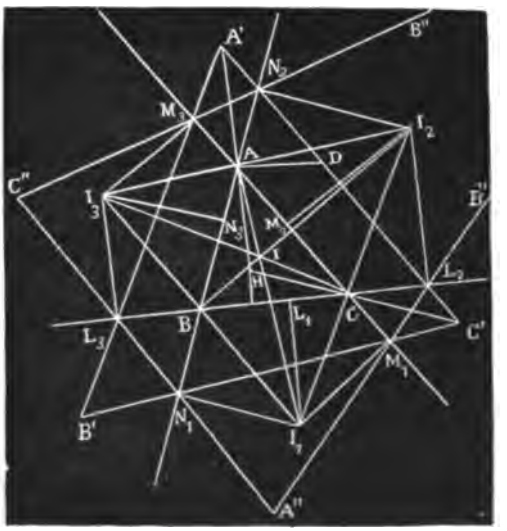
SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 789.

(Voir *Mathesis* (2), II, p. 240).

Soient (L, M, N), (L_1, M_1, N_1), (L_2, M_2, N_2), (L_3, M_3, N_3) *les points de contact des côtés* BC, CA, AB *du triangle* ABC *avec le cercle inscrit* I *et avec les cercles ex-inscrits* I_1, I_2, I_3. *Exprimer, en fonction des éléments du triangle* ABC, *les côtés et les aires du triangle formé par les droites* M_1N_1, N_2L_2, L_3M_3 *ou par les droites* N_2M_3, L_3N_1, N_1L_2, *suffisamment prolongées.*

(J. Neuberg).



Solution par M. Déprez.

1° Soit A'B'C' le triangle formé par les droites M_1N_1, N_2L_2, L_3M_3. Les propriétés de ce triangle, qui avaient fait l'objet du concours d'agrégation des sciences mathématiques en 1873, ont été démontrées par M. Gambey (N. A. M., 1874, p. 43) et par M. Neuberg (N. C. M , t. I, p. 44.) Les démonstrations suivantes sont un peu différentes.

On voit d'abord facilement que les deux triangles A'B'C' et $I_1I_2I_3$ ont

leurs côtés parallèles. Il en résulte que les angles de A'B'C' ont pour expression

$$A' = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}, \quad B' = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}, \quad C' = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}.$$

En convenant de désigner par (M, XY) la distance du point M à la droite XY, on trouve aisément

$$(A, A'C') = AN_2 \sin AN_2C' = (p - c)\cos\frac{B}{2}, \ (A, A'B') = (p - b)\cos\frac{C}{2};$$

donc

$$\frac{(A, A'C')}{(A, A'B')} = \frac{p - c}{p - b}\,\frac{\cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cot\frac{1}{2}C}{\cot\frac{1}{2}B}\,\frac{\cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C}.$$

Cherchant de même les rapports des distances du point B aux côtés de l'angle B', et du point C aux côtés de C', on trouve que les droites AA', BB', CC' concourent en un point H dont les coordonnées normales, dans le triangle A'B'C', sont proportionnelles à $\sin\frac{1}{2}A$, $\sin\frac{1}{2}B$, $\sin\frac{1}{2}B$ ou à cos A', cos B', cos C'. Donc H est le centre du cercle circonscrit au triangle A'B'C'. Il résulte de là que l'angle

$$AA'N_2 = \tfrac{1}{2}\pi - B' = \tfrac{1}{2}B;$$

mais l'angle

$$BN_2C' = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}B,$$

donc l'angle

$$A'AN_2 = BN_2C' - AA'N_2 = \tfrac{1}{2}\pi - B$$

et la droite AH est perpendiculaire à BC. Ainsi, *le centre d'homologie des triangles* A'B'C' *et* ABC *est le centre du cercle circonscrit au premier de ces triangles et l'orthocentre du second.*

Si la parallèle à BC par A rencontre A'C' en D, le triangle AN_2D est isoscèle; donc $AD = AN_2 = BL_1$. On en conclut l'égalité des triangles A'AD et I_1L_1B; par suite $AA' = I_1L_1 = r_a$. Ainsi

$$AA' = r_a, \quad BB' = r_b, \quad CC' = r_c.$$

D'après un théorème connu

$$AH = 2R + r - r_a;$$

on en conclut

$$R' = A'H = A'A + AH = 2R + r = \frac{r + r_a + r_b + r_c}{2}.$$

Connaissant les angles et le rayon du cercle circonscrit, il est facile de calculer les autres éléments des triangles A'B'C'.

Le centre d'homothétie des triangles A'B'C', $I_1I_2I_3$ est leur point de Lemoine; car les coordonnées normales de ce centre, dans l'un ou l'autre de ces triangles, sont proportionnelles aux distances des côtés homologues, distances qui ont pour expression

$$AM_1 \cos\tfrac{1}{2}A, \quad BN_2 \cos\tfrac{1}{2}B, \quad CM_3 \cos\tfrac{1}{2}C;$$

elles sont donc proportionnelles à sin A', sin B', sin C'.

2° Soit A''B''C'' le triangle formé par les droites N_2M_3, L_3N_1, M_1L_2. Les équations de ces droites, en coordonnées normales, sont

$$x \sin^2\tfrac{1}{2}A + y\cos^2\tfrac{1}{2}B + z\cos^2\tfrac{1}{2}C = 0,$$
$$x\cos^2\tfrac{1}{2}A + y\sin^2\tfrac{1}{2}B + z\cos^2\tfrac{1}{2}C = 0,$$
$$x\cos^2\tfrac{1}{2}A + y\cos^2\tfrac{1}{2}B + z\sin^2\tfrac{1}{2}C = 0.$$

Or, si les côtés d'un triangle ont pour équations

$A_1x+B_1y+C_1z=0$, $A_2x+B_2y+C_2z=0$, $A_3x+B_3y+C_3z=0$,

l'aire T et les longueurs a', b', c' des côtés sont données par les formules :

$$T = \frac{4RS^2\Delta^2}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}, \quad a' = \frac{4RS\Delta\sqrt{P_1}}{\Delta_2\Delta_3}, \text{ etc.}$$

où l'on a posé

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad \text{etc.}$$

$$P_1^2 = A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 - 2B_1C_1\cos A - 2C_1A_1\cos B - 2A_1B_1\cos C, \text{ etc.}$$

Dans la question proposée,

$$P_1 = \sqrt{1 - \sin B \sin C}, \quad \Delta = \frac{p^2 - 4R^2 - 2Rr}{4R^2},$$

$$\Delta_3 = \frac{c(2R - r_c)}{2R}, \quad \Delta_2 = \frac{b(2R - r_b)}{2R}, \quad \Delta_1 = \frac{a(2R - r_a)}{2R};$$

par conséquent,

$$S'' = \frac{S(p^2 - 4R^2 - 2Rr)^2}{2R(2R - r_a)(2R - r_b)(2R - r_c)},$$

$$a'' = \frac{a(p^2 - 4R^2 - 2Rr)\sqrt{1 - \sin B \sin C}}{(2R - r_b)(2R - r_c)}, \quad \text{etc.}$$

Remarques. 1° Les droites A'A et L_1I_1 étant égales et parallèles,

$A'L_1$ est parallèle à AI_1 et par suite perpendiculaire à $B'C'$; donc les droites $A'L_1$, $B'M_2$, $C'N_3$ sont les hauteurs du triangle $A'B'C'$. Les coordonnées barycentriques de leur point de concours, dans le triangle ABC, sont : $(b+c)\cos A$, $(c+a)\cos B$, $(a+b)\cos C$.

2° Les droites I_1L_1, I_2M_2, I_3N_3 concourent au centre O' du cercle circonscrit au triangle $I_1I_2I_3$. Les triangles AM_3N_3, AN_2M_3 étant symétriques par rapport à la bissectrice I_2I_3 de l'angle BAC, le diamètre O'A du cercle circonscrit au premier est dirigé suivant une hauteur du second ; donc le triangle $A''B''C''$ est homothétique à l'antipodaire de O' par rapport au triangle ABC.

3° Les triangles ABC, $A''B''C''$ ont pour centre d'homologie l'orthocentre de ABC.

L'axe d'homologie des triangles $A'B'C'$, $A''B''C''$ passe par les pieds des bissectrices extérieures du triangle ABC.

×Question 944.

(Voir *Mathesis* (2), IV, p. 128).

Par un point fixe P *pris à l'intérieur d'un cercle donné* (C), *on mène une corde quelconque dont les extrémités sont* A *et* B. *On décrit sur* PA *comme diamètre un cercle* (Σ) *qui rencontre le cercle* (C) *en un second point* A', *et sur* PB *comme diamètre, un cercle* (Σ') *qui rencontre* (C) *en un second point* B' :

1° *le lieu du point de rencontre des tangentes communes extérieures à* (Σ) *et* (Σ') *est une ligne droite* ;

2° *le lieu des points de rencontre des tangentes communes extérieures avec la tangente intérieure aux mêmes cercles* (Σ) *et* (Σ') *est un cercle.*

3° *la droite* A'B' *passe par un point fixe.*

4° *les deux tangentes communes extérieures et la droite* A'B' *passent par un même point.*

5° *les droites* AA' *et* BB' *se coupent sur une droite fixe.*

6° *le point de rencontre des droites* AB' *et* BA' *est un point fixe.*

(E. N. Barisien).

Solution par MM. A. Droz Farny et Jean Jonesco. I (5°). Les deux droites AA' et BB' se coupent en S. AA' étant l'axe radical des cercles

(C) et (Σ), BB′ celui des cercles (C) et (Σ′), le point S appartient à l'axe radical des cercles (Σ) et (Σ′); d'où

$$SA.SA' = SB.SB' = \overline{SP}^2.$$

Le lieu du point S est donc l'axe radical du cercle (C) et du point P, donc une perpendiculaire sur OP, à une distance OM telle que $\overline{OM}^2 - R^2 = (OM - OP)^2$. Soit $OP = d$; alors

$$OM = \frac{d^2 + R^2}{2d}.$$

II (1°). Soient c' et c'' les milieux de PA et PB. Ces deux points sont sur une circonférence fixe de rayon $\frac{1}{2}$ R ayant son centre en O′, point milieu de OP. Les deux tangentes extérieures se coupant en L, les points c', c'', P, L sont harmoniques. Le lieu de L est la polaire de P par rapport à cette circonférence; c'est donc une droite perpendiculaire sur O′P à une distance O′M telle que

$$O'M.O'P = \frac{R^2}{4}, \quad O'M = \frac{R^2}{2d}, \quad OM = \frac{R^2}{2d} + \frac{d}{2} = \frac{R^2 + d^2}{2d}.$$

Les lieux 1 et 5 fournissent la même droite.

III (2°). Si deux circonférences de rayons R′ et R″ sont tangentes extérieurement, on sait que la tangente commune intérieure comprise entre le point de contact et la tangente extérieure a pour longueur

$$t = \sqrt{R'R''}.$$

On aura donc ici

$$t^2 = Pc'.Pc'' = \frac{R^2}{4} - \overline{PO'}^2 = \frac{R^2 - d^2}{4}.$$

Le lieu cherché est donc une circonférence de centre P et de rayon $t = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - d^2}$.

IV (4°). Le point S appartenant à l'axe radical des deux circonférences Σ et Σ′, les points A′ et B′ sont antihomologues sur ces dernières et la droite A′B′ passe par le centre de similitude externe L de ces circonférences.

V (3° et 6°). Comme dans le quadrilatère inscrit AA′BB′ les paires de côtés opposés (AA′ et BB′) et (AB, A′B′) se croisent sur une droite fixe LMS, les diagonales AB′ et A′B se couperont en un point fixe π,

pôle de LMS par rapport à C. Ce point est situé sur PM. La droite A'B' coupe évidemment PM en un point fixe conjugué harmonique de P par rapport à π et à M.

Remarques. Les angles PA'A et PB'B étant droits, les cordes AA' et BB' enveloppent une ellipse ayant P et son symétrique par rapport au centre O comme foyers.

La droite qui joint les points de contact des deux cordes correspondantes AA' et BB' avec l'ellipse passe par un point fixe.

Solution analytique par MM. Bovy et Poort.

Question 1064.

(Voir *Mathesis*, (2), VI, p. 104).

On donne un triangle ABC *et une droite d. Soit* Σ *l'une quelconque des coniques passant par* A, B, C *et ayant son centre sur d. Trouver 1° le lieu du pôle de la corde* BC *de* Σ; *2° le lieu de l'intersection des normales menées à* Σ *en* B *et* C; *3° le lieu où la normale à* Σ *en* A *coupe une seconde fois la conique.* (H. Brocard).

Solution par M. Colart. 1° En prenant pour axes les droites AB et AC et posant $AC = b$, $AB = c$, on a pour équation générale des coniques circonscrites à ABC

$$y(y-b) + Bxy + Cx(x-c) = 0. \qquad (1)$$

La condition pour que le centre se trouve sur la droite $Mx + Ny + P = 0$ est

$$\begin{vmatrix} B & 2 & -b \\ 2C & B & -cC \\ M & N & P \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

D'ailleurs les équations des tangentes en B et C sont

$$by - Bcy - Cx(x-c) = 0,\ b(y-b) + Bbx - Ccx = 0 \qquad (3)$$

L'élimination de B et C entre les équations (2) et (3) donne

$$2xy(Mc + Nb + 2P) - bc(Mx + Ny + P) = 0. \qquad (4)$$

Le lieu du pôle de BC est donc une hyperbole passant par les points d'intersection de la droite d avec AB et AC, et ayant ses asymptotes parallèles à AB et AC. On vérifie aussi que cette courbe passe par le

milieu de BC et que son centre se trouve sur la parallèle à d menée par A.

2° Si l'on prend pour axe des x la droite BC et pour axe des y la perpendiculaire en son milieu, on trouve, en opérant comme dans le 1°, que le lieu du point de rencontre des normales en B et C est une quartique. Si la droite d passe par le milieu de BC, cette quartique dégénère en une hyperbole passant par B et C et dont les asymptotes sont les perpendiculaires menées, par le milieu de BC, à la droite d et à la droite BC.

3° Si l'on prend pour axes les droites AB et AC, l'équation de la normale en A est

$$cC(y + x\cos A) = b(x + y\cos A). \qquad (5)$$

En éliminant B et C entre les équations (1), (2), (5), on obtient une équation du 6° degré.

Si la droite d passe par A et par le milieu de BC, c'est-à-dire si $P = 0$ et $Mc + Nb = 0$, la condition (2) se décompose en $B = 0$, et $BM + NCc = 0$; le lieu du second point d'intersection se compose alors de deux cubiques.

Ont résolu la même question M. E. Barisien et Déprez.

Question 1132.

(Voir *Mathesis* (2) t. VII, p. 213).

Par un point fixe I *du grand axe d'une ellipse donnée, on mène une corde arbitraire* AB *dont le pôle est en* P. *Montrer que*

1° *Le lieu de l'orthocentre du triangle* PAB *est une ellipse.*

2° *L'enveloppe de ces ellipses, lorsque* I *se déplace sur le grand axe de l'ellipse donnée, se compose de deux ellipses.*

3° *Trouver le lieu du centre de gravité et du centre du cercle circonscrit du triangle* ABP. (E. N. Barisien.)

Solution par MM. V. Cristesco (Cernavoda, Roumanie), Droz Farny et Déprez. Soient (α, β) les coordonnées du pôle P. Cherchons, dans le cas général, les coordonnées de l'orthocentre H, du centre de gravité G et du centre du cercle circonscrit O.

Orthocentre H. Si l'on mène d'un point P les tangentes PA, PB à une ellipse, on sait que l'orthocentre du triangle PAB se trouve sur la polaire du point P par rapport au cercle de Monge (voir *Mathesis* (1), X, page 207, question 652).

L'équation de cette polaire est

$$\alpha x + \beta y - (a^2 + b^2) = 0,$$

et celle de la perpendiculaire abaissée de P sur la corde de contact AB est

$$a^2\beta x - b^2\alpha y - c^2\alpha\beta = 0.$$

Les coordonnées de l'orthocentre H sont donc

$$x_H = \frac{\alpha(a^2b^2 + b^4 + c^2\beta^2)}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}, \quad y_H = \frac{\beta(a^4 + a^2b^2 - c^2\alpha^2)}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}. \qquad (1)$$

Centre de gravité G. Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2) les coordonnées des points A, B. Si l'on élimine premièrement y, puis x, entre l'équation de l'ellipse et l'équation

$$b^2\alpha x + a^2\beta y - a^2b^2 = 0$$

de la corde AB, on trouve

$$\left.\begin{aligned}(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)\,x^2 - 2a^2b^2\alpha x + a^4(b^2 - \beta^2) = 0,\\ (b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)\,y^2 - 2a^2b^2\beta y + b^4(a^2 - \alpha^2) = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Les équations (2) donnent

$$x_1 + x_2 = \frac{2a^2b^2\alpha}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}, \quad y_1 + y_2 = \frac{2a^2b^2\beta}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}\ (*)$$

et, par suite, les coordonnées de G seront

$$\left.\begin{aligned}3x_G = x_1 + x_2 + \alpha = \alpha\left(1 + \frac{2a^2b^2}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}\right)\\ 3y_G = y_1 + y_2 + \beta = \beta\left(1 + \frac{2a^2b^2}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Centre O *du cercle circonscrit.* On sait que les points H, G, O sont en ligne droite, et que 2OG = GH. Par suite les coordonnées de O seront

$$2x_O = 3x_G - x_H, \quad 2y_O = 3y_G - y_H,$$

et si l'on tient compte de (1) et (3) on trouve

$$x_O = \frac{b^2\alpha(\alpha^2 + \beta^2 + c^2)}{2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)}, \quad y_O = \frac{a^2\beta(\alpha^2 + \beta^2 - c^2)}{2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)}. \qquad (4)$$

(*) On trouve aussi les coordonnées du milieu de AB en combinant l'équation de AB avec celle de la droite OP. (J. N.)

Démontrons maintenant les propriétés énoncées.

1° Soient $(m, 0)$ les coordonnées du point fixe I. Si la polaire AB passe par le point $(m, 0)$, le pôle P se trouve sur la droite $\alpha = a^2 : m$, et les coordonnées de l'orthocentre H deviennent :

$$x = \frac{m\,(a^2b^2 + b^4 + c^2\beta^2)}{a^2b^2 + m^2\beta^2}, \quad y = \frac{\beta\,[(a^2 + b^2)\,m^2 - c^2a^2]}{a^2b^2 + m^2\beta^2}.$$

En éliminant β entre ces deux relations, on trouve le lieu de l'orthocentre :

$$m\,(a^2x^2 + b^2y^2) - [(a^2 + b^2)\,m^2 + a^2c^2]\,x + m\,(a^4 - b^4) = 0. \qquad (5)$$

2° Si l'on exprime que l'équation (5) a une racine double en m, on trouve que l'enveloppe des ellipses (5) a pour équation

$$(a^2x^2 + b^2y^2 + a^4 - b^4)^2 - 4\,(a^4 - b^4)\,a^2x^2 = 0,$$

ou

$$a^2x^2 + b^2y^2 \pm 2a\sqrt{a^4 - b^4}\,x + a^4 - b^4 = 0.$$

3° Les relations (3) donnent par division

$$\beta = \frac{y}{x}\alpha;$$

en introduisant cette valeur de β dans l'une des relations (3), on trouve, après avoir remplacé α par $(a^2 : m)$, que le lieu du centre de gravité est

$$(b^2x^2 + a^2y^2)\,(a^2 - 3mx) + 2m^2b^2x^2 = 0.$$

Si l'on fait dans les relations (4) $\alpha = a^2 : m$, on obtient

$$x = \frac{b^2\,(a^4 + m^2c^2 + m^2\beta^2)}{2m\,(a^2b^2 + m^2\beta^2)}, \quad y = \frac{\beta\,(a^4 - m^2c^2 + m^2\beta^2)}{2\,(a^2b^2 + m^2\beta^2)}.$$

Tirons de la première de ces deux égalités la valeur de β, et substituons-la dans la dernière ; il vient, après avoir élevé au carré, pour le lieu du point O :

$$[(a^2 - m^2)\,x + b^2m]^2\,[a^2\,(a^2 + m^2 - 2mx) - b^2m^2] + (a^2 + m^2)^2\,b^2\,(b^2 - 2mx)\,y^2 = 0.$$

M. Degueldre a résolu la même question.

Question 1155.

(Voir *Mathesis*, (2), VIII, pp. 31 et 207).

On considère les paraboles qui touchent deux côtés AB, AC *d'un triangle et sont normales au troisième* BC. *Trouver* ... 3° *le lieu du foyer.* (J.N.)

Solution par M. J. Déprez. Soient M, N, P les points de rencontre de l'axe de l'une des paraboles avec les côtés BC, CA, AB; appelons S le sommet de la courbe, x, y et z les coordonnées normales du foyer F, $2p$ le paramètre, φ l'angle CMF. On a

$$x = \mathrm{FM}\sin\varphi = \frac{p\sin\varphi}{2\cos^2\varphi}, \qquad (1)$$

$$y = \frac{\mathrm{FS}}{\sin \mathrm{N}} = \frac{p}{2\sin(\varphi + \mathrm{C})}, \quad z = \frac{\mathrm{FS}}{\sin \mathrm{P}} = \frac{p}{2\sin(\varphi - \mathrm{B})}.$$

Entre ces trois équations, il faut éliminer p et φ. Les deux dernières donnent

$$\frac{y}{z} = \frac{\sin(\varphi - \mathrm{B})}{\sin(\varphi + \mathrm{C})}, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y\sin\mathrm{C} + z\sin\mathrm{B}}{z\cos\mathrm{B} - y\cos\mathrm{C}};$$

$$\sin\varphi = \frac{y\sin\mathrm{C} + z\sin\mathrm{B}}{\sqrt{y^2 + z^2 + 2yz\cos\mathrm{A}}}, \quad \cos\varphi = \frac{z\cos\mathrm{B} - y\cos\mathrm{C}}{\sqrt{y^2 + z^2 + 2yz\cos\mathrm{A}}}.$$

Ensuite

$$p = \frac{2yz\sin\mathrm{A}}{\sqrt{y^2 + z^2 + 2yz\cos\mathrm{A}}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), on trouve

$$x(z\cos\mathrm{B} - y\cos\mathrm{C})^2 - yz\sin\mathrm{A}(y\sin\mathrm{C} + z\sin\mathrm{B}) = 0.$$

×QUESTIONS D'EXAMEN.

860. Résoudre et discuter l'équation

$$m\sin 2x - (m^2 - m + 2)(\sin x + \cos x) + 3m - 2 = 0.$$

On trouve

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{m} \quad \text{ou} \quad \frac{(m-1)\sqrt{2}}{2}, \text{ etc.}$$

861. Si le cercle inscrit à un triangle ABC passe par le centre de gravité G, on a

$$5(a^2+b^2+c^2)=6(bc+ca+ab).$$

(E. N. Barisien).

M étant un point quelconque du plan ABC, on a

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2+3\overline{MG}^2.$$

Si M coïncide avec le centre I du cercle inscrit, on a

$$\overline{IA}^2=(p-a)^2+r^2,\cdots;\quad \text{de plus,}\quad \Sigma\overline{GA}^2=\frac{1}{3}\Sigma a^2,$$

et, par hypothèse, $IG=r$, etc.

862. On mène à une ellipse une tangente limitée en P et Q aux directrices; par P et Q, on mène les secondes tangentes. Trouver le lieu du point de rencontre de ces secondes tangentes. (Soons).

On cherche le lieu du pôle du troisième côté du triangle inscrit dont deux côtés passent par les foyers.

863. Soient A', B', C', D' les centres de gravité des faces BCD, CDA, DAB, ABC d'un tétraèdre. Si M et N sont deux points quelconques de l'espace, la somme (algébrique) des volumes des tétraèdres MNAA', MNBB', MNCC', MNAA' est nulle.

Si G est le centre de gravité de tétraèdre, la proposition revient à

$$MNGA+MNGB+MNGC+MNGD=0;$$

on a

$$(A, MNG)+(B, MNG)+(C, MNG)+(D, MNG)=0,$$

égalité connue.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1193. On considère une ellipse, un point fixe I du grand axe de l'ellipse et la corde PIP' perpendiculaire au grand axe. Par le point I, on fait passer une corde variable MIM'. Montrer que l'orthocentre, le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et le centre du cercle des neuf points de chacun des triangles MM'P et MM'P', décrivent chacun une ellipse. Cas où le point I est au centre ou à l'un des foyers de l'ellipse. (E. N. Barisien).

***1194.** Les diagonales AC, BD d'un quadrilatère inscriptible ABCD se coupant en O, appelons T_1, T_2, T_3, T_4 les triangles OAB, OCD, OBC, ODA, et V_i, H_i, G_i le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le barycentre dans le triangle T_i. Cela posé :

1° Les figures $V_1V_2V_3V_4$, $G_1G_2G_3G_4$ $H_2H_3H_2H_4$ sont des **parallélogrammes**;

2° Les droites V_1H_3, V_2H_1, V_3H_4, V_4H_2 concourent en **O et sont** respectivement perpendiculaires à DC, AB, AD, CB;

3° Les droites V_1H_1, V_2H_2, V_3H_3, V_4H_4 se coupent en un point **O'**.

Les deux parallélogrammes $V_1V_3V_2V_4$, $H_1H_3H_2H_4$ sont donc **doublement** homologiques. (E. LEMOINE).

×**1195**. Trouver les projections d'un triangle rectangle ABC, connaissant les projections de la bissectrice BD qui est ligne de plus grande pente du plan du triangle et sachant que C est dans le plan horizontal. (SOONS).

1196. Etant donnés, sur une droite, trois points A, B, C et une origine O, si l'on calcule les quatrièmes proportionnelles, d'abord aux segments OA, OB, OC, puis aux segments OB, OC, OA, enfin à OC, OA, OB, la somme des droites obtenues n'est jamais égale à OA + OB + OC, quand les points A, B, C sont tous réels, mais la propriété peut exister si deux de ces points sont imaginaires conjugués.

Par tout point O du plan d'une cubique (non situé sur la courbe), on peut mener deux droites rencontrent la cubique en des points A, B, C, qui, avec le point O jouissent de la propriété ci-dessus; ou l'on n'en peut mener aucune. (M. STUYVAERT).

Rectifications : 1° *Question* 1183 *p.* 216, au lieu de *symédianes*, lire *médianes*.

2° M. Barisien trouve que le lieu des points tels que le triangle formé par ce point et les extrémités de sa corde polaire par rapport à une ellipse donnée, ait son orthocentre sur l'ellipse, *est une sextique*. (*Mathesis* (2) VIII, p. 154). En réalité, *le lieu demandé est une ellipse concentrique à la proposée, ses axes sont dirigés suivant ceux de l'ellipse donnée*; l'équation du lieu est :

$$a^2x^2 + b^2y^2 - (a^2 + b^2)^2 = 0$$

On trouve aussi l'équation :

$$c^4x^2y^2 - a^6y^2 - b^6x^2 = 0$$

mais cette équation n'est pas l'équation du lieu vrai, c'est l'équation du lieu des pôles des cordes normales à l'ellipse donnée. (DÉPREZ).

A mentionner : p. 232, les solutions de la question 1060 par MM. Soons, Barisien et Déprez; p. 236, la solution de la question 1158 par M. Gust. Gerard; p. 212, la solution de la question 1168 par M. Mars.

LA STROPHOIDE EST UNE SECTRICE ET UNE DUPLICATRICE;

Note par M. Gino Loria, professeur à l'Université de Gênes.

Or a déjà découvert un grand nombre de belles propriétés de la strophoïde et on a aussi indiqué bien des questions où elle rend des grands services. Mais je crois qu'on n'a pas encore remarqué qu'on peut l'appliquer à la trisection d'un angle, aussi bien qu'à la solution du problème de Délos; c'est-à-dire qu'elle appartient en même temps à la classe des « courbes sectrices » et à celle des « courbes duplicatrices ». C'est ce qu'on aperçoit par une étude attentive de deux passages de l'inépuisable correspondance de Chr. Huygens.

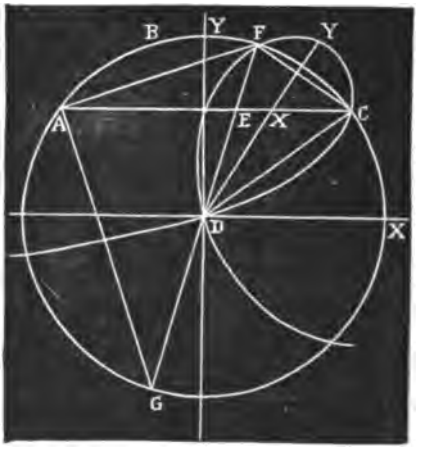


Fig. 1.

I. Dans la lettre adressée par le mathématicien allemand G. A. Kinner à Chr. Huygens le 18 juillet 1653, on lit (voir le t. I des *Œuvres complètes de Chr. Huygens*, 1888, p. 236) le procédé suivant pour diviser un angle en trois parties égales : « Soit (fig. 1) ABC l'arc donné; qu'on applique une règle passant par le centre D de cet arc de manière qu'elle coupe la corde AC en E et l'arc ABC en F de manière qu'on ait CE = CF. Je dis que l'arc CA est le triple de CF ».

Appelons, en effet, G la seconde extrémité du diamètre FD et joignons le point A aux points F et G. En posant

$$\textit{angle}\ \mathrm{CEF} = \textit{angle}\ \mathrm{CFE} = \alpha$$

on aura

$$\textit{angle}\ \mathrm{ECF} = \pi - 2\alpha; \quad \textit{angle}\ \mathrm{GEA} = \alpha;$$

$$\textit{angle}\ \mathrm{CAF} = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi - 2\alpha}{2} = \tfrac{1}{2}\ \textit{angle}\ \mathrm{ACF}.$$

Par conséquent l'arc AF est le double de CF, c'est-à-dire que CF est le tiers de AC, comme Kinner l'a avancé.

Pour appliquer cette remarque à la trisection de l'arc ABC, il est évidemment suffisant de trouver l'intersection du cercle D avec une courbe engendrée comme il suit : « Ayant tiré par le point D une transversale

arbitraire qui coupe au point X la corde AC, on prend sur cette transversale un point Y tel qu'on ait CY = CX; le lieu de Y est la courbe dont il s'agit ». Pour déterminer la nature de cette trisectrice, prenons un système de coordonnées ayant D comme origine et l'axe des x parallèle à AC. Alors si x, y sont les coordonnées de Y, a et b celles du point fixe C, $\frac{x}{y}b$ et b seront celles de X et la condition CX = CY donne l'équation

$$\left(a - \frac{x}{y}b\right)^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2,$$

ou, en divisant par $y - b$, après multiplication par y^2,

$$(x^2 + y^2)\,y + bx^2 - 2axy - by^2 = 0.$$

Comme le lieu représenté est une cubique circulaire ayant un point double à tangentes rectangulaires, la courbe trisectrice est une strophoïde. La première partie de notre assertion est donc démontrée.

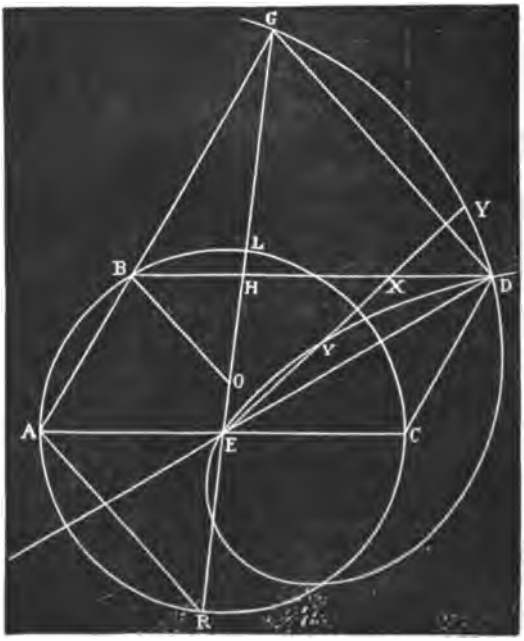


Fig. 2.

On peut ajouter que la strophoïde coupe le cercle en dehors du point C et des points circulaires à l'infini, en trois points : ce qui correspond au degré du problème de la trisection d'un arc.

II. Dans sa réponse à Kinner, envoyée le 9 août 1653, le grand géomètre hollandais fait connaître le procédé suivant pour trouver deux moyennes proportionnelles entre deux droites données (*Œuvres de Huygens*, t. I, p. 238) : « Prenons la plus grande AC des deux droites données comme diamètre d'un cercle, dont E soit le centre (fig. 2), traçons la corde AB égale à la plus petite de ces droites;

complétons le parallélogramme ACDB et conduisons par le point E une droite telle que, si G, H et L sont ses intersections avec les droites AB, BD et l'arc BC, on ait HD = HG; alors BG et GL seront les deux moyennes cherchées. »

Pour le démontrer, soit R l'extrémité du diamètre LE; menons BO parallèle à AR. Alors, comme les deux triangles BOH et ARE sont semblables et comme AE = ER, on a aussi BH = HO. Par construction, on a également HG = HD; donc OG = BD = CA = RL; si de part et d'autre, dans l'égalité GO = RL, on retranche OL, on obtient GL = OR. Or on a GR.GL = GA.GB, donc

$$\frac{GR}{GA} = \frac{GB}{GL};$$

puis, comme les triangles BGO, AGR sont semblables, on obtient

$$\frac{RG}{GA} = \frac{OG}{GB} = \frac{RG - OG}{GA - GB} = \frac{OR}{AB} = \frac{GL}{AB}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{GB}{GL} = \frac{OG}{GB} = \frac{GL}{AB};$$

et, comme OG = AC,

$$\frac{AC}{BG} = \frac{BG}{GL} = \frac{GL}{AB},$$ *q. e. d.*

Cela posé, pour tracer la transversale auxiliaire EG, il suffit de déterminer le point G. A cet effet, on peut déterminer l'intersection G de la droite AB avec le lieu qu'on obtient de la manière suivante : Sur chaque droite menée par le point E et coupant BD en X, on prend XY = XD. Or ce lieu est, par définition, la strophoïde correspondante à l'angle EDB. Donc la strophoïde est une courbe duplicatrice, comme il fallait le démontrer.

Gênes, 24 octobre 1898.

SUR LA LIMITE VERS LAQUELLE TEND UN CERTAIN TRIANGLE LOBATCHEFSKIEN ;

par M. F. Dauge, professeur émérite à l'Université de Gand.

Parmi les diverses démonstrations que Legendre a proposées pour prouver que la somme des trois angles d'un triangle rectiligne est égale

à deux droits, il en est une dont il dit « qu'elle est rigoureuse et n'exige « aucun postulatum, avantage qu'on n'avait trouvé jusqu'alors dans « aucun des livres élémentaires publiés depuis Euclide, c'est-à-dire « depuis près de deux mille ans. »

Rappelons succinctement en quoi consiste cette démonstration. Soit ABC un triangle dans lequel $AB \geqslant AC \geqslant BC$ et, par conséquent aussi, en désignant les angles par les lettres placées aux sommets, $C \geqslant B \geqslant A$ (fig. 1).

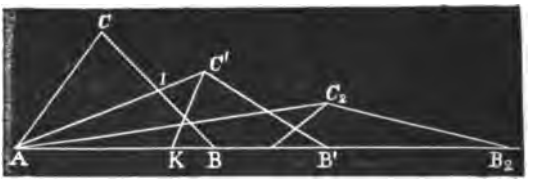


Fig. 1.

Joignons le point A au point I, milieu de BC; prenons sur cette droite $AC' = AB$ et, sur la base AB du triangle, $AK = KB' = AI$; puis joignons C'K et C'B'. Nous formons ainsi un triangle AC'B', dont nous désignerons par A' le sommet placé en A, et qui est composé des deux triangles AKC' et B'KC', respectivement égaux aux triangles ABI et ACI qui composent le triangle proposé ABC; or on a

$$C' = B + C, \quad A' + B' = A, \quad \text{d'où} \quad A' + B' + C' = A + B + C$$

et

$$A'C' = AB \geqslant AC = B'C', \quad \text{d'où} \quad B' \geqslant A';$$

par conséquent aussi

$$C' = C + B > A > B' \geqslant A' \quad \text{et} \quad A = B' + A' \geqslant 2A';$$

donc, dans le triangle A'B'C' la somme des trois angles est la même que dans le triangle primitif et on a $A' \leqslant \frac{A}{2}$, $B' < A$.

On peut alors opérer sur le triangle A'B'C' comme on a opéré sur le triangle primitif et former un troisième triangle $A_2B_2C_2$ dans lequel la somme des angles est encore $A + B + C$, avec les conditions

$$A_2 < \frac{A'}{2} \text{ et } B_2 < A', \quad \text{d'où} \quad A_2 < \frac{A}{4} \text{ et } B_2 < \frac{A}{2}.$$

En répétant n fois cette opération, on obtient un triangle $A_nB_nC_n$ dans lequel

$$A_n + B_n + C_n = A + B + C \text{ et } A_n < \frac{A}{2^n}, \quad B_n < \frac{A}{2^{n-1}}.$$

Il s'ensuit que les angles A_n et B_n tendent vers zéro; si en même temps l'angle C_n tendait vers π, la somme $A_n + B_n + C_n$ différerait de π d'une quantité moindre que toute grandeur donnée; et, puisqu'elle est égale à $A + B + C$, on pourrait en conclure que dans le triangle ABC la somme des angles vaut deux droits.

Pour prouver qu'il en est réellement ainsi, Legendre suppose fixes les deux sommets A_n et B_n et il fait remarquer que si on fait alors tourner autour de ces points les deux côtés A_nC_n et B_nC_n jusqu'à ce que les angles A_n et B_n s'annulent, le sommet C_n finit par tomber sur A_nB_n et qu'ainsi l'angle C_n devient égal à deux droits.

Mais l'illustre analyste n'a pas remarqué qu'il se plaçait ainsi dans des conditions très différentes de celles que supposait sa démonstration, puisque, dans celle-ci, la base A_nB_n du triangle tend vers l'infini.

Lobatchefsky a fait voir (*) que, si dans le triangle ABC la somme des angles était égale à $\pi - \alpha$, les angles A_n et B_n tendraient effectivement vers zéro, mais qu'il n'en serait pas de même de la distance du sommet C_n à la base A_nB_n. Si l'on désigne cette distance par h, on a, à la limite, $A_n + B_n + C_n = \pi - \alpha$ et $\text{sh}\frac{h}{2} = \cot\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$. La démonstration dont Legendre paraît avoir été si satisfait est donc fausse.

On peut se demander ce qu'elle deviendrait si on la fondait sur des considérations analogues, mais en laissant constante la base AB du triangle. Il suffit pour cela de renverser le triangle C'B'K et de le placer comme l'indique la fig. 2, ce qui s'obtient en prenant sur le prolongement de AI une longueur $IC_1 = AI$, I étant le milieu de BC et en joignant BC_1. On a ainsi un triangle ABC_1 dans lequel nous désignerons les angles par A_1, B_1, C_1, les deux premiers étant ceux dont les sommets se trouvent en A et B; nous désignerons aussi par a_1, b_1, c_1 les côtés opposés à ces angles et nous supposerons que l'on ait dans le triangle primitif $B \geqslant A \geqslant C$, d'où $b \geqslant a \geqslant c$.

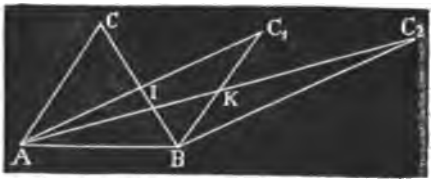


Fig. 2.

(*) *The Introduction to the Elements of Geometry*, translated from the russian, by George Bruce Halsted. — Extract from a Paper to the Texas Academy of Science. December 22, 1897, p. 5.

Les triangles BIC_1 et CIA étant égaux, on a les égalités

$$B_1 = B + C,\ A_1 + C_1 = A;\quad \text{d'où}\quad A_1 + B_1 + C_1 = A + B + C,$$

et il est aisé de voir que l'on a aussi

$$B_1 = B + C > A > A_1,\ a_1 = BC_1 = AC = b \geqslant c \text{ ou } c_1 ;$$

donc

$$B_1 > A_1 \geqslant C_1,\quad b_1 > a_1 \geqslant c_1,\quad a_1 = b.$$

Si l'on opère sur le triangle $A_1B_1C_1$ comme on a opéré sur **ABC**, on forme un troisième triangle $A_2B_2C_2$ dans lequel nous désignerons par A_2 et B_2, les angles dont les sommets se trouvent aux points fixes A et B et qui nous donne les relations

$$B_2 = B_1 + C_1,\ A_2 + C_2 = A_1,$$

d'où
$$A_2 + B_2 + C_2 = A_1 + B_1 + C_1 = A + B + C$$

et
$$B_2 > A_2 > C_2,\quad b_2 > a_2 > c_2,\quad a_2 = b_1.$$

En répétant n fois cette opération on aura, dans le triangle $A_nB_nC_n$,

$$B_n = B_{n-1} + C_{n-1},\ A_n + C_n = A_{n-1},\ A_n + B_n + C_n = A_{n-1} + B_{n-1} + C_{n-1}$$

et

$$B_n > A_n > C_n,\quad b_n > a_n > c_n,\quad a_n = b_{n-1}.$$

Montrons maintenant que le côté b_n, qui est incessamment croissant, tend vers l'infini.

Dans les triangles AKC_1, BKC_2 on a

$$AK + KC_1 > AC_1 = b_1,\quad BK + KC_2 > BC_2 = AC_1 = b_1 ;$$

d'où, en additionnant ces inégalités membre à membre

$$AC_2 + BC_1 = b_2 + a_1 = b_2 + b > 2b_1 \quad \text{ou} \quad b_2 - b_1 > b_1 - b ;$$

on trouverait de même

$$b_n - b_{n-1} > b_{n-1} - b_{n-2} ;$$

par conséquent, si on pose $b_1 - b = \delta$, on a

$$b_1 - b = \delta,\quad b_2 - b_1 > \delta,\quad b_3 - b_2 > \delta,\ \ldots\ldots,\ b_n - b_{n-1} > \delta ;$$

donc, en additionnant ces inégalités membre à membre, on trouve $b_n > b + n\delta$; et, pour n indéfiniment croissant, on a $\lim b_n = \infty$.

Le sommet C_n du triangle s'éloignant jusqu'à l'infini, tandis que les deux autres sommets restent fixes, on doit en conclure que l'angle C_n tend vers zéro, les deux côtés A_nC_n et B_nC_n devenant parallèles à la limite. De plus, l'angle A_n du triangle et l'angle extérieur $\pi - B_n$ sont

indéfiniment décroissants; on pourrait donc croire qu'ils tendent vers zéro et qu'à la limite les deux côtés A_nC_n et B_nC_n se confondent avec AB prolongé. Cela est vrai effectivement en géométrie euclidienne et, si l'on pouvait prouver qu'il en est toujours ainsi, le postulatum d'Euclide serait démontré; mais quand on n'admet pas le postulatum, ces angles tendent vers des limites différentes de zéro et que nous nous proposons de déterminer (*).

Observons que, dans l'hypothèse où nous nous plaçons, la somme des angles du triangle ABC peut être moindre que deux droits; nous supposerons donc

$$A_n + B_n + C_n = \pi - \alpha$$

et nous devrons alors faire usage des formules trigonométriques de Lobatchefsky.

Nous avons d'abord

$$\sin C_n = \frac{\operatorname{sh} c_n \sin A_n}{\operatorname{sh} a_n};$$

or le facteur $\operatorname{sh} c_n$ est constant; $\sin A_n$ est plus petit que l'unité et $\operatorname{sh} a_n$ tend vers l'infini quand n croît indéfiniment; donc C_n tend vers zéro, ce qui confirme ce que nous avons déjà dit plus haut; il résulte encore de là que $\lim (A_n + B_n) = \pi - \alpha$. Nous conviendrons d'écrire, pour abréger, A_∞, B_∞, $C_\infty = 0$ au lieu de $\lim A_n$, $\lim B_n$ et $\lim C_n$.

Remarquons maintenant que l'on a

$$\cos C_n = -\cos A_n \cos B_n + \sin A_n \sin B_n \operatorname{ch} c;$$

mais

$$\cos C_\infty = 1, \quad \cos B_\infty = \cos(\pi - A_\infty - \alpha) = -\cos(A_\infty + \alpha),$$
$$\sin B_\infty = \sin(A_\infty + \alpha).$$

Donc, il vient successivement

$$1 = \cos A_\infty \cos(A_\infty + \alpha) + \sin A_\infty \sin(A_\infty + \alpha) \operatorname{ch} c,$$
$$1 = \cos(2A_\infty + \alpha) + \sin A_\infty \sin(A_\infty + \alpha)(\operatorname{ch} c + 1),$$

$$\sin^2\left(A_\infty + \frac{\alpha}{2}\right) = 4 \sin \tfrac{1}{2} A_\infty \cos \tfrac{1}{2} A_\infty \sin \tfrac{1}{2}(A_\infty + \alpha) \cos \tfrac{1}{2}(A_\infty + \alpha) \operatorname{ch}^2 \frac{c}{2},$$

$$\sin^2\left(A_\infty + \frac{\alpha}{2}\right) = \left[\sin\left(A_\infty + \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\frac{\alpha}{2}\right]\left[\sin\left(A_\infty + \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\frac{\alpha}{2}\right] \operatorname{ch}^2 \frac{c}{2},$$

(*) La présente note servira de rectification à une petite erreur qui s'est glissée dans notre *Cours de Méthodologie mathématique*, p. 187, l. 1, en remontant.

$$\sin^2\left(A_\infty+\frac{\alpha}{2}\right)=\left[\sin^2\left(A_\infty+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right]\operatorname{ch}^2\frac{c}{2},$$

$$\sin\left(A_\infty+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{th}\frac{c}{2}}.$$

Il est aisé de voir que l'on pourrait, dans ces formules, permuter les lettres A_∞ et B_∞ et que l'on obtiendrait ainsi

$$\sin\left(B_\infty+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{th}\frac{c}{2}}.$$

On trouve donc pour les angles $A_\infty+\frac{\alpha}{2}$ et $B_\infty+\frac{\alpha}{2}$ le même sinus et, en effet, ces angles sont supplémentaires; le premier est aigu et le second obtus.

On a vu que les côtés a_n et b_n tendent vers l'infini et on trouvera sans peine la limite vers laquelle tend la différence $b_n - a_n$; on a

$$\operatorname{ch} c=\operatorname{ch} a_n \operatorname{ch} b_n-\operatorname{sh} a_n \operatorname{sh} b_n \cos C_n=\operatorname{ch}(b_n-a_n)+\operatorname{sh} a_n \operatorname{sh} b_n(1-\cos C_n);$$

on a aussi

$$\frac{\operatorname{sh} a_n \cdot \operatorname{sh} b_n}{\sin A_n \sin B_n}=\frac{\operatorname{sh}^2 c}{\sin^2 C};$$

d'où

$$\operatorname{sh} a_n \operatorname{sh} b_n (1-\cos C_n)=\frac{\sin A_n \cdot \sin B_n \operatorname{sh}^2 c}{2\cos^2\frac{1}{2}C_n}.$$

Mais $C_\infty = 0$, d'où $\cos\frac{1}{2}C_\infty = 1$, et nous avons trouvé aussi

$$\sin A_\infty \sin B_\infty = \sin A_\infty \sin(A_\infty+\alpha)=\frac{\sin^2\left(A_\infty+\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{ch}^2\frac{c}{2}}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sh}^2\frac{c}{2}};$$

donc on a, à la limite,

$$\operatorname{ch}(b_\infty-a_\infty)=\operatorname{ch} c-\frac{\operatorname{sh}^2 c}{2}\cdot\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sh}^2\frac{c}{2}}=2\operatorname{ch}^2\frac{c}{2}-1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ch}^2\frac{c}{2};$$

$$\operatorname{ch}(b_\infty - a_\infty) = 2\operatorname{ch}^2\frac{c}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\,;$$

$$\operatorname{ch}\tfrac{1}{2}(b_\infty - a_\infty) = \operatorname{ch}\frac{c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\,.$$

En géométrie euclidienne on a $\alpha = 0$, $b_\infty - a_\infty = c$.

On peut encore se proposer de trouver ce que devient, à la limite, la perpendiculaire abaissée du sommet C_n sur la base A_nB_n du triangle.

A cet effet, remarquons que, si on désigne par P_n le pied de cette perpendiculaire, on a dans le triangle rectangle $C_nP_nA_n$,

$$\operatorname{th} A_nP_n = \operatorname{th} b_n \cos A_n.$$

Or, à la limite, $\operatorname{th} b_n = 1$; donc $lim.\ \operatorname{th} A_nP_n = \cos A_\infty$.

D'autre part, si l'on désigne par p la distance du point A au point de la droite AB où il faut élever sur celle-ci une perpendiculaire pour obtenir la parallèle à $A_\infty C_\infty$, on sait que l'on a $\operatorname{th} p = \cos A_\infty$; d'où $\lim A_nP_n = p$. La perpendiculaire C_nP_n devient donc, à la limite, parallèle aux côtés $A_\infty C_\infty$ et $B_\infty C_\infty$, comme il était facile de le prévoir, et le pied de cette perpendiculaire tombe à une distance p du point A donnée par la relation $\operatorname{th} p = \cos A_\infty$.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES.

*Question 1649.

(Voir *Mathesis*, (2) V, p. 280).

Résoudre et discuter le système

$$\sin y \cos z = \sin a, \quad \sin z \cos x = \sin b, \quad \sin x \cos y = \sin c.$$

(J. Neuberg).

Solution par M. H. Mandart. Désignons par λ, μ, ν les sinus de x, y, z; par l, m, n ceux de a, b, c. Les équations proposées prendront la forme

$$\mu^2(1-\nu^2) = l^2, \quad \nu^2(1-\lambda^2) = m^2, \quad \lambda^2(1-\mu^2) = n^2. \qquad (a)$$

En en faisant la somme, puis le produit, on obtient

$$\Sigma\lambda^2 - \Sigma\mu^2\nu^2 = \Sigma l^2, \qquad (1)$$

$$\lambda^2\mu^2\nu^2(1 - \Sigma\lambda^2 + \Sigma\mu^2\nu^2 - \lambda^2\mu^2\nu^2) = l^2m^2n^2. \qquad (2)$$

La dernière équation, si l'on tient compte de (1), se réduit à

$$\rho^4 - (1 - \Sigma l^2)\,\rho^2 + l^2 m^2 n^2 = 0$$

où ρ représente le produit $\lambda\mu\nu$; par conséquent,

$$2\rho^2 = 1 - \Sigma l^2 \pm \sqrt{(1 - \Sigma l^2)^2 - 4\, l^2 m^2 n^2}. \qquad (4$$

Si l'on ajoute membre à membre les équations

$$\lambda^2\mu^2(1 - \nu^2) = l^2\lambda^2, \quad \lambda^2(1 - \mu^2) = n^2,$$

il vient

$$\lambda^2(1 - l^2) = n^2 + \rho^2;$$

on en conclut

$$2\sin^2 x \cos^2 a = 1 - l^2 - m^2 + n^2 \pm \sqrt{(1 - \Sigma l^2)^2 - 4\, l^2 m^2 n^2}.$$

Autre solution. En tirant des deux dernières équations (a) les valeurs de μ^2 et ν^2 pour les porter dans la première, on trouve

$$(1 - l^2)\,\lambda^4 - (1 - l^2 - m^2 + n^2)\,\lambda^2 + n^2(1 - m^2) = 0. \qquad (5$$

Il résulte de là

$$2\sin^2 x \cos^2 a = 1 - l^2 - m^2 + n^2 \pm \sqrt{\mathrm{R}},$$

après avoir posé

$$\mathrm{R} = (1 - \Sigma l^2)^2 - 4\, l^2 m^2 n^2$$
$$= (1 - \Sigma l^2 + 2lmn)(1 - \Sigma l^2 - 2lmn).$$

Le premier facteur de R se transforme successivement en :

$$1 - \sin^2 b - \sin^2 c + \sin^2 b \sin^2 c - (\sin a - \sin b \sin c)^2,$$
$$\cos^2 b \cos^2 c - (\sin a - \sin b \sin c)^2,$$
$$[\cos(b + c) + \sin a]\,[\cos(b - c) - \sin a];$$

le second a pour valeur

$$[\cos(b - c) + \sin a]\,[\cos(b + c) - \sin a].$$

Donc R s'annule lorsque $\pm a = \frac{1}{2}\pi - (b \pm c) + 2k\pi$, ou que $a \pm b \pm c = \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$. On voit aussi, en faisant varier a d'une manière continue, que R peut être positif ou négatif.

Les termes extrêmes de l'équation (5) étant positifs, les deux valeurs de λ^2 seront positives si l'on a

$$\mathrm{R} > 0, \quad 1 - l^2 - m^2 + n^2 > 0.$$

La dernière égalité revient à

$$\cos^2 c < \cos^2 a + \cos^2 b.$$

Les deux valeurs de μ^2 et de ν^2, pour qu'elles soient positives, exigent $R > 0$ et

$$\cos^2 a < \cos^2 b + \cos^2 c, \quad \cos^2 b < \cos^2 a + \cos^2 c.$$

Si $\cos^2 a > \cos^2 b > \cos^2 c$, il suffit de poser

$$R > 0, \quad \cos^2 a < \cos^2 b + \cos^2 c.$$

Il faudrait encore exprimer que les deux valeurs de λ^2 sont comprises entre 0 et 1. Or, le premier membre de (5) prend des valeurs positives pour $\lambda^2 = 0$ et pour $\lambda^2 = 1$; donc les deux racines sont comprises entre 0 et 1 ou toutes deux plus grandes que 1. Dans le premier cas, l'une des racines est comprise entre 0 et la demi-somme des racines, la seconde entre cette demi-somme et 1; donc si l'on remplace λ^2 par la demi-somme, le premier membre de (5) doit prendre le signe —. Mais si l'on remplace λ^2 par $-\frac{B}{2A}$ dans $A\lambda^4 + B\lambda^2 + C$, on trouve $\frac{4AC - B^2}{4A}$, de sorte que l'on doit poser $B^2 - 4AC > 0$, c'est-à-dire $R > 0$. Ainsi, les conditions trouvées ci-dessus sont suffisantes.

L'équation (3) semble imposer une nouvelle condition

$$\Sigma l^2 < 1, \text{ ou } \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c > 2.$$

Si celle-ci est vérifiée, on a, *à plus forte raison*,

$$1 - l^2 - m^2 + n^2 > 0, \quad 1 - m^2 - n^2 + l^2 > 0, \text{ etc. (J. N.).}$$

***Question 1051.**

(Voir *Mathesis* (2), tome VI, p. 82).

A un triangle donné ABC, *on inscrit un triangle quelconque* A'B'C' *et on circonscrit un triangle* A''B''C'' *dont les côtés sont respectivement parallèles à ceux de* A'B'C'. 1° *On a*

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{C''A}{AB''}, \quad \frac{CB'}{B'A} = \frac{A''B}{BC''}, \quad \frac{AC'}{C'B} = \frac{B''C}{CA''}.$$

2° *Si* A', B', C' *sont les pieds des bissectrices intérieures du triangle* ABC, *et que la parallèle par* A'' *à* B'C' *rencontre* AB *en* M, AC *en* N, *on a*

$$MA'' = A''N, \quad MB = BC = CN,$$

$$\overline{MN}^2 = a^2(3 - 2\cos A + 2\cos B + 2\cos C) = a^2(1 + 8\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C).$$

(J. Neuberg).

Solution par MM. Colart, Francq, Droz Farny, Delahaye et Brien. 1° La figure donne

$$\frac{BA'}{A'C'} = \frac{\sin BC'A'}{\sin B}, \quad \frac{A'C}{A'B'} = \frac{\sin A'B'C}{\sin C},$$

d'où, par division,

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{A'C'.\sin BC'A'.\sin C}{A'B'.\sin A'B'C.\sin B} = \frac{\sin A'B'C'.\sin BC'A'.\sin C}{\sin A'C'B'.\sin A'B'C.\sin B} \quad (1)$$

D'autre part,

$$\frac{C''A}{AB} = \frac{\sin ABC''}{\sin BC''A}, \quad \frac{AB''}{AC} = \frac{\sin ACB''}{\sin AB''C},$$

d'où, par division,

$$\frac{C''A}{AB''} = \frac{AB.\sin AB''C.\sin ABC'}{AC.\sin BC''A.\sin ACB''} = \frac{\sin AB''C.\sin ABC''.\sin C}{\sin BC''A.\sin ACB''.\sin B}. \quad (2)$$

On voit aisément que les expressions (1) et (2) sont identiques.

2° Les triangles semblables MBA'', ABC'', puis les triangles semblables NCA'', ACB'' donnent

$$\frac{MA''}{BA''} = \frac{AC''}{BC''}, \quad \frac{NA''}{CA''} = \frac{AB''}{CB''},$$

d'où, par division,

$$\frac{MA''}{NA''} = \frac{AC''.BA''.CB''}{AB''.BC''.CA''} = \frac{A'B.B'C.C'A}{CA'.AB'.AC'} = 1.$$

Donc $$MA'' = NA''.$$

Ensuite, les triangles semblables MBA'', ABC'' donnent

$$MB = \frac{AB.BA''}{BC''}.$$

Donc

$$\frac{MB}{BC} = \frac{AB}{BC}.\frac{BA''}{BC''} = \frac{AB'}{B'C}.\frac{BA''}{BC''} = 1.$$

Donc $MB = BC = a$.

On trouverait de même $NC = BC = a$.

En troisième lieu,

$$\begin{aligned}\overline{MN}^2 &= (a+c)^2 + (a+b)^2 - 2(a+c)(a+b)\cos A \\ &= 2a^2 + (b^2 + c^2 - 2bc\cos A) + 2a(c - b\cos A) + \\ &\qquad 2a(b - c\cos A) - 2a^2\cos A \\ &= a^2(3 + 2\cos B + 2\cos C - 2\cos A) = \\ &\qquad a^2(1 + 8\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C).\end{aligned}$$

Remarques I. L'égalité MA″ = NA″ a lieu chaque fois que ABC et A′B′C′ sont deux triangles homologiques. (Colart).

II. La première partie de la question donne un moyen simple d'inscrire à un triangle ABC un triangle A′B′C′ dont on connaît les inclinaisons des côtés sur ceux du triangle ABC. Il suffit, en effet, de circonscrire ABC le triangle A″B″C″ semblable à A′B′C′, puis, par partages proportionnels, de trouver les sommets A′, B′ et C′. (Colart).

III. Les constructions des triangles A′B′C′, A″B″C″ et de la droite MN restant les mêmes, si les droites AA′, BB′, CC′ concourent en un point P dont les coordonnées normales absolues dans le triangle ABC sont x, y, z, on a :

1° $$MA'' = NA'';$$

2° $$MB.z = NC.y = BC.x;$$

3° $$\overline{MN}^2 = \frac{a^2}{y^2z^2}[\Sigma x^2y^2 + 2xyz(y\cos B + z\cos C - x\cos A)].$$

(Déprez).

Question 1052.

(Voir *Mathesis* (2) t. VI, p. 32).

Par le sommet A *d'une ellipse on mène une corde quelconque* AB. *Trouver l'enveloppe de la circonférence qui touche la droite* AB *en* B *et qui a son centre sur l'axe* OA *de l'ellipse.* (Déprez).

Solution par M. Seligmann. Soit l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Menons BN perpendiculaire sur la corde AB; le point N de rencontre avec l'axe OA sera le centre de la circonférence touchant la droite AB en B, et le rayon sera égal à NB. Soient x_1, y_1 les coordonnées du point B et soit α la distance ON ; on aura

$$\alpha = x_1 - \frac{y^2}{a - x}, \quad R^2 = y_1^2 + (x_1 - \alpha)^2, \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

L'équation du cercle sera

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = R^2,$$

ou en éliminant α_1, y_1 et R entre ces équations,

$$c^2x_1^2 - 2(c^2x + ab^2)x_1 + a^2x^2 + 2b^2ax + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Comme elle est du second degré par rapport au *paramètre* variable x_1,

il suffit d'égaler à zéro son discriminant pour avoir l'enveloppe du cercle mobile. On trouve

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2}{c^2},$$

équation d'une ellipse semblable et concentrique à l'ellipse donnée.

Ont résolu la même question MM. BROCARD, BARISIEN, SOONS, DROZ FARNY et COLART.

***Question 1057.**

(Voir *Mathesis* (2), VI, p. 56).

Si p est un nombre premier,

$$[1.3.5.\ldots(p-2)]^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod p. \quad \text{(STUYVAERT)}$$

Solution par MM. COLART et SOONS. D'après le théorème de Wilson,

$$1.2.3.\ldots(p-1)\equiv -1. \qquad (1)$$

Or les nombres pairs

$$2,4,6,\ldots,p-1$$

sont égaux à p diminués des nombres impairs

$$p-2,\ p-4,\ \ldots\ 1;$$

donc le produit

$$2.4.6.\ldots(p-1)\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}.(p-2)(p-4)\ldots 3.1. \qquad (2)$$

Multiplions les deux membres de la congruence (2) par $1.3\ldots(p-2)$; il viendra

$$1.2.3.4\ldots(p-1)\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}.[1.3\ldots(p-2)]^2,$$

ou, à cause de (1), la congruence proposée.

BIBLIOGRAPHIE.

Annuaire pour l'an 1899, publié par le Bureau des Longitudes, avec des Notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars, 1898 (In-18 de VI-784 pages, avec 2 cartes magnétiques). Prix : 1 fr. 50 (franco, 1 fr. 85).

Ce petit volume compact contient comme toujours une foule de renseignements indispensables à l'ingénieur et à l'homme de Science. Parmi les Notices de cette année, signalons tout spécialement celle de l'ingénieur-constructeur P. Gautier, sur le *Sidérostat à lunette de soixante mètres de foyer et de* 1^m25 *d'ouverture*, qu'il construit pour l'Exposition de 1900; *les ballons-sondes*, par M. Bouquet de la Grye, et la *Notice sur la Géodosie moderne en France*, par le Colonel Bassot.

×QUESTIONS D'EXAMEN.

864. Soient O, I, I_1, I_2, I_3 les centres des cercles circonscrit, inscrit et exinscrits aux triangles ABC, G le centre de gravité et H l'orthocentre. On a

$$9(\overline{GO}^2 + \overline{GI}^2 + \overline{GI_1}^2 + \overline{GI_2}^2 + \overline{GI_3}^2)$$
$$-(\overline{HO}^2 + \overline{HI}^2 + \overline{HI_1}^2 + \overline{HI_2}^2 + \overline{HI_3}^2) = 96\,R^2.$$

(D'AVILLEZ).

865. Décrire trois cercles tangents deux à deux en trois points donnés A, B, C.

Si A', B', C' sont les centres de ces cercles, les points A, B, C sont les points de contact du cercle inscrit (exinscrit) au triangle A'B'C avec les côtés. On cherchera donc le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC, et l'on mène en A, B, C des perpendiculaires aux rayons OA, OB, OC.

Si M est le milieu de BC, le rayon $A'B = \alpha$ résulte de

$$\frac{1}{\overline{BM}^2} = \frac{1}{\overline{BO}^2} + \frac{1}{\overline{BA'}^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\alpha^2} = \frac{4}{a^2} - \frac{1}{R^2}$$

ou mieux de

$$A'B = \frac{BM}{\cos A'BC} = \frac{a}{2\cos A} = \frac{abc}{b^2 + c^2 - a^2}.$$

Cette dernière formule peut se transformer en

$$\alpha = \tfrac{1}{2} r r_1 r_2 r_3 \left(\frac{r_1 + r_2 + r_3 - r}{r_2 r_3 - r r_1}\right)^2,$$

résultat qui nous a été communiqué par M. d'Avillez.

866. Dans tout triangle, on a

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{1}{2Rr}.$$

(E. N. BARISIEN).

On sait que $abc = 4RS = 4Rpr = 2Rr(a + b + c)$, etc.

867. Si par un même point P de la circonférence circonscrite au triangle ABC on mène les cordes PA', PB', PC' parallèles à BC, CA, AB, les secondes extrémités A', B', C' de ces cordes sont les sommets d'un triangle A'B'C' symétriquement égal à ABC. Les droites AA', BB', CC' sont parallèles, de sorte que les deux triangles ont un axe de symétrie.

Réciproquement, étant donnés deux triangles ABC, A'B'C' symétri-

quement égaux et inscrits au même cercle, on peut trouver un point P tel que les droites PA′, PB′, PC′ soient parallèles à BC, CA, AB.

868. Enveloppe de la droite dont la somme des carrés des distances aux sommets d'un rectangle donné est constante. (GREENSTREET).

Si la droite mobile a pour équation $ax + by + c = 0$, on a la condition

$$(a\alpha + b\beta + c)^2 + (a\alpha - b\beta + c)^2 + (-a\alpha + b\beta + c)^2 + (a\alpha + b\beta - c)^2 = 4K^2(a^2 + b^2)$$

ou

$$a^2(K^2 - \alpha^2) + b^2(K^2 - \beta^2) = c^2.$$

L'enveloppe est une conique; si K varie, la conique engendre un système homofocal.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1197. Etant données deux circonférences, on prend dans l'une une corde tangente à l'autre et l'on considère le triangle déterminé par la corde dans l'une et le point diamétralement opposé au point de contact dans l'autre. Trouver le lieu du centre du cercle circonscrit. (SOONS).

×**1198.** Eliminer x et y entre les équations

$$\cos x + \cos y = a,\ \cot x + \cot y = b,\ \text{cosée}\, x + \text{cosée}\, y = c.$$

×**1199.** Dans tout triangle ABC, la différence des cotangentes des angles que la médiane AM fait avec les côtés adjacents est égale à la cotangente de différence des angles adjacents au troisième côté.

(E. N. BARISIEN).

×**1200.** Dans un triangle ABC, on mène les tangentes au cercle inscrit parallèles respectivement à BC, CA, AB. Soient l, m, n leurs longueurs comprises entre les deux autres côtés de ABC. Calculer les côtés a, b, c. (LEMOINE).

Rectifications. — P. 247, n° 7, lire $(3s - 2r)^2$ au lieu de $(3s\ 2r)^2$; n° 8, mettre le signe + entre $[2(s-1)]^2$ et $[2(s-1)]^2$. P. 249, n° 13, 3e ligne, écrire $s^4 - s^3 - s^2 + s + 1$, au lieu de $s^4 - s^3 - s^2 + 1$; n° 15, 1re égalité, lire $(n^\alpha + n^\beta \pm 1)$ au lieu de $(n^\alpha + n^\beta \mp 1)$; 2e égalité, lire $\frac{n^\alpha(n^\alpha \pm 1)}{2}$ au lieu de $\frac{n^\alpha(n^\alpha \mp 1)}{2}$; n° 16, lire *d'un cube et d'un triangulaire* au lieu *d'un cube et de la moitié d'un triangulaire* (G. DE R.).

Page 256, nous avons oublié de mentionner une solution de la question 944, par M. DEPREZ.

TABLE DES MATIÈRES (*).

ARITHMÉTIQUE; ANALYSE INDÉTERMINÉE.

Pages.

×Problèmes d'arithmétique; par M. A. Boutin 23
×Propositions sur les progressions arithmétiques; par M. de Rocquigny-Adanson 57
×Dernier chiffre des neuvièmes puissances; par M. E. N. Barisien 113
Sur une équation de Pell; par M. A. Boutin 159
Sur les puissances des nombres entiers; par M. F. Mariantoni 244
×Questions d'arithmologie; par M. de Rocquigny 246, 280
×Question 1 19; solution par MM. Barbette, François, etc. 27
×Question 1147; solution par MM. Goulard, Emmerich, etc. 52, 112
Question 1151; solution par MM. H. Brocard et Boutin 126
×Question 1157; solution par MM. J. Jonesco, Colart, etc. 128

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

×Résolution hydrostatique de l'équation du troisième degré; par M. Demanet. 81
×Des progressions logarithmiques; par M. E. Barbette 135
×Question 1127; solution par M. J. Degueldre 30
×Quest on 1149; solution par M. Emmerich. 54
×Question 1134; solutions par MM. Audibert et J. Neuberg 76
×Question 1125; solutions par MM. J. Degueldre et J. F. d'Avillez . . . 144
×Question 1152; solution par M. Smout 147
×Question 1073; solutions par MM. Déprez, Mandart, etc. 200
×Question 1169; solution par M. Barbette 213
×Question 1049; solutions par MM. Mandart et Neuberg 273
×Question 1057; solutions par MM. Colart et Soons 278

×GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE, MÉTAGÉOMÉTRIE.

Sur l'interprétation d'un théorème de géométrie riemannienne; par M. F. Dauge 5
Deux nouvelles démonstrations du postulatum d'Euclide (P. M.) . . . 25
Pour la géométrie euclidienne (P. M.) 33
Propriétés du triangle (A. C.). 45
Sur les relations de Ptolémée et de Feuerbach; par M. A. Krahé 83
Quelques propriétés trigonométriques des quadrilatères gauches; par M. J. Wasteels 85
Sur l'inverseur de Hart; d'après M. Mannheim. 87
Rectification approchée de la circonférence; par M. E. S. Barrachina. . . 88
Sur les triples de cercles associés; par M. J. J. Duran Loriga 108

(*) Rectifications, pp. 98, 104, 165, 216, 264, 280. Les articles marqués d'une croix n'exigent, pour être compris, que la connaissance des mathématiques élémentaires.

Pages.

Note sur les bissectrices d'un triangle; d'après MM. Goulard et D. André. . 112
Sur deux transversales remarquables du triangle; par M. A. Gob 129
Exercices; par M. E N. Barisien 153, 185, 221
Sur les triangles orthogonalement circonscrits à un triangle donné. . . . 163
Encore une démonstration du postulatum d'Euclide (P. M.) 188
Sur la figure du carré de l'hypoténuse; d'après Zahradnik 193
Projection oblique d'une aire plane 193
Simple remarque sur le triangle; par M. De Tilly. 217
Sur les polyèdres réguliers; par M. J. Wasteels 242
Sur un certain triangle lobatchefskien; par M. F. Dauge 267
Question 909; solution par MM. Poort, Déprez, etc. 26
Question 1114; solution par MM. E. Colart et J. Déprez. 51
Question 1116; solution par MM. J. Degueldre, François, etc. 51
Question 1136; solution par MM. Emmerich et Fairon 78
Question 1130; solution par M. E. Colart 99
Question 1141; solution par M. E. Libert, etc. 100
Question 1163; solution par MM. G. Gérard, Goux, etc. 148
Question 1145; solution d'après MM. Déprez et Maes. 172
Question 1146; solution par MM. Déprez, Rose, etc. 173
Question 1164; solution par MM. Goux et François 174
Question 1063; solution par MM. Colart, Francq, etc. 198
Question 1067; solution par MM. Colart, Francq, etc. 199
Question 1068; solution par MM. Jerábek et Brien 199
Question 1078; solutions par MM. Colart, Jerábek, etc. 203
Question 789; solution par M. Déprez 253
Question 944; solution par MM. Droz Farny et J. Jonesco 256
Question 1051; solutions par MM. Colart, Francq, etc. 275

COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ; GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

Sur une enveloppe (J. N). 45
Note de géométrie; par M. A. Goulard 45
Sur l'hyperbole équilatère; par M. A. Goulard 46
Propriétés des cercles de Chasles; par M. H. Brocard 61
Propriétés des coniques; par M. Cazamian. 88
Rayon de courbure des coniques; par M. Droz Farny 115
Sur un groupe de trois paraboles; par M. J. Neuberg 131
Exercices; par M. E N. Barisien 153, 185, 221
Sur les triangles homologiques; par M. J. Neuberg 155
Sur le lieu des sommets des courbes du second ordre; par M. Barbette . . 191
Lieu des centres des coniques inscrites à un quadrilatère donné 194
Sur la sphère et les quadriques de douze points du tétraèdre général; par M. L. Ripert 218
Sur la généralisation et la dualisation des propriétés de la parabole; par M. L. Ripert 251
Question 1014; solution par M. Collette. 26
Questions 1105 et 1117; solutions par MM. E. N. Barisien et Droz-Farny . 92

Pages

Question 815; solution par M. Stuyvaert 117
Question 1029; solution par M. J. Jonesco. 120
Question 1118; solution par MM. Colart, Retali, etc. 121
Question 1148; solution par M. A. Goulard. 124
Question 1154; solution par MM. A. Boutin, G. Gérard, etc. 127
Question 1122; solution par M. Droz-Farny 143
Question 1137; solution par MM. Droz-Farny et Barisien 146
Question 1076; solution par M. Servais. 165
Question 1142; solution par M. Retali 169
Question 1115; remarque par A. C. 191
Question 1077; solution par M. Cl. Servais. 201
Question 1121; solutions par MM. Buysens et Déprez 205
Question 1168; solution par M. E. Colart 212
Question 971; solutions par MM. Cl. Servais, Barisien, etc. 228
Question 1060; solution par M. Buysens 231
Question 1052; solution par M. Seligmann. 277

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Sur les groupes polaires de systèmes de points; par M. Stuyvaert 20
Normales aux surfaces et aux courbes algébriques; par M. Stuyvaert. . . 105
Théorèmes; par M. A. Cazamian. 138
Sur l'hypocycloïde à quatre rebroussements; par le R. P. Bosmans. . . . 139
Exercices; par M. E. N. Barisien. 153, 185, 221
Cissoïde et strophoïde; par M. Droz Farny. 164
Étude géométrique du point simple d'une courbe gauche; par M. F. Chomé . 177
Sur une cubique circulaire; par M. V. Jerábek. 224
Sur la strophoïde; par M. G. Loria 265
Question 1097; solution par M. Soons 29
Question 857; solution par M. Absolonne. 48
Question 990; solutions par MM. Retali, Mandart 69
Question 1112; solution par M. V. Retali 73
Question 1026; solution par M. E. N. Barisien 74
Question 1143; solution par M. Audibert 123
Question 1119; solution par M. V. Retali 139
Question 1111; solution par M. V. Retali 168
Question 1142; solution par M. V. Retali 169
Question 1135; solution par M. J. De Gueldre'. 205
Question 1155; solutions par MM. H. Lez et J. Neuberg. 207
Question 1131; solutions par MM. Audibert et Jerábek 233
Question 1158; solutions par MM. Lez, Déprez, etc. 236
Question 1064; solution par M. E. Colart 258
Question 1132; solution par MM. V. Cristesco, Déprez, etc. 259
Question 1155; solution par M. J. Déprez, etc. 262

CALCUL DIFFÉRENTIEL; CALCUL INTÉGRAL; THÉORIE DES SÉRIES.

Exercices; par M. E. Barisien. 153, 185, 221
Sommation d'une série; par M. A. Boutin 249

Les

$B_1 =$

et il

don

fo

A

A

QUESTIONS(*).

	POSÉE	RÉSOL
	(1) I ou (2) I	(2) VII
95	206 (28)	
	(1) IV ou (2) I	
353	159	
357	159	
387, 2e p.	231 (29)	NR
	(1) V ou (2) I	
415	46	NR
	(1) VI ou (2) I	
513	71 (30)	NR
	(1) VII ou (2) I	
594	264 (31)	NR
597	280	
598	280 (31)	NR
	(1) X	
699	279	
	(2) II	
767	128	
778	176	NR
784	216	
785	216	NR
×789	240	253
	(2) III	
815	56	117
825	80	NR
857	176	48
876	216	NR
882	240	
×886	240	
×889	264	
892	264	
892bis	280	
	(2) IV	
905	32	NR
×909	55	26
910	55	
939	127	
×944	128	256
953	152	
971	216	228
×973	216	
×986	263	
×989	264	
990	264	69
	(2) V	
×1002	32	
1013	80	
1014	104	26
	(2) V	(2) VII
×1019	128	27
×1029	176	120
1030	176	
1033	215	
×1041	240 et 264	
1042	240	
1043	264 (t. VI, 31)	
×1044	264	
1045	264	
1046	264	
1047	280	
1048	280	NR
1049	280	273
1050	280	
	(2 VI	
×1051	32	275
1052	32	277
1054	32	
1055	32	
1056	56	
1057	56	278
1060	80	231
×1063	80	198
1064	104	258
1065	104	
1066	104	
×1067	104	199
×1068	128	199
1069	128	
×1071	128	
1072	142	
×1073	142	200
1074	142	
1075	142	
1076	192	165
1077	192	201
×1078	192	203
1079	192	
1082	215	
1084	215	
1085	216	
1086	216	
1087	216	
1088	216	
×1089	240	NR
1090	240	
×1091	240	
	(2) IV	(2) VII
1092	240, 280	NR
1096	264	
1097	280	29
1098	280	
1099	280	
	(2) VII.	
1101	31, 51	
1102	31	NR
×1105	32	92
1107	51	
×1109	52	NR
1111	80, 102	168
1112	80	73
×1114	80	51
×1116	102	51
1117	102	92
1118	102	121
1119	125	139
1121	126	205
1122	127	143
×1123	150	NR
×1125	150	144
1126	151	74
×1127	175	90
1129	175	NR
×1130	175	98
1131	213	233
1132	213	259
1133	214	NR
×1134	214	76
1135	214	205
×1136	214, 237	78
1137	214	146
×1138	215	NR
×1139	237	NR
1140	237	NR
×1141	238	100
1142	238	169
1143	261	123
1144	261	NR
×1145	262	172
×1146	262	173
1147	279	52
1148	279	124
×1149	279	54
1150	279	

(*) La rédaction de *Mathesis* a en portefeuille de bonnes solutions des questions qui ne sont pas marquées des lettres NR (non résolues); elle engage ses collaborateurs à porter de préférence leurs efforts sur celles-ci.

	POSÉE	RESOL
	Tome VIII.	
1151	31	126
1152	31	147
1153	31	100
1154	31	127
1155	31	207, 262
1156	31	
×1157	55	128
1158	55	236
1159	55	
1160	56	
1161	78, 104	
1162	78	NR
×1163	79	148
×1164	79	174
×1165	104	
1166	104	NR
1167	104	NR
1168	104	212
×1169	128	213
×1170	128	
×1171	128	
1172	128	
1173	152	NR
1174	152	
1175	152	
×1176	152	
1177	176	
×1178	176	
1179	176	NR
1180	176	
1181	215	
1182	215	
1183	216	NR
×1184	216	
×1185	216	
1186	216	
1187	216	
1188	216, 239	
1189	239	
1190	240	
1191	240	
1192	240	NR
1193	263	
×1194	263	NR
×1195	264	NR
1196	264	
1197	280	NR
1198	280	NR
1199	280	NR
1200	280	NR

TABLE DES NOMS.

Abel, 90.
Abeolonne, 48.
Agnesi, 163.
Alembert (d'), 163.
Andrien, 74, 205.
Antomari, 84.
Apollonius, 195, 231.
Appell, 69.
Archimède, 90. 195.
Audibert, 54, 76, 123, 125, 233.
Avillez (d'), 145, 279
Ball (Robert), 114, 195.
Ball (Rouse), 91.
Barbarin, 226.
Barbette, 27, 28, 128, 135, 191, 213.
Barisien, 31, 48, 51, 55, 65, 71, 74, 79. 80, 9', 97, 99, 100, 102, 103, 104, 113. 121, 123, 125, 143, 146, 148, 151, 152, 153, 165, 169, 171, 176, 185, 199, 207, 212, 214, 221, 229, 236, 240, 244, 256, 259, 263, 264. 278, 279. 280.
Barrachina (Sanchis), 88.
Bassani, 65.
Bastin, 229.
Baugard, 32.
Beltrami, 8, 39.
Bergmans, 227.
Berkeley, 163.
Bernoulli, 163.
Bianchi, 68.
Böklen, 61.
Bolyai. 36.
Bosmans, 139.
Bourget. 122, 144.
Boutin, 23, 54, 113, 125, 152, 159, 249.
Bovy, 253.
Bragelongne (de), 163.
Braikenridge, 163.
Brasseur, 113.
Breton (Ph.), 113.
Brien, 199, 276.
Brierley, 149.
Brocard, 29, 31, 32, 50, 54, 61, 78, 109, 111, 112, 124, 126, 129, 147, 152, 164, 169, 176, 218, 231, 258, 278.
Bruno, 61, 66.
Buffon, 163.
Buisseret, 72.
Buysens, 27, 144, 205, 232.
Cajori, 162, 195
Cambier, 26, 45, 78, 104, 141, 191, 212.
Campbell, 163.
Cantor (M), 162, 195.
Catalan, 65, 113.
Castillon, 163.
Cauchy, 13, 90.
Cayley, 31, 100.
Cazamian, 88, 138.
Cesàro (E), 44, 132.
Chapelle (De la), 163.
Charruit, 114.
Chasles, 61. 83, 91, 197.
Chomé, 177.
Clairaut, 163.
Clebsch, 114.
Colart. 30, 51, 52, 67, 71, 74, 97, 99, 100, 121, 128, 148, 171, 197, 199, 203, 212, 228, 258, 276, 278.
Collette, 26.
Comberousse (de), 46.
Comte, 90.
Crelle, 168.
Cremona, 168.
Cristesco, 26, 100, 120, 229, 259.
Darboux, 67.
Darwin, 90.
Dauge, 5, 33, 267.
Davidoglon, 216. 246.
Degueldre, 30. 52, 74, 76, 99, 100, 144, 151, 199, 206, 261.
Delahaye, 52, 97, 178, 203, 276.
Demanet, 81, 128, 148.
Déprez, 26, 50, 51, 52, 71, 74, 76, 92, 97, 121, 125, 127, 128, 140, 146, 165, 167, 169, 171. 172, 173, 176, 199, 200, 202, 203, 204, 205, 216, 228, 236, 237, 253, 259, 262, 277, 280.
Dintzl, 54.
Diophante, 195.
Dirichlet, 90.
Dörholdt, 65.
Doppelmayr, 163.
Doubiago, 44.
Droz Farny. 27, 31, 52, 56. 65, 78, 95, 97, 99, 115, 121, 127, 141, 143, 146, 148, 164, 167, 168, 194, 199, 212, 229, 237, 239, 256, 259, 264, 276, 278.
Dubouis, 42.
Dufay, 163.
Duporcq, 167, 201.
Duran Loriga, 108.
Emmerich, 52, 54, 78.
Eneström, 162, 196.
Engel (Fr.), 162.
Euclide, 5, 25, 34, 188, 195, 227, 268.
Euler, 63, 162, 163, 144.
Fairon, 78.
Fermat, 90, 176.
Feuerbach, 83.
Fischer-Benzon, 195.
Fitz-Patrick, 91.
Fontaine, 163.
Fontené, 44, 240.
François, 26, 27, 52, 148, 165, 174.
Francq, 167, 198, 199.
Frégier, 80.
Frobes, 162.
Fuhrmann, 237.
Gambey. 253.
Gauss, 90, 244.
Gelin, 215.
Gérard (G), 127, 148, 264.
Gérard (L.), 44, 114.
Gibson, 162.
Gillet (J.), 167, 229.
Gob, 128, 129, 134.
Goldbach, 163.
Goudin, 163.
Goulard, 45, 46, 52, 112, 124.
Goux, 148, 174.
Gow, 195.
Grandi, 163.
Grassmann, 197.
Greenhill, 69.
Greenstreet, 279.
Grunert, 193.
Gua (de), 163.
Halphen, 69, 114.
Halsted, 268.
Hart, 87.

Heilbronner, 162.
Henry, 69.
Hermann, 163.
Hirst, 141.
Hoffmann, 61.
Hoüel, 91.
Huygens, 265, 266.
Jacobi, 69, 90.
Jacquier, 163.
Jerábek, 100, 111, 199, 204, 224, 234.
Jonesco (Bogdan), 121, 165
Jonesco (Jean), 27, 71, 73, 100, 120, 128, 229, 256.
Kant, 90.
Kästner, 163.
Kerseboom, 163.
Kinner, 265, 266.
Klein (F.), 44, 114.
Klompers, 71.
König, 163.
Köpke. 38.
Kotelnikof, 44.
Krafft, 163.
Krahé, 83.
Kühn, 163.
Lacour, 69.
Lagrange, 90 162.
Laisant, 61, 89, 112.
Lamarle, 91.
Lambert, 188.
Lamé, 67.
Laugel, 114.
Laurens, 26.
Lazzeri, 66.
Lefebvre, 113.
Lefèvre, 76.
Legendre, 25, 42, 69, 188, 217, 267, 268.
Legrand (M), 200.
Leibniz, 13, 31, 90.
Lemoine, 55, 109, 113, 134, 164, 173, 236, 264, 280.
Lévy, 68.
Lez, 207, 236.
Libert, 52, 121.
Lie (Sophus), 44.
Lionnet, 113.
Listray, 148.
Lobatschefsky, 5, 34, 44, 217, 268.
Longchamps (de), 110, 113, 197.
Lorenz. 67.
Loria (Gino), 196, 265.
Maclaurin, 163.
Maes (V.), 99, 100, 121, 172, 199.
Mairan (de), 163.
Mandart, 27, 71, 121, 200, 273.
Mannheim, 87.
Mansion, 5, 25, 33, 69, 87, 91, 163, 191, 196, 193, 217, 241.
Mariantoni, 244.
Maupertuis, 163.
Maxwell, 67.
M'Cay, 110.
Merlin, 121.
Meyer (Fr. W.), 162.
Michel (Ch.), 46, 65.
Mister, 141.
Mitcheson, 80.
Möbius, 90.
Moivre, 163.
Molk, 69, 114.
Monge, 166, 171, 201, 259.
Monteiro (Schiappa), 122.
Montucla, 163.
Moore, 54.
Moret-Blanc, 113.
Morin de la Pillière, 236.
Mougin, 227.
Moxon, 163.
Müller (F.), 196.
Muirhead, 172.
Nasimof, 44.
Naudé, 163.
Neppi, 140.
Neuberg, 26, 30, 31, 45, 47, 76, 77, 104, 110, 115, 131, 155, 175, 185, 186, 197, 198, 200, 203, 207, 212, 216, 222, 224, 240, 241, 253, 262, 273, 275.
Newton, 90, 162.
Nicole, 163.
Niewenglowski, 65, 112.
Ocagne (d'), 61, 144.
Ozanam, 163.
Pascal, 116.
Paillotte, 61.
Peano, 38.
Pell, 159.
Pelz, 11.
Petersen (J.), 104.
Petit-Bois, 128, 151, 215.
Plakhovo, 173.
Poinsot, 176.
Polignac (de), 61, 66.
Poncelet, 64, 90, 122.
Poort, 26, 258.
Ptolémée, 83.
Realis, 113.
Rebuffel, 46.
Retali, 70, 73, 121, 140, 143, 152, 168, 169, 205.
Reyneau, 163.
Riemann, 5, 33.
Ripert, 148, 218, 251.
Rocquigny (de), 31, 52, 55, 57, 113, 126, 128, 246, 230.
Romieu, 74, 148.
Rose, 173.
Rouché, 46.
Rudio (F.), 162.
Saccheri, 163.
Salmon, 108, 229.
Saverien, 163.
Schoute, 69.
Schwering, 162.
Segner, 163.
Seiliger, 44.
Séjour (Du), 163.
Seligmann, 121, 277.
Servais (Cl.), 50, 115, 144, 165, 20, 229.
Simpson (Th.), 163.
Simson (R.), 15, 163.
Sintzov, 44.
Smout, 147.
Sonine, 162.
Soons, 29, 41, 74, 76, 100, 128, 167, 171, 199, 216, 236, 263, 264, 278, 280.
Souvorof, 44.
Stäckel, 162.
Stanham, 79, 174.
Staudt (von), 91.
Steiner, 62, 64, 65, 90, 110, 117, 168.
Stewart, 15, 97, 118, 163.
Stirling, 163.
Stockhausen, 162.
Stone, 163.
Strymeersch, 199.
Sturm, 162.
Stuyvaert, 20, 67, 105 216, 233, 239, 264, 278.
Tannery (J.), 69, 114.
Tannery (P.), 195.
Tarry, 25, 227.
Tischer, 162.
Tilly (De), 18, 67, 217.
Valentiner, 67.
Varignon, 163.
Vassilief, 44.
Versluys, 32.
Vuibert, 46, 65, 79.
Wasteels (J.), 85, 242.
Weidler, 162.
Weierstrass, 38.
Wickersheimer, 25.
Wilson, 278.
Wolff, 162, 163.
Zahradnick, 193.
Zeuthen, 162, 195.
Ziwet, 114.

NOTICE SUR LA VIE ET LES TRAVAUX

DE

H. J. S. SMITH (1826-1883)

PAR

P. MANSION, professeur à l'Université de Gand (1).

I

ESQUISSE BIOGRAPHIQUE

Henry John Stephen Smith était le second fils de John Smith, l'un des membres les plus distingués du barreau irlandais et de Mary Murphy. Il naquit à Dublin, le 2 novembre 1826. Son père étant mort en 1828, sa mère vint s'établir à l'île de Wight. C'est là que s'écoula l'enfance du jeune Henry, qui était maladif, mais extraordinairement bien doué.

Madame Smith, femme très remarquable et très instruite, même dans les langues anciennes, dirigea elle-même son éducation, en se faisant aider toutefois par d'excellents maîtres. Le jeune Smith ne passa que deux ans (1841-1843) dans un des grands collèges anglais, celui de Rugby ; sa santé précaire le força à quitter l'Angleterre, et à vivre sur le continent, surtout en Italie, pendant une grande partie des années suivantes. Il n'en apprit pas moins, avec une égale facilité, malgré ses déplacements continuels, les langues anciennes et modernes, les éléments des mathématiques et des sciences naturelles, l'histoire et l'archéologie.

En 1844, il subit l'examen d'entrée à Balliol College, à l'Université d'Oxford, et en fut élu Fellow en 1848. Dès lors, il était un *scholar* accompli pour les classiques : c'est d'ailleurs pour les classiques qu'il avait pris tous ses grades et ce sont ses connaissances dans ce domaine un peu archaïque qui lui ont surtout valu la haute réputation dont il a toujours joui à Oxford. Mais il

(1) Extrait de la Rev. des quest. scient., janv. 1896, t. XLIII, pp. 219-227.

aimait les mathématiques et il désirait les enseigner, bien que cette science ne soit pas estimée à Oxford autant qu'elle devrait l'être. Avec sa prompte intelligence, il se mit donc à apprendre par lui-même les hautes mathématiques et, sauf Ampère, il n'y a sans doute jamais eu d'autodidacte qui en ait poussé l'étude aussi loin.

Dès 1850, il devint *Mathematical Lecturer* à Balliol College. Ce fut à partir de cette époque qu'il fut un *oxonien* de fait comme de nom ; car auparavant, tandis qu'il était officiellement élève à Oxford, il avait dû, maintes fois, comme dans son enfance, fuir le climat trop rude de l'Angleterre et résider, en hiver, dans des pays plus chauds.

En 1860, il fut élu Professeur Savilien de géométrie à l'Université d'Oxford, mais il n'en conserva pas moins, par dévouement à Balliol College, ses fonctions de *Mathematical Lecturer*, pendant dix ans encore. Quand il les abandonna, il ne sut pas résister aux sollicitations qui l'assaillaient et il accepta trop de fonctions accessoires, qui l'empêchèrent de se livrer tout entier à ses recherches mathématiques et contribuèrent sans doute à abréger sa vie. Ainsi, en 1870, il devint *Examinateur* pour les mathématiques à l'Université de Londres ; la même année, il entra aussi comme membre à la *Royal Commission on Scientific Education*. En 1877, il fit partie de l'*Oxford University Commission*, et fut nommé, la même année, président du *Meteorological Office*. En 1878, ses amis essayèrent, heureusement en vain, de le faire entrer au Parlement, comme représentant de l'Université d'Oxford.

Il mourut cinq ans après, le 9 février 1883, prématurément sans doute, épuisé qu'il était par les labeurs excessifs auxquels il s'astreignit pour remplir dignement les diverses charges qu'il avait assumées par dévouement à la science et à l'Université d'Oxford.

Tous ceux qui ont connu Henry Smith rendent hommage à l'aménité de son caractère, à la sûreté de ses relations, à la délicatesse de ses sentiments ; c'était un ami fidèle. Il était foncièrement modeste, sans ambition aucune et tout dévoué à ses devoirs, quels qu'ils fussent (1). En conversation, il était brillant causeur,

(1) Son biographe, le Dr Ch. H. Pearson, dit à ce propos : " His character can scarcely be explained, except by ranking him with those who feel that they are " *ever in the great Taskmaster 's eye* „. My impression is that he accepted christianity not only as a habit and a conviction, but as a rule of life. „ *Mathematical Papers*, vol. I, p. xxxv.

mais toujours bienveillant dans ses jugements sur les hommes et les choses, parce que la bonté, une bonté disciplinée, formait le fond de son caractère.

Smith avait une intelligence à la fois vaste et profonde. Esprit méditatif, il savait étudier jusque dans leurs principes premiers les questions les plus abstruses de l'Arithmétique supérieure ; mais en même temps, il suivait d'un œil attentif les progrès des mathématiques dans toutes les directions. Son érudition, d'ailleurs, s'étendait bien au delà des limites de sa science de prédilection. Il avait, en particulier, étudié avec soin les questions relatives à l'enseignement des sciences dans les Collèges et les Universités(1).

Les principaux sujets sur lesquels il fit des leçons à l'Université d'Oxford sont la Géométrie moderne, la Géométrie analytique, la Théorie des nombres. le Calcul des variations et la Théorie des équations différentielles ; mais les circonstances ne lui permirent pas de pousser bien loin l'exposition d'aucune de ces matières.

Smith était un professeur éminent : il était clair et rigoureux, habile à soutenir l'intérêt de ses élèves en leur montrant les liens qui rattachent les principes à leurs conséquences. Dans ses communications, toujours très remarquées, à la Société mathématique de Londres et à l'Association britannique pour l'Avancement des Sciences, il parvenait à donner à ses auditeurs une idée exacte de ses plus difficiles recherches sur la Théorie des nombres ou sur les Fonctions elliptiques, tant il possédait à un haut degré l'art de se mettre à la portée des intelligences même les moins préparées.

La clarté, la rigueur, la stricte ordonnance logique de l'ensemble et des détails caractérisent aussi ses écrits mathé-

(1) Citons quelques-unes de ses pensées sur ce sujet : " Geometry is nothing if it be not rigorous, and the whole educational value of the study is lost if strictness of demonstration is trifled with. „ (M. P., II, p. 686.) " Geometry is hard, just as Greek is hard, and one reason why Geometry and Greek are such excellent educational subjects is precisely that they are hard. „ (M. P., II, p. 687.)

Il s'exprime aussi avec une rare netteté sur le rôle des sciences de la nature dans la formation intellectuelle des jeunes esprits : les sciences naturelles développent l'esprit d'observation, la chimie apprend l'art d'expérimenter; la physique, celui de raisonner avec suite et précision sur les données de l'observation et de l'expérience, par l'intermédiaire des mathématiques. Toutes d'ailleurs font aimer la vérité pour elle-même; car " In science, error is always possible..., but sophistry is impossible „ (M. P., II, p. 688).

matiques. Pour le fond et pour la forme, il est de l'école de ce modèle achevé, Gauss, dont il a si profondément médité les écrits et qui a été, avec le Jacobi des *Fundamenta*, le vrai maître de sa pensée. La postérité le placera parmi les grands arithméticiens de notre siècle, à côté de Cauchy, de Jacobi, de Dirichlet, d'Eisenstein, de Kummer et de Kronecker, pour ne citer que les morts.

II

TRAVAUX MATHÉMATIQUES

Les travaux mathématiques de Smith ont été publiés en deux gros volumes in-4° sous le titre : *The Collected Mathematical Papers of Henry John Stephen Smith, M. A., F. R. S., late Savilian Professor of Geometry in the University of Oxford. Edited by J. W. L. Glaisher, Sc. Dr., F. R. S., Fellow of Trinity College, Cambridge; with a Mathematical Introduction by the Editor, biographical Sketches and a Portrait. In two Volumes. Volume I* (XCV-663 pp.); *volume II* (719 pp.). *Oxford, at the Clarendon Press*, 1894.

L'esquisse biographique (pp. IX-XXXVI), due à la plume du Dr Charles H. Pearson, est suivie de *Recollections* par le Professeur Jowett, Lord Bowen, M. J. L. Strachan-Davison, M. Alfred Robinson (pp. XXXVII-LIX) et M. J. L. W. Glaisher (pp. LXXVII-XCV). C'est à ces pages, écrites par les amis anciens ou nouveaux de l'illustre géomètre, que nous avons emprunté la substance de l'esquisse biographique qui précède. Dans ce qui suit, nous allons essayer de donner une idée des travaux de Smith en nous aidant de l'introduction mathématique due au savant éditeur (pp. LXI-LXXVII).

Les premiers écrits mathématiques de Smith, en 1851 et 1852 se rapportent à la Géométrie. Deux ans après, il publie (en latin) sa première note sur la Théorie des nombres, où il prouve d'une manière originale le théorème de Fermat : tout nombre premier de la forme $4n + 1$ est la somme de deux carrés. Depuis lors jusqu'en 1867, presque tous ses travaux se rapportent à la Théorie des nombres; ensuite, il fait paraître plusieurs mémoires sur la Géométrie. Dans les dernières années de sa vie, il s'occupe surtout de la Théorie des Fonctions elliptiques. On peut donc distribuer en trois groupes naturels les travaux de l'illustre

professeur d'Oxford : Théorie des nombres, Géométrie, Fonctions elliptiques.

Dans la Théorie des nombres, il faut citer d'abord le *Report on the Theory of Numbers*, dont les six parties, présentées à l'Association britannique pour l'Avancement des Sciences en 1859, 1860, 1861, 1862, 1863, 1865 forment un ouvrage de 327 pages in-4° de la plus haute valeur. Ce n'est ni une histoire, ni un traité de la Théorie des nombres, mais quelque chose d'intermédiaire. L'auteur y analyse avec une clarté et un ordre admirables les travaux des géomètres depuis un siècle, sur la Théorie des congruences et sur celle des formes binaires quadratiques. Il le fait avec une compétence parfaite : il renvoie aux sources originales, indique le principe et esquisse la marche des démonstrations, et fait connaître les résultats obtenus, en ajoutant maintes fois du sien aux unes et aux autres. Selon nous, ce *Report* de Smith est le type, le modèle et l'exemple unique d'un genre d'ouvrages dont le besoin se fera de plus en plus sentir : il devient, en effet, impossible d'exposer, *tout au long*, dans des traités complets sur les diverses subdivisions des hautes mathématiques, l'ensemble des recherches qui s'y rattachent. Mais les maîtres de la science, ceux qui sont parvenus, dans l'une ou l'autre direction, à en reculer les frontières, pourront utilement faire ce qu'on peut appeler une carte critique et détaillée de telle ou telle province mathématique, comme Smith l'a réalisé pour l'Arithmétique supérieure (1).

Pendant la préparation du *Report*, Smith publia des travaux sur divers sujets d'Arithmétique supérieure. Les uns parurent sous une forme achevée dans les PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS et

(1) " Sous le titre modeste de *Rapport sur la Théorie des nombres*, M. Smith avait entrepris une véritable encyclopédie arithmétique, où il devait coordonner et discuter tous les résultats obtenus dans cette science par Legendre, Gauss, Dirichlet, Cauchy, Jacobi, Eisenstein, Hermite, Kummer, Kronecker, etc. Ce grand travail, où la profondeur de l'érudition et la sagacité de la critique méritent une égale admiration, n'a pas été terminé, les sections annoncées sur la Théorie des formes quadratiques à plus de deux variables et sur les formes de degré supérieur n'ayant pas été écrites. Malgré tout le regret que doit inspirer cette lacune, cet ouvrage n'en est pas moins le monument le plus complet et de beaucoup qui ait jamais été élevé à la Théorie des nombres. „ (C. JORDAN, dans les COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS, t. XCVI, p. 1096, 16 avril 1883). Voir aussi, plus bas, ce qu'il dit du dernier Mémoire de Smith. On rencontre dans plusieurs des écrits de Smith des indications bibliographiques et autres qui sont comme des pierres d'attente des parties du *Report* qui n'ont pas paru.

traitent des systèmes d'équations linéaires indéterminées ou de congruences, ou des ordres et des genres des formes quadratiques ternaires ; les autres, plus courts, ne contiennent que les résultats de recherches extrêmement difficiles que l'auteur se réservait de développer plus tard. Il convient de citer, en particulier, la note intitulée : *On the Orders and Genera of Quadratic Forms containing more than Three Indeterminates* (PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY, vol. XVI, pp. 197-208; 1867; réimprimé ici, vol. I, pp. 510-523). Au moyen des principes généraux exposés dans cette note, il complète la solution donnée par Eisenstein du problème de la décomposition d'un nombre en cinq carrés, puis il résout, pour sept carrés, la question analogue, qui, croyons-nous, n'a été abordée par personne ni avant ni après Smith.

La dernière partie du *Report*, publiée en 1865, traite presque exclusivement des applications de la Théorie des Fonctions elliptiques à la Théorie des nombres, dues à Jacobi, Kronecker et Hermite. C'est sans doute à propos de ces recherches d'Arithmétique supérieure que Smith fut amené à s'occuper de la Théorie des Fonctions thêta. En 1866, il fit paraître un mémoire court, mais très substantiel, où il démontre, sur le produit de quatre fonctions thêta, un théorème fondamental auquel Jacobi avait fait allusion, sans même l'énoncer, en 1845, dans une lettre à M. Hermite ; il en déduit les principaux résultats de la Théorie des Fonctions elliptiques. La démonstration de Jacobi du même théorème fondamental, n'a été connue qu'en 1881, trente ans après sa mort, et elle diffère de celle de Smith. Celui-ci a publié, en 1879, sur le même sujet, un second mémoire très court, mais riche en résultats, qui est la continuation du premier et qui d'ailleurs date de la même époque.

Pendant quelques années, après cette première excursion dans la Théorie des Fonctions elliptiques, Smith revient à l'objet de ses premiers travaux et semble absorbé complètement par des recherches géométriques. Nous citerons en particulier deux mémoires assez étendus, l'un sur diverses constructions géométriques relatives aux coniques et aux cubiques, et l'autre sur les propriétés focales des figures homographiques ou corrélatives. En 1868, l'Académie royale des Sciences de Berlin lui décerna, en partage avec M. Kortum, le prix Steiner pour un grand mémoire *Sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques* qui fut publié (en français) dans les ANNALI DI MATEMATICA. Dans

la première section de cet important travail, l'auteur traite des imaginaires en Géométrie; dans la seconde, il résout, au moyen de la règle, du compas et d'une conique fixe supposée tracée, le problème de l'intersection de deux coniques données par des éléments réels ou imaginaires; dans la troisième, il aborde les questions analogues sur les cubiques et les quartiques et, en particulier, détermine les trois derniers points d'intersection de deux quartiques passant par treize points communs, réels ou imaginaires, sujet qui avait été signalé par l'Académie à l'attention des concurrents. Les solutions de Smith sont présentées sous forme synthétique, mais, dit le rapporteur, Kummer, elles ont visiblement été trouvées par une voie analytique; elles sont d'ailleurs complètes au point de vue scientifique : tous les points de vue sous lesquels on peut considérer chaque problème sont exposés et comparés.

Après ce grand mémoire, Smith ne publia plus que deux écrits relatifs à la Géométrie, l'un (1875) sur les singularités supérieures des courbes planes où il examine si les indices de singularités définis par Cayley satisfont aux relations pluckériennes ; l'autre (1876) sur les conditions de perpendicularité dans un système parallélipipédique, suscité par une question de cristallographie.

On rencontre ensuite dans les œuvres de Smith, un certain nombre de mémoires plus ou moins étendus d'Arithmétique supérieure, la plupart écrits plusieurs années avant la date de leur publication; il suffira d'en signaler deux relatifs aux fractions continues (le second, écrit en latin). En 1875, il avait fait paraître une note assez étendue sur l'intégration des fonctions discontinues, où il étudie avec grand soin les vues de Riemann à ce sujet.

Mais depuis 1877 (et même auparavant) jusqu'à sa mort, à part un dernier grand mémoire sur la Théorie des nombres dont nous parlerons plus bas, Smith consacre presque tous ses efforts à la Théorie des Fonctions elliptiques. Ses Notes sur la Théorie de la transformation et son grand mémoire sur les Fonctions thêta et oméga n'occupent pas moins de trois cents pages in-4° dans le second volume de ses œuvres; mais la mort l'a empêché d'achever ces recherches, qui touchent, comme il le remarque, à des questions intéressantes d'Arithmétique, d'Algèbre et de Géométrie. On ne pourra sans doute les apprécier à leur juste valeur que le jour où un analyste compétent aura fait sur la Théorie des Fonctions elliptiques un *Report* analogue à celui de Smith sur la

Théorie des nombres. Il est probable qu'on rangera alors le dernier grand mémoire de l'éminent professeur d'Oxford parmi les plus belles productions mathématiques suscitées par les *Fundamenta* de Jacobi.

Le dernier travail de Smith est écrit en français et intitulé *Mémoire sur la représentation des nombres par la somme de cinq carrés.* En voici l'origine. En février 1882, l'Académie des Sciences de Paris, proposa, comme l'année précédente, pour sujet du grand prix des sciences mathématiques, la question de la décomposition d'un nombre en cinq carrés, en signalant aux concurrents les théorèmes donnés sans démonstration en 1847 par Eisenstein, comme pouvant les guider dans leurs recherches; aucune allusion n'était faite au travail plus complet de Smith publié en 1868 et dont nous avons dit plus haut quelques mots.

Smith, sur les conseils d'un illustre géomètre, et pour sauvegarder l'honneur de l'Académie de Paris, résolut de concourir, et c'est ainsi qu'il écrivit son dernier mémoire où il démontrait les théorèmes trouvés par lui quinze ans auparavant. Le prix lui fut décerné, hélas, deux mois après sa mort, dans la séance de l'Académie du 2 avril 1883, en partage avec M. Minkowski. En réalité, c'était presque le lui décerner deux fois, puisque ce jeune savant allemand avait pu évidemment prendre connaissance du premier travail de Smith sur la question (1).

Telle est l'esquisse bien superficielle de l'œuvre mathématique du profond géomètre qui, pendant trente ans, a été l'honneur de l'Université d'Oxford. Mais parmi les écrits rassemblés dans l'édition que nous avons sous les yeux, il y en a un certain nombre semi-historiques, semi-critiques dont il convient de dire un mot, parce que mieux que ses mémoires spéciaux ils peuvent donner aux profanes une idée de l'étendue et de la variété de ses connaissances. Ce sont les suivants :

(1) Dès 1868, cet écrit de Smith avait été brièvement signalé dans le JAHRBUCH ÜBER DIE FORTSCHRITTE DER MATHEMATIK, t. I, p. 54. " Ce Mémoire, dit M. Jordan, dans les COMPTES RENDUS, en parlant du travail couronné par l'Académie (l. c., p. 1096-1097), constituera, nous n'en doutons pas, un des titres les plus glorieux de l'éminent géomètre d'Oxford. Les résultats qu'il contient, joints à ceux donnés autrefois par notre illustre confrère, M. Hermite, éclairciront désormais suffisamment la théorie des formes quadratiques générales, pour qu'on puisse songer à ajouter ce nouveau chapitre au Rapport de M. Smith. „

On some of the Methods at present in use in Pure Geometry (I, pp. 1-24);

On the Present State and Prospects of some Branch of Pure Mathematics (II, pp. 166-190);

Address to the Mathematical and Physical section of the British Association at Bradford in 1873 (II, pp. 681-690);

Arithmetical Instruments (II, 691-697);

Geometrical Instruments and models (II, 698-710);

Introduction to the Mathematical Papers of Clifford (711-719).

On trouve dans ces quatre-vingt-dix pages une esquisse historique des progrès de l'Arithmétique supérieure, de la Géométrie moderne et de l'Analyse mathématique dans une foule de directions; des rapprochements ingénieux et profonds sur l'action et la réaction réciproque des diverses parties de la science mathématique; enfin des vues originales sur l'enseignement des sciences de la nature, sur l'importance de la science spéculative et sur la méthode d'invention en mathématiques (1).

En parlant de la vie et des œuvres de Henry John Stephen Smith, nous n'avons rien dit de l'admirable édition qui nous a permis de le faire. On peut la caractériser en un mot. Le savant éditeur, J. W. L. Glaisher, F. R. S., a élevé à celui dont il fut l'ami et le confident pendant les dix dernières années de sa vie, un monument digne de ce maître illustre; c'est en même temps, pour la postérité, un témoignage éclatant de la confraternité scientifique des deux grandes Universités anglaises, dans le domaine le moins accessible aux passions humaines, celui des mathématiques.

(1) " Mathematical discovery is like electricity; it follows the lines of least resistance, etc. „ (M. P., II, p. 183)." The rules that can be given in aid of mathematical discovery are, I suppose, very few and I have ventured to call your attention to one of them — the rule that bids us to follow up any opening that may present itself, rather than try to force a way against obstacles which may prove insurmontable... Another rule, which is of less general application, but nevertheless often useful,... is that a apparent contradiction (as distinct of a mere misunderstanding) is always to be regarded as an indication of some undiscovered truth „ (M. P., II, p. 186).

Imprimerie POLLEUNIS & CEUTERICK, 30, rue des Orphelins, Louvain.
Même maison à Bruxelles, 37, rue des Ursulines.

(Extrait du tome LVIII des *Mémoires couronnés et autres Mémoires* publiés par l'Académie royale de Belgique. — 1898.)

LA COURBURE ET LA TORSION

DANS

LA COLLINÉATION ET LA RÉCIPROCITÉ

PAR

Cl. SERVAIS

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GAND

1. Étant donnés deux espaces projectifs, à une courbe (C) du premier, décrite par un point M, correspond une courbe (C_1) du second, décrite par l'homologue M_1 de M. Les coordonnées du point M sont des fonctions d'une variable indépendante t, et à l'aide des équations de la projectivité, les coordonnées du point homologue M_1 sont des fonctions de la même variable t. Deux points correspondants M et M_1 sont déterminés par une même valeur de t.

En donnant à cette valeur t un accroissement Δt, on obtient sur la courbe (C) un point N infiniment voisin de M, et sur la courbe (C_1), un point N_1 infiniment voisin de M_1. Les deux points N et N_1 sont correspondants. Désignons par A' et B' deux points de la droite MN; par A'_1 et B'_1 leurs homologues sur M_1N_1, en réservant les mêmes lettres non accentuées A et B, A_1 et B_1, pour représenter deux points de la tangente m à la courbe (C) au point M, et leurs correspondants sur la tangente m_1 à la courbe (C_1) au point M_1 (fig. 1).

Les ponctuelles M, A', N, B' et M_1, A'_1, N_1, B'_1 étant projectives, on a

$$(MA'NB') = (M_1A'_1N_1B'_1),$$

ou

$$\lim \frac{MN}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{A'B'}{NA' \cdot MB'} = \lim \frac{M_1N_1}{\Delta s_1} \cdot \frac{\Delta s_1}{\Delta t} \cdot \frac{A'_1B'_1}{N_1A'_1 \cdot M_1B'_1};$$

par conséquent,

$$ds \cdot \frac{AB}{MA \cdot MB} = ds_1 \frac{A_1B_1}{M_1A_1 \cdot M_1B_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Cette formule se simplifie par l'introduction des éléments limites, à la place des points A et B_1.

2. Appelons (fig. 1) :

a' et b' deux droites de la première figure, menées par le point M dans le plan mN;

a'_1 et b'_1 leurs homologues dans la seconde figure;

c et c_1 les cordes MN, M_1N_1.

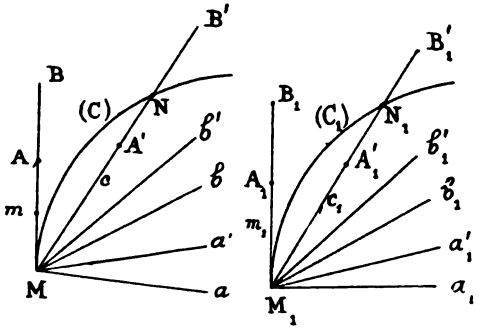


Fig. 1.

On a

$$(ma'cb') = (m_1a'_1c_1b'_1),$$

ou

$$\lim \frac{\sin(mc)}{\omega} \frac{\omega}{\Delta t} \frac{\sin(a'b')}{\sin(a'c) \cdot \sin(b'm)}$$

$$= \lim \frac{\sin(m_1c_1)}{\omega_1} \frac{\omega_1}{\Delta t} \frac{\sin(a'_1b'_1)}{\sin(a'_1c_1) \cdot \sin(b'_1m_1)}.$$

ω est l'angle de contingence de la courbe (C) au point M, ω_1 celui de la courbe (C_1) au point M_1.

Mais

$$\lim \frac{\sin(mc)}{\omega} = \lim \frac{\sin(m_1c_1)}{\omega_1} = \frac{1}{2}.$$

Par suite,

$$\omega \frac{\sin(ab)}{\sin(am)\sin(bm)} = \omega_1 \frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1)\ \sin(b_1m_1)} \quad . \quad . \quad (2)$$

a et b sont deux droites quelconques menées par M, dans le plan osculateur μ à la courbe (C) en ce point; a_1 et b_1 sont leurs homologues.

3. Des formules (1) et (2), on déduit

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\rho} \quad \frac{MA \cdot MB}{AB} \quad \frac{\sin(ab)}{\sin(am)\,.\,\sin(bm)} \\ =\ &\frac{1}{\rho_1} \quad \frac{M_1A_1 \cdot M_1B_1}{A_1B_1} \quad \frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1)\,.\,\sin(b_1m_1)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Telle est la relation existant entre les rayons de courbure ρ et ρ_1 des courbes (C) et (C_1), aux points M et M_1.

COROLLAIRES. *Si deux courbes* (C) *et* (C) *ont même plan osculateur et même tangente en un point* M, *les quotients des quantités* ds *et* ds', ω *et* ω', ρ *et* ρ' *évaluées au point* M *pour chacune des deux courbes, sont projectifs* (*).

(*) PEAUCELLIER, *Relation entre les rayons de courbure d'une courbe et de sa perspective* (NOUVELLES ANNALES DE MATH., [1], t. XX, p. 427).

H. SMITH, *On the focal properties of homographic figures* (PROCEEDINGS OF THE LONDON MATH. SOCIETY, t. II, p. 196).

TH. REYE, *Ueber die focalen Eigenschaften collinearer Gebilde* (MATHEMATISCHE ANNALEN, t. XLVI, p. 423).

MEHMKE, *Einige Sätze über die räumliche Collineation und Affinität, welche sich auf die Krümmung von Curven und Flächen beziehen* (ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK, t. XXXVI, p. 56).

G. FOURET, *Sur les rayons de courbure des courbes triangulaires et de courbes tétraédrales symétriques* (BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, t. XX, p. 60).

Si deux courbes (C) *et* (C') *sont tangentes à une même droite respectivement en* M *et* M', *et ont en ces points même plan osculateur, le quotient des courbures de* (C) *et* (C') *en* M *et* M' *n'est pas altéré par une transformation affine* (*).

4. Appelons (fig. 2) α et β deux plans de la première figure, passant par la tangente m ;

α_1 et β_1 leurs homologues dans la seconde figure;

γ et γ_1 les plans mN et m_1N_1.

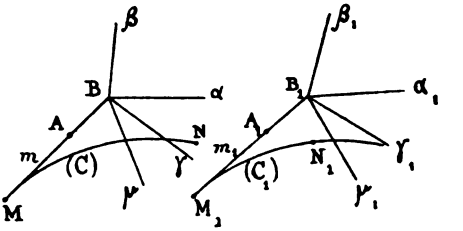


Fig. 2.

On a

$$(\mu\alpha\gamma\beta) = (\mu_1\alpha_1\gamma_1\beta_1),$$

ou

$$\lim \frac{\sin(\mu\gamma)}{\eta} \cdot \frac{\eta}{\Delta t} \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\gamma)\,.\,\sin(\beta\mu)}$$

$$= \lim \frac{\sin(\mu_1\gamma_1)}{\eta_1} \cdot \frac{\eta_1}{\Delta t} \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\gamma_1)\,.\,\sin(\beta_1\mu_1)}.$$

η est l'angle de torsion de la courbe (C) au point M, η_1 celui de la courbe (C_1) au point M_1.

Mais

$$\lim \frac{\sin(\mu\gamma)}{\eta} = \lim \frac{\sin(\mu_1\gamma_1)}{\eta_1} = \frac{1}{6}.$$

Par suite,

$$\eta \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\,.\,\sin(\beta\mu)} = \eta_1 \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\,.\,\sin(\beta_1\mu_1)} \quad . \quad . \quad (4)$$

(*) MEHMKE, *loc. cit.*, p. 56.

Des formules (1) et (4), on déduit

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\tau}\,\frac{MA\,.\,MB}{AB}\,\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\,.\,\sin(\beta\mu)} \\ =\;&\frac{1}{\tau_1}\,\frac{M_1A_1\,.\,M_1B_1}{A_1B_1}\,\frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\,.\,\sin(\beta_1\mu_1)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Telle est la relation qui lie les rayons de torsion τ et τ_1 des courbes homologues (C) et (C_1), aux points correspondants M et M_1.

Corollaire. *Si deux courbes* (C) *et* (C') *ont en un point commun* M *même plan osculateur et même tangente, les quotients des quantités* η *et* η', τ *et* τ' *évaluées au point* M *pour chacune des deux courbes, sont projectifs* (*).

5. Soient M et M_1 deux points quelconques d'une conique Σ, S le point à l'infini de MM_1, s la droite polaire de S, T le pôle de MM_1. Cette courbe se correspond à elle-même dans l'homologie harmonique (S, s), et les points M et M_1 sont correspondants. Les rayons de courbure ρ et ρ_1 de Σ aux points M et M_1 sont donc liés par la formule

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{MA\,.\,MB}{AB}\,\frac{A_1B_1}{M_1A_1\,.\,M_1B_1}\,\frac{\sin(ab)}{\sin(am)\sin(bm)}\,\frac{\sin(a_1m_1)\,.\,\sin(b_1m_1)}{\sin(a_1b_1)}\,. \quad (3)$$

Supposons les points B et B_1 à l'infini, A et A_1 réunis en T ; les droites b et b_1 parallèles à l'axe d'homologie, les droites a et a_1 coïncidant avec MM_1 ; l'égalité (3) devient

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{\overline{MT}^3}{\overline{M_1T}^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

6. *Soient* M *et* M_1, P *et* P_1 *deux couples de points conjugués harmoniques sur une cubique gauche ;* m *et* μ, m_1 *et* μ_1, p *et* π,

(*) Mehmke, *loc. cit.*, p. 56.

p_1 *et* π_1 *les tangentes et les plans osculateurs en ces points ;* **A**, **B**, A_1, B_1 *les points* $m\pi$, $m\pi_1$, $m_1\pi$, $m_1\pi_1$; a, b, a_1, b_1 *les droites d'intersection des plans* μ *et* Mp, μ *et* Mp_1, μ_1 *et* M_1p_1, μ_1 *et* M_1p ; ρ *et* ρ_1 *les rayons de courbure de la cubique aux points* **M** *et* M_1. *On a*

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{MA\,.\,MB}{AB}\,\frac{\sin(ab)}{\sin(am)\,.\,\sin(bm)} = \frac{1}{\rho_1}\,\frac{M_1A_1\,.\,M_1B_1}{A_1B_1}\,\frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1)\,.\,\sin(b_1m_1)},$$

car la cubique se correspond à elle-même, dans le système involutif gauche, ayant pour axes les droites associées issues de P et P_1. Les éléments M et M_1, A et A_1, B et B_1, a et a_1, b et b_1 sont correspondants.

7. Soient (C) et (C′) deux courbes osculatrices à un même plan μ, respectivement aux points M et M′. Les tangentes m et m' en ces points se coupent en un point A. Une transversale coupe les côtés MA, M′A, MM′ du triangle MM′A aux points B, C, D. Les droites b, c, d joignent les sommets M, M′, A à un même point O du plan μ. A la figure

$$(C),\ (C'),\ M,\ M',\ m,\ m',\ \mu,\ A,\ B,\ C,\ D,\ b,\ c,\ d$$

correspond dans une projectivité la figure

$$(C_1),\ (C_1'),\ M_1,\ M_1',\ m_1,\ m_1',\ \mu_1,\ A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1.$$

Si l'on désigne par a et a_1 les droites MM′, M_1M_1' ; par ρ, ρ_1, ρ', ρ_1' les rayons de courbure des courbes (C), (C_1), (C′), (C_1') respectivement en M, M_1, M′, M_1', on a

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{MA\,.\,MB}{AB}\,\frac{\sin(ab)}{\sin(am)\,.\,\sin(bm)} = \frac{1}{\rho_1}\,\frac{M_1A_1\,.\,M_1B_1}{A_1B_1}\,\frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1)\,.\,\sin(b_1m_1)},$$

$$\frac{1}{\rho'}\,\frac{M'A\,.\,M'C}{AC}\,\frac{\sin(ac)}{\sin(am')\ \sin(cm')} = \frac{1}{\rho_1'}\,\frac{M_1'A_1\,.\,M_1'C_1}{A_1C_1}\,\frac{\sin(a_1c_1)}{\sin(a_1m_1')\,.\,\sin(c_1m_1')}$$

Mais on a

$$\frac{MA}{M'A} = \frac{\sin(am')}{\sin(am)} \qquad \frac{MB \cdot AC \cdot M'D}{MD \cdot AB \cdot M'C} = 1,$$

$$\frac{\sin(bm) \cdot \sin(dm') \cdot \sin(ac)}{\sin(dm) \cdot \sin(cm') \cdot \sin(ab)} = 1;$$

donc

$$\frac{\rho'}{\rho} \frac{\overline{MA}^2}{\overline{M'A}^2} \frac{MD}{M'D} \frac{\sin(dm')}{\sin(dm)} = \frac{\rho_1'}{\rho_1} \frac{\overline{M_1A_1}^2}{\overline{M_1'A_1}^2} \frac{M_1D_1}{M_1'D_1} \frac{\sin(d_1m_1')}{\sin(d_1m_1)} \quad . \quad (7)$$

Par conséquent :

Si (C) *et* (C) *sont deux courbes osculatrices à un même plan* μ *respectivement aux points* M *et* M'; m *et* m', ρ *et* ρ' *les tangentes et les rayons de courbure en ces points;* D *un point pris arbitrairement sur la droite* MM'; d *une droite quelconque menée du point* mm' *ou* A *dans le plan* μ, *la quantité*

$$\frac{\rho'}{\rho} \frac{\overline{MA}^2}{\overline{M'A}^2} \frac{MD}{M'D} \frac{\sin(dm')}{\sin(dm)}$$

est projective.

8. Si les éléments d et D sont incidents, en désignant par k et h les distances des points M' et D à la tangente m, on a

$$\frac{MA}{M'A} = \frac{k'}{k} = \frac{MD}{M'D} \frac{h'}{h} = \frac{MD}{M'D} \frac{\sin(dm')}{\sin(dm)};$$

par suite, la quantité projective est alors

$$\frac{\rho' k'^3}{\rho k^3} (*).$$

9. Soient Σ et Σ_1 deux surfaces correspondantes dans deux espaces projectifs. Les coordonnées d'un point de Σ sont des

(*) Mehmke, *loc. cit.*, p. 57.

fonctions de deux variables t et t' ; à l'aide des équations de la projectivité, les coordonnées du point homologue sont des fonctions des mêmes variables. Deux points correspondants sont déterminés par un même système de valeurs de t et t'. Si l'on fait $t = \varphi t'$, on a sur Σ et Σ_1 deux courbes homologues (C) et (C_1). Deux valeurs t et $t + \Delta t$ fixent sur (C) la position de deux points M et N, et sur (C_1) celle des points homologues M_1 et N_1 (fig. 3). Appelons :

m et m_1 les tangentes aux courbes (C) et (C_1) en M et M_1 ;

μ et μ' les plans tangents à la surface Σ aux points M et N ;

μ_1 et μ'_1 les plans tangents à la surface Σ_1 aux points M_1 et N_1 ;

α' et β' deux plans quelconques du premier espace, passant par la droite $\mu\mu'$;

α'_1 et β'_1 leurs homologues dans le second espace.

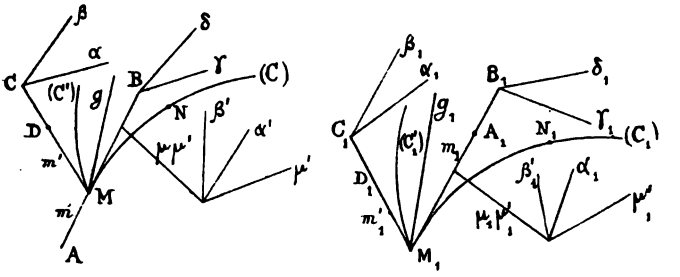


Fig. 3.

On a

$$(\mu\alpha'\mu'\beta') = (\mu_1\alpha'_1\mu'_1\beta'_1),$$

ou

$$\lim \frac{\sin(\mu\mu')}{\psi} \cdot \frac{\psi}{\Delta t} \cdot \frac{\sin(\alpha'\beta')}{\sin(\alpha'\mu') \cdot \sin(\beta'\mu)}$$

$$= \lim \frac{\sin(\mu_1\mu'_1)}{\psi_1} \cdot \frac{\psi_1}{\Delta t} \cdot \frac{\sin(\alpha'_1\beta'_1)}{\sin(\alpha'_1\mu'_1) \cdot \sin(\beta'_1\mu_1)}.$$

ψ est l'angle des normales à la surface Σ aux points M et N(*) ; ψ_1 est celui des normales à la surface Σ aux points M_1 et N_1.

(*) Abstraction faite des infiniment petits d'ordre supérieur au premier.

Par suite,

$$\psi \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu).\sin(\beta\mu)} = \psi_1 \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1).\sin(\beta_1\mu_1)} \quad . \quad . \quad (8)$$

Si m et m' sont deux tangentes conjuguées au point **M** de la surface Σ, les plans α et β sont deux plans quelconques passant par m', α_1 et β_1 sont leurs homologues.

COROLLAIRE. *Deux surfaces* Σ *et* Σ' *tangentes en un point* **M** *ont en ce point deux tangentes conjuguées* m *et* m' *communes, le quotient des quantités* ψ *et* ψ' *évaluées au point* **M**, *relativement à deux courbes* (C) *et* (C') *situées respectivement sur* Σ *et* Σ', *et tangentes en* **M** *à* m, *est projectif.*

10. On a la relation

$$\frac{ds}{\psi} = \sqrt{\rho\rho_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

ρ est le rayon de courbure au point **M** de la section normale, tangente à (C). Si n est la normale à Σ au point **M**, ρ_0 est la distance du point **M** au point central sur la génératrice n, de la normalie ayant pour directrice la courbe (C) (*).

Les formules (1), (8), (9) donnent

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\rho\rho_0}} \quad \frac{MA.MB}{AB} \quad \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu).\sin(\beta\mu)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\rho_1\rho_{01}}} \quad \frac{M_1A_1.M_1B_1}{A_1B_1} \quad \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1).\sin(\beta_1\mu_1)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (10)$$

ρ_1 et ρ_{01} sont des quantités analogues à ρ et ρ_0 pour la courbe (C_1).

11. On a de même, pour deux courbes homologues (C')

(*) SERVAIS, *Quelques formules sur la courbure des surfaces* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, [3], t. XXVII, p. 900).

et (C'_1), des surfaces Σ et Σ_1, tangentes la première à la droite m', la seconde à la droite m'_1 :

$$\frac{1}{\sqrt{\rho'\rho'_0}}\,\frac{MC\,.\,MD}{CD}\,\frac{\sin(\gamma\delta)}{\sin(\gamma\mu)\,.\,\sin(\delta\mu)} = \frac{1}{\sqrt{\rho'_1\rho'_{01}}}\,\frac{M_1C_1\,.\,M_1D_1}{C_1D_1}\,\frac{\sin(\gamma_1\delta_1)}{\sin(\gamma_1\mu_1)\,.\,\sin(\delta_1\mu_1)}.$$

Mais

$$\rho_0 = \rho\sin^2\varphi \quad (^*), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

φ étant l'angle des tangentes conjuguées m et m'. Donc

$$\sqrt{\rho\rho_0}\,.\sqrt{\rho'\rho'_0} = \rho\rho'\sin^2\varphi = R_1R_2,$$

$$\sqrt{\rho_1\rho_{01}}\,.\sqrt{\rho'_1\rho'_{01}} = \rho_1\rho'_1\sin^2\varphi_1 = R_{11}R_{21};$$

R_1 et R_2, R_{11} et R_{21} sont les rayons de courbure principaux de Σ et Σ_1, respectivement en M et M_1. Par conséquent,

$$R_1R_2 : R_{11}R_{21}$$

$$= \frac{MA\,.\,MB}{AB}\cdot\frac{A_1B_1}{M_1A_1\,.\,M_1B_1}\,\frac{\sin(\gamma\delta)}{\sin(\gamma\mu)\,.\,\sin(\delta\mu)}\cdot\frac{\sin(\gamma_1\mu_1)\,.\,\sin(\delta_1\mu_1)}{\sin(\delta_1\mu_1)}$$

$$\times\,\frac{MC\,.\,MD}{CD}\,\frac{C_1D_1}{M_1C_1\,.\,M_1D_1}\,\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\,.\,\sin(\beta\mu)}\cdot\frac{\sin(\alpha_1\mu_1)\,.\,\sin(\beta_1\mu_1)}{\sin(\alpha_1\beta_1)} \quad (12)$$

Les deux facteurs du second membre séparés par le signe $\times$ contiennent le premier les éléments situés sur m et m'_1, le second les éléments situés sur m' et m'_1.

13. Corollaire. *Si deux surfaces sont tangentes en un point* M, *le quotient des courbures totales en ce point est projectif* (**).

Ces deux surfaces ont en effet deux tangentes conjuguées m et m' communes.

(*) Servais, *loc. cit.*, p. 898.

(**) Mehmke, *loc. cit.*, p. 56.

12. Il en résulte que le second membre de la formule (12) ne change pas si l'on remplace le premier facteur

$$\frac{MA \cdot MB}{AB}\,\frac{A_1B_1}{M_1A_1 M_1B_1}\,\frac{\sin(\gamma\delta)}{\sin(\gamma\mu)\ \sin(\delta\mu)}\cdot\frac{\sin(\gamma_1\mu_1)\cdot\sin(\delta_1\mu_1)}{\sin(\gamma_1\delta_1)},$$

relatif aux deux tangentes homologues m et m_1, par le facteur analogue relatif à deux droites homologues quelconques m'' et m_1'', issues de M et M_1 dans les plans μ et μ_1. Car m'' et m' peuvent être considérées comme deux tangentes conjuguées d'une surface Σ', tangente en M au plan μ. Donc :

Soient dans un espace (E) *un point* M *et un plan* μ *passant par* M ; M_1 *et* μ_1 *les éléments correspondant à* M *et* μ *dans un espace* (E_1) *projectif à* (E) ; m *et* m_1 *deux droites homologues des plans* μ *et* μ_1, *passant la première par* M, *la seconde par* M_1 ; A *et* B *deux points pris arbitrairement sur* m ; γ *et* δ *deux plans quelconques passant par* m ; A_1, B_1, γ_1, δ_1 *les éléments de* (E_1) *correspondant respectivement à* A, B, γ, δ ; *la quantité*

$$\frac{MA \cdot MB}{AB}\cdot\frac{A_1B_1}{M_1A_1 \cdot M_1B_1}\,\frac{\sin(\gamma\delta)}{\sin(\gamma\mu)\cdot\sin(\delta\mu)}\cdot\frac{\sin(\gamma_1\mu_1)\cdot\sin(\delta_1\mu_1)}{\sin(\gamma_1\delta_1}$$

reste constante, si la droite m *tourne autour du point* M *dans le plan* μ.

13. D'après la formule (12), cette constante est égale à la racine carrée du quotient $R_1R_2 : R_{11}R_{21}$. Ainsi

$$\sqrt{\frac{R_1R_2}{R_{11}R_{21}}} = \frac{MA \cdot MB}{AB}\,\frac{A_1B_1}{M_1A_1 \cdot M_1B_1}\,\frac{\sin(\gamma\delta)}{\sin(\gamma\mu)\cdot\sin(\delta\mu)}\,\frac{\sin(\gamma_1\mu_1)\cdot\sin(\delta_1\mu_1)}{\sin(\gamma_1\delta_1)}. \quad (13)$$

Corollaire. *Si deux surfaces* Σ *et* Σ' *sont tangentes à un même plan, respectivement en* M *et* M', *le quotient des courbures totales de* Σ *et* Σ' *en* M *et* M' *n'est pas altéré par une transformation affine.*

De la propriété (13) résulte aussi que dans la formule

$$\frac{\tau}{\tau_1} = \frac{MA \cdot MB}{AB}\,\frac{A_1B_1}{M_1A_1 \cdot M_1B_1}\,\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\cdot\sin(\beta\mu)}\,\frac{\sin(\alpha_1\mu_1)\cdot\sin(\beta_1\mu_1)}{\sin(\alpha_1\beta_1)} \quad (8)$$

on peut supposer que les tangentes m et m_1 aux deux courbes homologues (C) et (C_1) sont remplacées par deux droites homologues quelconques des plans osculateurs μ et μ_1, et passant la première par M, la seconde par M_1.

COROLLAIRES. *Si deux courbes ont en un point commun* M *même plan osculateur, le quotient des torsions en ce point est projectif.*

Si deux courbes sont osculatrices à un même plan, respectivement aux points M *et* M', *le quotient des torsions de ces courbes en* M *et* M' *n'est pas altéré par une transformation affine* (*).

15. Soient M et M_1 deux points quelconques d'une quadrique Σ; S le point à l'infini de MM_1; σ le plan polaire de S. Cette surface Σ se correspond à elle-même dans l'homologie harmonique (S, σ), et les points M et M_1 sont correspondants. Les courbures totales de Σ en M et M_1 sont donc liées par la relation

$$\frac{\sqrt{R_1R_2}}{\sqrt{R_{11}R_{21}}} = \frac{MA.MB}{AB}\,\frac{A_1B_1}{M_1A_1.M_1B_1}\,\frac{\sin(\gamma\delta)}{\sin(\gamma\mu).\sin(\delta\mu)}\,\frac{\sin(\gamma_1\mu_1)\,\sin(\delta_1\mu_1)}{\sin(\gamma_1\delta_1)}. \qquad (13)$$

Les droites m et m_1 menées par M et M_1, parallèlement à l'intersection des plans tangents μ et μ_1, sont correspondantes et sont les supports de deux ponctuelles homologues égales. Si donc les éléments qui entrent dans la formule sont situés respectivement sur ces deux droites,

$$\frac{MA.MB}{AB} = \frac{M_1A_1.M_1B_1}{A_1B_1}.$$

Choisissons pour γ et γ_1 les plans menés par m et m_1 parallèlement à σ, et pour δ et δ_1 le plan double mm_1 :

$$\sin(\gamma\delta) = \sin(\gamma_1\delta_1).$$

(*) MEHMKE, *loc. cit.*, p. 56.

Si O est un point du plan σ, k et k_1 les distances de ce point aux deux plans μ et μ_1,

$$\frac{k}{k_1} = \frac{\sin(\gamma\mu)}{\sin(\gamma_1\mu_1)}.$$

Soient d et d_1 les distances des points M_1 et M respectivement aux plans μ et μ_1,

$$\frac{d}{d_1} = \frac{\sin(\delta\mu)}{\sin(\delta_1\mu_1)}.$$

La droite MO coupe le plan γ_1 en un point N, homologue du point d'intersection N_1 de la droite M_1O avec le plan γ; donc

$$\frac{MO}{M_1O} = \frac{MN}{M_1N_1}, \quad \text{ou} \quad \frac{k}{k_1} = \frac{d}{d_1}.$$

Par conséquent,

$$\frac{R_1R_2}{R_{11}R_{21}} = \frac{d_1^4}{d^4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Si M *et* M_1 *sont deux points d'une quadrique,* d_1 *et* d *les distances des points* M *et* M_1 *respectivement aux plans tangents à la surface en* M_1 *et* M, *les courbures totales de la quadrique en ces points sont liées par la formule*

$$R_1R_2d^4 = R_{11}R_{21}d_1^4.$$

16. Corollaire. Si la quadrique a un centre O, en désignant par k et k_1 les distances de ce centre aux plans tangents en M et M_1, on a (voir plus haut)

$$\frac{d}{d_1} = \frac{k}{k_1};$$

donc

$$R_1R_2k^4 = R_{11}R_{21}k_1^4 = c^{te}.$$

Pour déterminer cette constante, on se place en un sommet réel de la quadrique. On désigne par a le demi-axe passant par

ce sommet, par P_b et P_c les puissances des involutions des points conjugués sur les deux autres axes ; les rayons de courbure principaux R_{11} et R_{21} sont donnés par les formules

$$R_{11} = \frac{P_b}{a}, \quad R_{21} = \frac{P_c}{a};$$

donc

$$R_{11} R_{21} a^4 = P_a P_b P_c.$$

en posant

$$P_a = a^2.$$

Par suite,

$$R_1 R_2 = \frac{P_a \cdot P_b \cdot P_c}{k^4} \text{ (*)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

17. Soient Σ et Σ' deux surfaces ayant un point commun M ; μ et μ' les plans tangents en ce point ; α un plan quelconque passant par $\mu\mu'$. A la figure

$$\Sigma,\ \Sigma',\ M,\ \mu,\ \mu',\ \alpha$$

correspond dans une projectivité la figure

$$\Sigma_1,\ \Sigma'_1,\ M_1,\ \mu_1,\ \mu'_1,\ \alpha_1.$$

Si l'on désigne par A et B deux points de $\mu\mu'$; par A_1 et B_1 leurs homologues ; par K, K', K_1, K'_1 les courbures totales des surfaces Σ, Σ', Σ_1, Σ'_1 respectivement en M et M_1, on a

$$\sqrt{K}\ \frac{MA \cdot MB}{AB}\ \frac{\sin(\alpha\mu')}{\sin(\alpha\mu) \cdot \sin(\mu'\mu)} = \sqrt{K_1}\ \frac{M_1A_1 \cdot M_1B_1}{A_1B_1}\ \frac{\sin(\alpha_1\mu'_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1) \cdot \sin(\mu'_1\mu_1)},$$

$$\sqrt{K'}\ \frac{MA \cdot MB}{AB}\ \frac{\sin(\alpha\mu)}{\sin(\alpha\mu') \cdot \sin(\mu\mu')} = \sqrt{K'_1}\ \frac{M_1A_1 \cdot M_1B_1}{A_1B_1}\ \frac{\sin(\alpha_1\mu_1)}{\sin(\alpha_1\mu'_1) \cdot \sin(\mu_1\mu'_1)};$$

(*) DUPIN, *Développements de Géométrie*, 1813, troisième mémoire, article VIII.

donc
$$\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{K'}}\frac{\sin^2(\alpha\mu')}{\sin^2(\sigma\mu)} = \frac{\sqrt{K_1}}{\sqrt{K_1'}}\frac{\sin^2(\alpha_1\mu_1')}{\sin^2(\alpha_1\mu_1)} \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Par conséquent, la quantité
$$\frac{K}{K'}\frac{\sin^4(\alpha\mu')}{\sin^4(\alpha\mu)}$$
est projective.

18. Soient Σ et Σ' deux surfaces ayant un plan tangent commun μ; M et M' les points de contact, A un point de la droite MM'. A la figure
$$\Sigma,\ \Sigma',\ \mu,\ M,\ M',\ A$$
correspond, dans une projectivité, la figure
$$\Sigma_1,\ \Sigma_1',\ \mu_1,\ M_1,\ M_1',\ A_1.$$
Si l'on désigne par α, β deux plans menés par MM'; par α_1 et β_1 leurs homologues, on a
$$\sqrt{K}\ \frac{MM'\,.\,MA}{AM'}\ \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\,.\,\sin(\beta\mu)}$$
$$= \sqrt{K_1}\ \frac{M_1M_1'\,.\,M_1A_1}{A_1M_1'}\ \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\,.\,\sin(\beta_1\mu_1)};$$
$$\sqrt{K'}\ \frac{M'M\,.\,M'A}{AM}\ \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\,.\,\sin(\beta\mu)}$$
$$= \sqrt{K_1'}\ \frac{M_1'M_1\,.\,M_1'A_1}{A_1M_1}\ \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\,.\,\sin(\beta_1\mu_1)},$$
donc
$$\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{K'}}\frac{\overline{MA}^2}{\overline{M'A}^2} = \frac{\sqrt{K_1}}{\sqrt{K_1'}}\frac{\overline{M_1A_1}^2}{\overline{M_1'A_1}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Par conséquent, la quantité
$$\frac{K}{K'}\frac{\overline{MA}^4}{\overline{M'A}^4}$$
est projective.

19. Soient Σ et Σ' deux surfaces quelconques, M un point de Σ, M' un point de Σ'; μ et μ' les plans tangents en ces points; Σ'' et Σ''' deux surfaces tangentes respectivement aux plans μ et μ', en un même point M'' de la droite $\mu\mu'$; α un plan passant par $\mu\mu'$; A, B, C les points d'intersection d'une transversale avec les côtés MM', M'M'', M''M du triangle MM'M''. Les quantités

$$\frac{K}{K''}\frac{\overline{MC}^4}{\overline{M''C}^4}, \quad \frac{K''}{K'''}\frac{\sin^4(\alpha\mu')}{\sin^4(\alpha\mu)}, \quad \frac{K'''}{K'}\frac{\overline{M''B}^4}{\overline{M'B}^4}$$

sont projectives (17, 18). Leur produit

$$\frac{K}{K'}\frac{\overline{MC}^4 . \overline{M''B}^4}{\overline{M'C}^4 . \overline{M'B}^4}\frac{\sin^4(\alpha\mu')}{\sin^4(\alpha\mu)}$$

est aussi projectif.

Mais

$$\frac{MC . M''B}{MA . M''C}\frac{M'A}{M'B} = 1;$$

par suite, la quantité

$$\frac{K}{K'}\frac{\overline{MA}^4}{\overline{M'A}^4}\frac{\sin^4(\alpha\mu')}{\sin^4(\alpha\mu)}$$

est projective. Donc : *Si* A *est un point quelconque de la droite joignant deux points* M *et* M', *appartenant respectivement à deux surfaces* Σ *et* Σ', α *un plan mené arbitrairement par l'intersection des plans tangents* μ *et* μ' *en ces points, la quantité*

$$(K : K')\left(\frac{MA : M'A}{\sin(\alpha\mu) : \sin(\alpha\mu')}\right)^4,$$

dans laquelle K *et* K' *désignent les courbures totales de* Σ *et* Σ' *en* M *et* M', *est projective* (*).

(*) MEHMKE, *loc. cit.*

20. Si les éléments A et a sont incidents, en désignant par d et h les distances des points M′ et A au plan μ, et par d' et h' celles des points M et A au plan μ', on a

$$\frac{d'}{d} = \frac{MA}{M'A} \cdot \frac{h'}{h} = \frac{MA}{M'A} \frac{\sin(a\mu')}{\sin(a\mu)};$$

par suite, la quantité $(K : K') : (d : d')^4$ est projective (*).

21. On démontre de même le théorème suivant :

Si A est un point quelconque de la droite joignant deux points M et M′, appartenant respectivement à deux courbes gauches (C) et (C′), α un plan mené arbitrairement par l'intersection des plans osculateurs μ et μ' en ces points, la quantité

$$(\tau' : \tau)\left(\frac{MA : M'A}{\sin(a\mu) : \sin(a\mu')}\right)^2,$$

dans laquelle τ et τ' désignent les rayons de torsion de (C) et (C′) en M et M′, est projective.

Si les éléments A et α sont incidents, l'expression considérée peut se mettre sous la forme

$$(\tau : \tau')(d : d')^2 \quad (**);$$

d et d' sont les distances des points M′ et M respectivement aux plans μ et μ'.

Le théorème précédent se déduit aisément du théorème concernant deux surfaces Σ et Σ'. Les asymptotiques de deux surfaces homologues se correspondent, et le rayon de torsion τ d'une asymptotique est donné par la formule

$$\tau = \sqrt{-R_1 R_2}.$$

22. Supposons les points M et M′ sur une cubique gauche; cette courbe se correspond à elle-même dans un système

(*) MEHMKE, *loc. cit.*

(**) IDEM, *loc. cit.*

involutif gauche, dont les axes sont deux droites associées, s'appuyant sur la cubique, en deux points séparés harmoniquement par M et M'. Les correspondants de M et M' dans cette projectivité sont respectivement M' et M. Donc,

$$\frac{\tau d^2}{\tau' d'^2} = \frac{\tau' d'^2}{\tau d^2};$$

par suite,

$$\tau d^2 = \tau' d'^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Si τ et τ' sont les rayons de torsion en deux points M *et* M' *d'une cubique gauche,* d *et* d' *les distances des points* M' *et* M, *respectivement aux plans osculateurs à la courbe en* M *et* M', *on a*

$$\tau d^2 = \tau' d'^2.$$

23. Soient Σ, Σ_1, C deux coniques et un cercle dans un même plan, tangents en un point M; m, m_1, m_2 les secondes cordes d'intersection des courbes Σ et C, Σ_1 et C, Σ_1 et Σ_2; ρ et ρ_1 les rayons de courbure des courbes Σ et Σ_1 en M; R le rayon du cercle C. La conique Σ et le cercle C sont homologiques; le centre d'homologie est le point M, l'axe d'homologie est la droite m. Cet axe est parallèle à la corde de courbure de Σ au point M. Donc, si A et B sont les points d'intersection de cette corde de courbure avec la conique Σ et le cercle C, le coefficient d'homologie est $\frac{MA}{MB}$ ou $\frac{\rho}{R}$.

De même, les courbes Σ_1 et C sont homologiques, et le coefficient d'homologie est $\frac{\rho_1}{R}$.

Les coniques Σ, Σ_1, C étant tangentes en M, les secondes cordes d'intersection m, m_1, m_2 de ces courbes prises deux à deux, concourent en un point P. Désignons par S, S_1, S_2, les points d'intersection des courbes Σ, Σ_1, C avec la droite MP;

$$(MPSS_2) = \frac{\rho}{R}, \quad (MPS_1S_2) = \frac{\rho_1}{R},$$

d'où

$$(MPSS_1) = \frac{\rho}{\rho_1}.$$

Mais les coniques Σ et Σ_1 sont homologiques, et m_1 est l'axe d'homologie; le coefficient d'homologie est donc $\frac{\rho}{\rho_1}$.

Deux coniques Σ et Σ_1, tangentes dans un même plan en un point M, sont homologiques; le coefficient d'homologie est égal au quotient des rayons de courbure des deux courbes au point M.

Cette propriété est implicitement contenue dans l'intéressante note de M. Fouret. Elle établit, pour deux courbes planes tangentes en un point M, la projectivité du quotient des rayons de courbure en ce point.

24. On peut déduire de cette projectivité celle du quotient des courbures totales au point de contact M, de deux surfaces Σ et Σ'.

Soient m et m' les deux tangentes conjuguées communes aux deux surfaces; n la normale au point M; M_1, m_1, m'_1, n_1 les éléments correspondants à M, m, m', n dans la projectivité.

Les droites m_1 et m'_1 sont les tangentes conjuguées, communes aux deux surfaces Σ_1 et Σ'_1 homologues de Σ et Σ'. Les sections normales de Σ et Σ' ayant pour tangente m, correspondent aux sections faites dans les surfaces Σ_1 et Σ'_1, par le plan $m_1 n_1$.

Le quotient des rayons de courbure des deux premières sections est égal à celui des deux autres (23). Ce dernier quotient, d'après le théorème de Meusnier, est égal à celui des rayons de courbure des sections normales de Σ_1 et Σ'_1, tangentes à la droite m_1. Désignons par ρ et ρ', r et r', ρ_1 et ρ'_1, r_1 et r'_1 les rayons de courbure des sections normales des surfaces Σ, Σ', Σ_1, Σ'_1, tangentes respectivement à m, m', m_1, m'_1;

$$\frac{\rho}{r} = \frac{\rho_1}{r_1}, \quad \frac{\rho'}{r'} = \frac{\rho'_1}{r'_1};$$

par suite,

$$\frac{\rho\rho' \sin^2(mm')}{rr' \sin^2(mn')} = \frac{\rho_1\rho'_1 \sin^2(m_1m'_1)}{r_1r'_1 \sin^2(m_1m'_1)}.$$

Le premier membre représente le quotient des courbures

totales des surfaces Σ' et Σ au point M; le second, celui des courbures totales des surfaces Σ_1' et Σ_1 au point M_1; par conséquent, le théorème est démontré.

25. Étant donnés deux systèmes plans réciproques, à une courbe (C) du premier, décrite par un point mobile M, correspond une courbe (C_1) du second, enveloppe de la droite m_1, homologue du point M. On sait que la tangente m à la courbe (C) au point M, et le point de contact M_1 de la tangente m_1 à la courbe (C_1), sont correspondants.

Les coordonnées du point mobile M sont des fonctions d'une variable indépendante t, et à l'aide des équations de la réciprocité, les coordonnées de la droite homologue m_1 sont des fonctions de la même variable. Deux éléments correspondants M et m_1 sont déterminés par la même valeur de la variable indépendante t. Si l'on donne à cette valeur un accroissement Δt, on obtient sur la courbe (C), un point M' infiniment voisin de M, et sur la courbe (C_1) une tangente m_1'

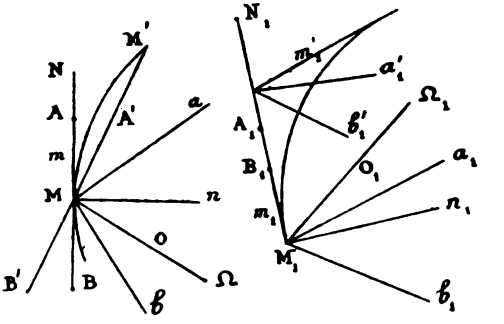


Fig. 4.

infiniment voisine de m_1 (fig. 4). Le point M' et la droite m_1' déterminés par une même valeur $t + \Delta t$ de la variable indépendante, sont homologues dans les systèmes plans réciproques.

Appelons A′ et B′ deux points quelconques de la droite MM′, a'_1 et b'_1 les droites correspondantes. On sait que la ponctuelle décrite par un point est projective au faisceau des droites homologues; donc

$$(MA'M'B') = (m_1a'_1m'_1b'_1),$$

ou

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{MM'}{\Delta s} \cdot \frac{A'B'}{M'A' \cdot MB'} = \lim \frac{\omega_1}{\Delta t} \cdot \frac{\sin(m_1m'_1)}{\omega_1} \frac{\sin(a'_1b'_1)}{\sin(m'_1a'_1) \cdot \sin(m_1b'_1)};$$

ω_1 est l'angle de contingence de la courbe (C_1) au point M_1; par suite,

$$ds \cdot \frac{AB}{MA \cdot MB} = \omega_1 \frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1)\sin(b_1m_1)} \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

A et B sont deux points quelconques de la tangente m, a_1 et b_1 sont les droites homologues. De même, si A_1 et B_1 sont deux points de m_1, a et b leurs droites correspondantes, on a

$$\omega \frac{\sin(ab)}{\sin(am)\sin(bm)} = ds_1 \frac{A_1B_1}{M_1A_1 \cdot M_1B_1}.$$

Des deux dernières formules on déduit

$$\rho \frac{AB}{MA \cdot MB} \frac{\sin(am) \cdot \sin(bm)}{\sin(ab)} = \frac{1}{\rho_1} \frac{M_1A_1 \cdot M_1B_1}{A_1B_1} \frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1)\sin(b_1m_1)}. \quad (20)$$

Substituons aux points A et A_1 les points N et N_1 correspondant, le premier à la normale n_1 à la courbe (C_1) au point M_1, le second à la normale n à la courbe (C) au point M; supposons les points B et B_1 à l'infini, et désignons par o_1 et o les droites homologues de ces points. La formule (20) devient

$$\rho\rho_1 = \frac{MN \cdot M_1N_1}{\operatorname{tg}(mo) \cdot \operatorname{tg}(m_1o_1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

22. Supposons les courbes (C) et (C_1) polaires réciproques,

par rapport à un cercle de centre O et de rayon a. Désignons par M_2 le point om_1; par φ l'angle (nn_1), lequel est égal à (oo_1);

$$(mo) = (m_1o_1) = \frac{\pi}{2} - \varphi; \quad MN = \frac{OM}{\sin \varphi};$$

$$M_1N_1 = \frac{OM_1}{\sin \varphi}; \quad OM \cdot OM_2 = a^2.$$

Par conséquent,

$$pp_1 \cos^3 \varphi = a^2 \text{ (*)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

23. Représentons par n et n_1 les longueurs des normales polaires des courbes (C) et (C_1) aux points M et M_1, le centre O étant l'origine :

$$MN = n \operatorname{tg}(mo), \quad M_1N_1 = n_1 \operatorname{tg}(m_1o_1);$$

donc

$$pp_1 = nn_1 \text{ (**)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

24. Supposons que dans la formule (20), les droites a, b, a_1, b_1 soient deux couples de droites isotropes conjuguées. Les points A et B sont les éléments doubles d'une involution (I), perspective à l'involution de rayons qui, dans la première figure, correspond à l'involution définissant les points cycliques de la seconde. De même, A_1 et B_1 sont les éléments doubles d'une involution (I_1), perspective à l'involution de rayons qui, dans la seconde figure, correspond à l'involution définissant les points cycliques de la première.

(*) MANNHEIM. *Transformations par polaires réciproques des propriétés relatives aux rayons de courbure.* (JOURNAL DE LIOUVILLE, 1866, p. 193.)
SERVAIS, *Sur la courbure de la podaire et de la polaire réciproque d'une courbe donnée.* (MATHESIS, 2e série, t. I, p. 87.)

(**) D'OCAGNE, *Sur la relation entre les rayons de courbure de deux courbes polaires réciproques.* (ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE, 1887, p. 314.)
SERVAIS, *ibid.*, p. 88.

Soient O et O_1, P_m et P_{m_1} les points centraux et les puissances des involutions (I) et (I_1) ;

$$\frac{MA \cdot MB}{AB} = \frac{\overline{MO}^2 - P_m}{2\sqrt{P_m}}, \quad \frac{M_1A_1 \cdot M_1B_1}{A_1B_1} = \frac{\overline{M_1O_1}^2 - P_{m_1}}{2\sqrt{P_{m_1}}},$$

$$\frac{\sin(ab)}{\sin(am)\sin(bm)} = \frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1)\cdot\sin(b_1m_1)} = 2\sqrt{-1}.$$

Par suite,

$$pp_1 = \frac{(\overline{MO}^2 - P_m)(\overline{M_1O_1}^2 - P_{m_1})}{\sqrt{P_m \cdot P_{m_1}}} \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Si les figures sont réciproques par rapport à un cercle de centre C,

$$\overline{MO}^2 - P_m = \overline{MC}^2, \quad \overline{M_1O_1}^2 - P_{m_1} = \overline{M_1C}^2,$$

$$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{P_m} = OC, \quad \sqrt{-1}\ \sqrt{P_{m_1}} = O_1C;$$

donc

$$pp_1 = \frac{\overline{MC}^2\ \overline{M_1C}^2}{OC \cdot O_1C}.$$

9. Étant donnés deux espaces réciproques, aux points M, aux tangentes m et aux plans osculateurs μ d'une courbe gauche (C), correspondent respectivement les plans osculateurs μ_1, les tangentes m_1, et les points M_1 d'une courbe gauche (C_1). Les coordonnées du point M sont des fonctions d'une variable indépendante t, et à l'aide des équations de la réciprocité, les coordonnées du plan homologue μ_1 sont des fonctions de la même variable. Les éléments correspondants M et μ_1 sont déterminés par une même valeur de la variable indépendante t. Si l'on donne à cette valeur un accroissement Δt, on obtient sur la courbe (C) un point M' infiniment voisin de M, et sur la couche (C_1) un plan osculateur μ_1' infiniment voisin de μ_1 (fig. 5). Le point M' et le plan μ_1' déter-

minés par une même valeur $t + \Delta t$ de la variable indépendante, sont homologues dans les espaces réciproques.

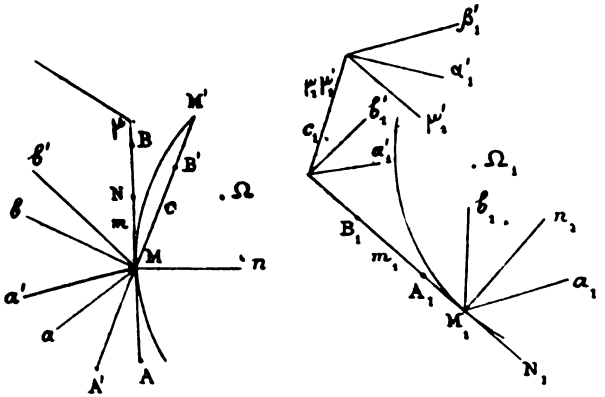


Fig. 5.

Appelons A′ et B′ deux points quelconques de la droite MM′, α_1' et β_1' les plans correspondants;

$$(MA'M'B') = (\mu_1\alpha_1'\mu_1'\beta_1'),$$

ou

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{MM'}{\Delta s} \cdot \frac{A'B'}{M'A' \cdot MB'} = \lim \frac{\nu_1}{\Delta t} \cdot \frac{\sin(\mu_1\mu_1')}{\nu_1} \cdot \frac{\sin(\alpha_1'\beta_1')}{\sin(\alpha_1'\mu_1')\sin(\beta_1'\mu_1)};$$

ν_1 est l'angle de torsion de la courbe (C_1) au point M_1; par suite,

$$ds \frac{AB}{MA \cdot MB} = \nu_1 \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\sin(\beta_1\mu_1)} \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

A et B sont deux points quelconques de la tangente m, α_1 et β_1 sont les plans homologues. De même, si A_1 et B_1 sont deux points de m_1, α et β les plans correspondants,

$$\nu \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\sin(\beta\mu)} = ds_1 \frac{A_1B_1}{M_1A_1 \cdot M_1B_1}.$$

Des deux dernières formules, on déduit

$$\tau \frac{AB}{MA \cdot MB} \frac{\sin(\alpha\mu)\sin(\beta\mu)}{\sin(\alpha\beta)} = \frac{1}{\tau_1} \frac{M_1A_1}{A_1B_1} \frac{M_1B_1}{\sin(\alpha_1\beta_1)} \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\sin(\beta_1\mu_1)}. \quad (26)$$

C'est la relation qui lie les rayons de torsion des courbes réciproques (C) et (C_1), aux points M et M_1.

Appelons n et n_1 les binormales des courbes (C) et (C_1), aux points M et M_1; ν et ν_1 les plans mn et m_1n_1; N et Ω les points du premier espace, correspondant au plan ν_1 et au plan à l'infini du second; N_1 et Ω_1 les points du second espace, correspondant au plan ν et au plan à l'infini du premier; ω et ω_1 les plans déterminés par les couples d'éléments m et Ω, m_1 et Ω_1; ces plans correspondent respectivement, aux points à l'infini des droites m_1 et m.

Les formules (25) et (26) deviennent alors

$$\frac{ds}{MN} = \frac{\gamma_1}{\operatorname{tg}(\mu_1\omega_1)}, \quad (27)$$

$$\tau\tau_1 = \frac{MN \cdot M_1N_1}{\operatorname{tg}(\mu\omega) \cdot \operatorname{tg}(\mu_1\omega_1)} \quad (28)$$

30. Supposons les courbes (C) et (C_1) polaires réciproques par rapport à une sphère de centre O et de rayon a (fig. 6). Les points Ω et Ω_1 sont réunis en O.

Le rayon OM_1 est normal au plan μ; la tangente m_1, perpendiculaire à sa conjuguée m par rapport à la sphère, est située dans le plan μ_1, normal à OM. Par suite, m_1 est perpendiculaire au plan Om ou ω, et l'angle $(\mu\omega)$ est égal à celui des droites OM_1 et m_1.

De même l'angle $(\mu_1\omega_1)$ est celui des droites OM et m.

Le triangle OMN est rectangle en O; car le diamètre ON est normal au plan des droites n_1 et m_1, qui est le plan polaire de N. Le diamètre ON est donc perpendiculaire à n_1 et à sa parallèle OM.

De même le triangle OM_1N_1 est rectangle en O.

On déduit de là les égalités

$$MN = \frac{OM}{\cos(\mu_1\omega_1)}, \quad M_1N_1 = \frac{OM_1}{\cos(\mu\omega)}.$$

On a donc

$$\tau\tau_1 = \frac{OM \cdot OM_1}{\sin(\mu\omega)\sin(\mu_1\omega_1)}.$$

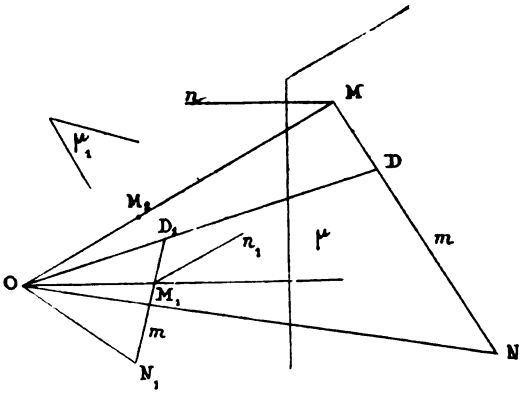


Fig. 6.

La plus courte distance des droites conjuguées m et m_1 passe par le centre O; représentons par D et D_1 ses points d'appui sur m et m_1;

$$OD = OM \sin(\mu_1\omega_1), \quad OD_1 = OM_1 \sin(\mu\omega);$$

donc

$$\tau\tau_1 = \frac{\overline{OM}^2 \cdot \overline{OM_1}^2}{OD \cdot OD_1} \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

Si M_2 est la trace du diamètre OM sur le plan osculateur μ_1, φ l'angle des binormales n et n_1, ou des diamètres OM, OM_1,

$$OM \cdot OM_2 = a^2, \quad OD \cdot OD_1 = a^2,$$

$$OM_2 = OM_1 \cos\varphi;$$

par conséquent,

$$\tau\tau_1 \cos^2 \varphi = a^2 \text{ (*)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

31. Reprenons le cas général de deux courbes gauches réciproques (29, fig. 5). Dans le plan $m\mathrm{M}'$, le point M est le centre d'un faisceau de rayons $(a', b', \ldots)$; le faisceau homologue $(a'_1, b'_1, \ldots)$ est dans le plan μ_1, et a pour centre le point correspondant au plan $m\mathrm{M}'$. Désignons par c et c_1 les droites MM' et $\mu_1\mu'_1$;

$$(ma'cb') = (m_1a'_1c_1b'_1),$$

ou

$$\lim \frac{\sin(mc)}{\Delta\alpha} \cdot \frac{\omega}{\Delta t} \frac{\sin(a'b')}{\sin(ac) \cdot \sin(b'm)} = \lim \frac{\sin(m_1c_1)}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_1}{\Delta t} \frac{\sin(a'_1b'_1)}{\sin(a'_1c_1) \sin(b'_1m_1)}.$$

Mais

$$\lim \frac{\sin(mc)}{\omega} = \frac{1}{2}; \quad \lim \frac{\sin(m_1c_1)}{\omega_1} = \frac{1}{2};$$

par suite,

$$\omega \frac{\sin(ab)}{\sin(am) \cdot \sin(bm)} = \omega_1 \frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1) \cdot \sin(b_1m_1)} \quad . \quad (31)$$

a et b sont deux droites issues de M dans le plan osculateur μ; a_1 et b_1 sont leurs homologues.

On a trouvé précédemment

$$ds \cdot \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{MA} \cdot \mathrm{MB}} = \eta_1 \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1) \cdot \sin(\beta_1\mu_1)} \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Les égalités (25) et (31) donnent

$$\frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{MA} \cdot \mathrm{MB}}{\mathrm{AB}} \frac{\sin(ab)}{\sin(am)\sin(bm)} = \frac{\tau_1}{\rho_1} \frac{\sin(\alpha_1\mu_1) \cdot \sin(\beta_1\mu_1)}{\sin(\alpha_1\beta_1)} \frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1) \cdot \sin(b_1m_1)} \cdot (32)$$

(*) DEMOULIN, *Sur les relations qui existent entre les éléments infinitésimaux de deux surfaces polaires réciproques.* (COMPTES RENDUS, séance du 16 mai 1892.)

22. Soient Σ et Σ_1 deux surfaces correspondantes dans deux espaces réciproques, m et m' deux tangentes conjuguées de Σ, situées dans le plan tangent μ au point M de cette surface. Les droites m_1 et m'_1 homologues de m et m' sont deux tangentes conjuguées de Σ_1, et déterminent le plan tangent μ_1, en un point M_1 de cette surface. Le point M_1 correspond au plan μ, et le plan μ_1 est l'homologue du point M (fig. 7).

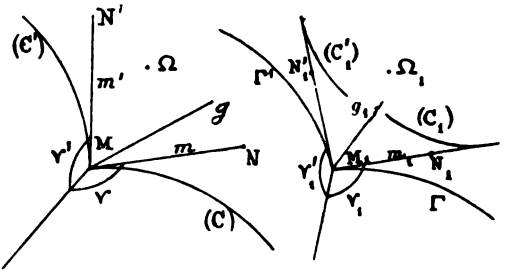


Fig. 7.

A une courbe (C) de Σ, tangente à la droite m, correspond une courbe (C_1), dont les plans osculateurs sont tangents à Σ_1, le long d'une courbe Γ', tangente à la droite m'_1. Car les points de Γ' correspondent aux plans tangents à Σ, le long de (C), et on sait que la droite m' est la limite de l'intersection des plans tangents à Σ, en deux points infiniment voisins M et M' de (C). La droite m'_1, homologue de m', est donc la limite de la droite joignant deux points infiniment voisins M_1 et M'_1 de Γ'.

De même, à une courbe (C') de Σ tangente à m', correspond une courbe (C'_1) dont les plans osculateurs sont tangents à Σ_1, le long d'une courbe Γ tangente à m_1.

Représentons par ds la différentielle de l'arc de la courbe (C) au point M, par ψ l'angle des plans tangents à Σ, aux points M et M' de la courbe (C). Les quantités ds' et ψ' pour (C'), ds_1 et ψ_1 pour Γ, ds'_1 et ψ'_1 pour Γ', auront une signification analogue.

On peut appliquer aux courbes (C) et (C_1), (C') et (C_1') la formule (25); on a ainsi

$$ds\frac{AB}{MA\,.\,MB}=\eta_1\frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\,.\,\sin(\beta_1\mu_1)},$$

$$ds'\frac{A'B'}{MA'.\,MB'}=\eta_1'\frac{\sin(\alpha_1'\beta_1')}{\sin(\alpha_1'\mu_1)\,.\,\sin(\beta_1'\mu_1)}.$$

Mais

$$\eta_1=\psi_1',\quad \eta_1'=\psi_1;$$

donc

$$ds\,.\,ds'.\frac{AB}{MA.MB}.\frac{A'B'}{MA'.MB'}=\psi_1.\psi_1'\frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\sin(\beta_1\mu_1)}.\frac{\sin(\alpha_1'\beta_1')}{\sin(\alpha_1'\mu_1).\sin(\beta_1'\mu_1)}.$$

On a de même

$$\psi\,.\,\psi'.\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\ \sin(\beta\mu)}\frac{\sin(\alpha'\beta')}{\sin(\alpha_1'\mu).\sin(\beta'\mu)}=ds_1ds_1'\frac{A_1B_1}{M_1A_1\,.\,M_1B_1}\frac{A_1'B_1'}{M_1A_1'\,.\,M_1B_1'}.$$

Rappelons que les couples A et B, A_1 et B_1, A' et B', A_1' et B_1' sont respectivement sur m, m_1, m', m_1' et que α_1 et β_1, α et β, α_1' et β_1', α' et β' sont leurs plans correspondants. Mais

$$\frac{ds}{\psi}=\sqrt{\rho\rho_0}.\quad \frac{ds_1}{\psi_1}=\sqrt{\rho_1\rho_{01}},$$

$$\frac{ds'}{\psi'}=\sqrt{\rho'\rho_0'},\quad \frac{ds_1'}{\psi_1'}=\sqrt{\rho_1'\rho_{01}'}.$$

Les notations ρ et ρ_0 sont définies au numéro 10, pour la courbe (C); ρ' et ρ_0', ρ_1 et ρ_{01}, ρ_1' et ρ_{01}' sont les quantités analogues pour les courbes (C'), Γ, Γ'.

Donc

$$\sqrt{\rho\rho_0}\,\sqrt{\rho'\rho_0'}\,\frac{AB}{MA\,.\,MB}\,\frac{A'B'}{MA'\,.\,MB'}\,\frac{\sin(\alpha\mu)\,.\,\sin(\beta\mu)}{\sin(\alpha\beta)}\,\frac{\sin(\alpha'\mu)\,.\,\sin(\beta'\mu)}{\sin(\alpha'\beta')}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\rho_1\rho_{01}}}\,\frac{1}{\sqrt{\rho_1'\rho_{01}'}}\,\frac{M_1A_1\,.\,M_1B_1}{A_1B_1}\,\frac{M_1A_1'\,.\,M_1B_1'}{A_1'B_1'}\,\frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\,.\,\sin(\beta_1\mu_1)}\,\frac{\sin(\alpha_1'\beta_1')}{\sin(\alpha_1'\mu_1)\,.\,\sin(\beta_1'\mu_1)}.$$

On a aussi (11)

$$\sqrt{\rho\rho_0}\,.\,\sqrt{\rho'\rho'_0} = R_1R_2,$$
$$\sqrt{\rho_1\rho_{01}}\,.\,\sqrt{\rho'_1\rho'_{01}} = R_{11}R_{21}.$$

R_1 et R_2, R_{11} et R_{21} sont les rayons de courbure principaux de Σ et Σ_1, aux points M et M_1. Par conséquent

$$\left.\begin{aligned} &\frac{R_1R_2\,.\,R_{11}R_{21}}{} \\ -&\frac{MA\,.\,MB}{AB}\cdot\frac{M_1A_1\,.\,M_1B_1}{A_1B_1}\,\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\,.\,\sin(\beta\mu)}\cdot\frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\,.\,\sin(\beta_1\mu_1)} \\ \times&\frac{MA'\,.\,MB'}{A'B'}\,\frac{M_1A'_1\,.\,M_1B'_1}{A'_1B'_1}\,\frac{\sin(\alpha'\beta')}{\sin(\alpha'\mu)\,.\,\sin(\beta'\mu)}\,\frac{\sin(\alpha'_1\beta'_1)}{\sin(\alpha'_1\mu_1)\,.\,\sin(\beta'_1\mu_1)} \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Telle est la relation qui lie les courbures totales des surfaces réciproques Σ et Σ_1 aux points M et M_1.

38. Remarque. Deux surfaces Σ et Σ' tangentes en M au plan μ, ont deux tangentes conjuguées communes. Par suite, les courbures totales $\frac{1}{R_1R_2}$ et $\frac{1}{R'_1R'_2}$ de ces surfaces au point M, sont liées aux courbures totales $\frac{1}{R_{11}R_{21}}$ et $\frac{1}{R'_{11}R'_{21}}$, des surfaces réciproques Σ_1 et Σ'_1 au point M_1, par l'égalité

$$R_1R_2\,.\,R_{11}R_{21} = R'_1R'_2\,.\,R'_{11}R'_{21}.$$

Il en résulte que le second membre de la formule (33) ne change pas si l'on remplace le premier facteur

$$\frac{MA\,.\,MB}{AB}\cdot\frac{M_1A_1\,.\,M_1B_1}{A_1B_1}\cdot\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\,.\,\sin(\beta\mu)}\cdot\frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\,.\,\sin(\beta_1\mu_1)},$$

relatif à deux droites homologues m et m_1, par le facteur analogue relatif à deux droites homologues quelconques m'' et m''_1, issues de M et M_1 dans les plans μ et μ_1. Car m' et m'' peuvent être considérées comme conjuguées, par rapport à une surface Σ' tangente en M au plan μ. Donc,

Soient dans une figure (E), *un point* M *et un plan* μ *passant*

par M; μ_1 *et* M_1 *les éléments correspondants à* M *et* μ *dans une figure* (E_1) *réciproque à* (E); m *et* m_1 *deux droites homologues des plans* μ *et* μ_1, *passant la première par* M, *la seconde par* M_1; A *et* B *deux points pris arbitrairement sur* m; α_1 *et* β_1 *les plans homologues dans* (E_1); A_1 *et* B_1 *deux points pris arbitrairement sur* m_1; α *et* β *les plans correspondants dans* (E); *la quantité*

$$\frac{MA \cdot MB}{AB} \cdot \frac{M_1A_1 \cdot M_1B_1}{A_1B_1} \cdot \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\ \sin(\beta\mu)} \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1) \cdot \sin(\beta_1\mu_1)}$$

reste constante, si m *tourne autour de* M *dans le plan* μ.

Cette constante est égale à la racine carrée du produit $R_1R_2 \cdot R_{11}R_{21}$, des rayons de courbure principaux de deux surfaces réciproques Σ et Σ_1, tangentes respectivement aux plans μ et μ_1 en M et M_1. Ainsi,

$$= \frac{MA \cdot MB}{AB} \cdot \frac{M_1A_1 \cdot M_1B_1}{A_1B_1} \frac{\sqrt{R_1R_2} \cdot \sqrt{R_{11}R_{21}}}{\sin(\alpha\beta) \cdot \sin(\beta\mu)} \cdot \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1) \cdot \sin(\beta_1\mu_1)} \quad (34)$$

De la propriété précédente résulte aussi que dans la formule (26),

$$\tau\tau_1 = \frac{MA \cdot MB}{AB} \frac{M_1A_1 \cdot M_1B_1}{A_1B_1} \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu) \cdot \sin(\beta\mu)} \cdot \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1) \cdot \sin(\beta_1\mu_1)},$$

on peut supposer que les droites AB et A_1B_1 soient deux droites homologues quelconques, situées respectivement dans les plans μ et μ_1.

34. Supposons que dans la formule (26) ainsi généralisée, les plans α, β, α_1, β_1 soient isotropes; elle devient

$$\tau\tau_1 = \frac{\left(\overline{MO}^2 - P_m\right)\left(\overline{M_1O_1}^2 - P_{m_1}\right)}{\sqrt{P_m \cdot P_{m_1}}} \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Au cercle imaginaire à l'infini correspondent, dans les deux figures, les cônes (Ω) et (Ω_1). O et P_m sont respectivement le

point central et la puissance de l'involution des points conjugués par rapport au cône (Ω), et situés sur une droite quelconque m du plan osculateur μ et passant par M. O_1 et P_{m_1} ont des significations analogues pour le cône (Ω_1) et la droite m_1 homologue de m.

Les calculs sont identiques à ceux du numéro **28**.

Si les figures sont réciproques par rapport à une sphère, la formule (35) donne immédiatement la relation (29).

On a de même, pour deux surfaces réciproques,

$$\sqrt{R_1R_2}\ \sqrt{R_{11}R_{21}} = \frac{\left(\overline{MO}^2 - P_m\right)\left(\overline{M_1O_1}^2 - P_{m_1}\right)}{\sqrt{P_m \cdot P_{m_1}}}.$$

Cette formule se déduit d'ailleurs de (35) et de

$$\tau = \sqrt{-R_1R_2},$$

qui donne le rayon de torsion d'une asymptotique d'une surface.

35. Une courbe gauche (C) dont toutes les tangentes font partie d'un complexe linéaire, se correspond à elle-même dans le système focal qui définit le complexe. Par suite, d'après les formules (26) et (28) généralisées au numéro **33**, on a

$$\tau = \frac{MA \cdot MB}{AB} \cdot \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1) \cdot \sin(\beta_1\mu_1)} \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

$$\tau = \frac{MN}{\operatorname{tg}(\mu_1\omega_1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Donc, *si les tangentes d'une courbe gauche* (C) *sont des rayons d'un complexe linéaire, la torsion en un point* M *de la courbe est donnée par l'une des formules*

$$\tau = \frac{MA \cdot MB}{AB} \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\sin(\beta_1\mu_1)},$$

$$\tau = \frac{MN}{\operatorname{tg}(\mu_1\omega_1)}.$$

μ_1 est le plan osculateur à la courbe au point M ; A *et* B *deux points quelconques de ce plan, alignés sur* M ; α_1 *et* β_1 *les plans polaires de ces points;* N *un point de la droite* AB, *dont le plan polaire est normal à* μ_1 ; ω_1 *le plan diamétral passant par* AB.

26. Une quadrique se correspond à elle-même dans un système polaire, dont elle est la directrice. Par suite, les courbes (C) et (C'), considérées au numéro **23**, sont identiques, et l'égalité

$$ds\frac{AB}{MA\,.\,MB} = \psi_1'\frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\,.\,\sin(\beta_1\mu_1)}$$

donne

$$\sqrt{\rho\rho_0} = \frac{MA\,.\,MB}{AB}\cdot\frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\,.\,\sin(\beta_1\mu_1)}\cdot\quad\ldots\quad(38)$$

On a donc la propriété : *Soient* m *et* m_1 *deux tangentes conjuguées d'une quadrique* Σ, M *et* μ_1 *le point d'intersection et le plan des deux droites* m *et* m_1 ; A *et* B *deux points de* m, α_1 *et* β_1 *leurs plans polaires ; ces plans passent par* m_1 ; *la quantité* $\rho\rho_0$ *relative à une courbe* (C) *tangente à la droite* m *au point* M, *est donnée par la formule*

$$\sqrt{\rho\rho_0} = \frac{MA\,.\,MB}{AB}\frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\sin(\beta_1\mu_1)}\cdot$$

Si le point B est à l'infini, en désignant par ω_1 le plan diamétral passant par m_1, on a

$$\sqrt{\rho\rho_0} = \frac{AM\sin(\alpha_1\omega_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\sin(\mu_1\omega_1)}$$

ou

$$\sqrt{\rho\rho_0} = AM\,[\operatorname{cotg}(\alpha_1\mu_1) + \operatorname{cotg}(\mu_1\omega_1)].$$

Mais

$$\rho_0 = \rho\sin^2\varphi\,;$$

donc

$$\rho_0 = AM\sin\varphi\,[\operatorname{cotg}(\alpha_1\mu_1) + \operatorname{cotg}(\mu_1\omega_1)].\quad\ldots\quad(39)$$

La formule (39) met en évidence la propriété suivante du point central de la génératrice n (normale à Σ en M), de la normalie ayant pour directrice la courbe (C) :

Par un point quelconque A *de la tangente* m, *on mène deux plans parallèles à la tangente conjuguée* m_1, *le premier normal au plan polaire de* A, *le second normal au plan diamétral passant par* m_1; *ces deux plans coupent la normale* n *en deux points* R *et* S, *tels que le segment* SR *est égal à la distance du point* M *au point central relatif à la génératrice* n, *de la normalie ayant pour directrice une courbe* (C) *tangente à* m *au point* M.

En effet, menons par le point M un plan perpendiculaire à la tangente m_1; il coupe α_1 et ω_1 suivant deux droites a_1 et o_1. Soit A_1 la projection de A sur ce plan, la droite A_1R est perpendiculaire à a_1; on a

$$MR = MA_1 \operatorname{tg} MA_1R = MA_1 \operatorname{cotg}(\alpha_1\mu_1) = MA \sin\varphi \operatorname{cotg}(\alpha_1\mu_1).$$

De même

$$SM = MA \sin\varphi \operatorname{cotg}(\mu_1\omega_1);$$

donc

$$SR = MA \sin\varphi\,[\operatorname{cotg}(\alpha_1\mu_1) + \operatorname{cotg}(\mu_1\omega_1)] = \rho_0.$$

37. Dans le cas d'une quadrique Σ directrice d'un système polaire, la formule (34) donne

$$R_1R_2 = \frac{MA \cdot MB}{AB} \cdot \frac{MA_1 \cdot MB_1}{A_1B_1} \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu_1)\cdot\sin(\beta\mu_1)} \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\cdot\sin(\beta_1\mu_1)}. \quad (40)$$

Donc, *soient* m *et* m_1 *deux tangentes conjuguées d'une quadrique* Σ; M *et* μ_1 *le point d'intersection et le plan de ces deux droites*; A *et* B *deux points de* m; A_1 *et* B_1 *deux points de* m_1; α_1, β_1, α, β *les plans polaires de ces points; la courbure totale de la quadrique au point* M *est donnée par la formule*

$$R_1R_2 = \frac{MA \cdot MB}{AB} \cdot \frac{MA_1 \cdot MB_1}{A_1B_1} \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu_1)\sin(\beta\mu_1)} \cdot \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\cdot\sin(\beta_1\mu_1)}.$$

Si les tangentes m et m_1 coïncident avec une génératrice g de la surface, la formule (40) devient

$$\sqrt{R_1R_2} = \frac{MA \cdot MB}{AB} \cdot \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\sin(\beta_1\mu_1)} \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

A et B sont deux points quelconques de la génératrice, α_1 et β_1 leurs plans polaires.

Si l'on suppose les points B et B_1 à l'infini ; les plans polaires de A et A_1 normaux à μ_1 ; en désignant ces derniers points par N et N_1 pour éviter toute confusion, et les plans β et β_1 par ω et ω_1, la formule (40) devient

$$R_1R_2 = \frac{MN \cdot MN_1}{\operatorname{tg}(\mu_1\omega) \cdot \operatorname{tg}(\mu_1\omega_1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Par suite, *soient* m *et* m_1 *deux tangentes conjuguées d'une quadrique,* M *et* μ_1 *le point d'intersection et le plan de ces deux droites,* ω *et* ω_1 *les plans diamétraux passant par* m *et* m_1 ; N *et* N_1 *les pôles des plans menés normalement à* Σ *par* m *et* m_1 ; *la courbure totale de la quadrique au point* M *est donnée par la formule*

$$R_1R_2 = \frac{MN \cdot MN_1}{\operatorname{tg}(\mu_1\omega) \cdot \operatorname{tg}(\mu_1\omega_1)} .$$

Si m et m_1 coïncident avec une génératrice g,

$$\sqrt{R_1R_2} = \frac{MN}{\operatorname{tg}(\mu_1\omega_1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

38. Si les tangentes conjuguées m et m_1 sont rectangulaires, la formule (38) donne

$$R_1 = \frac{MA \cdot MB}{AB} \cdot \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1)\sin(\beta_1\mu_1)} \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

car

$$\rho\rho_0 = \rho^2 \sin^2\varphi .$$

Si l'on prend pour A et B les points N et ∞, la formule (44) devient

$$R_1 = \frac{MN}{\operatorname{tg}(\mu_1\omega_1)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Donc, *le rayon de courbure* R_1 *d'une section principale au point* M *d'une quadrique est donné par l'une des formules*

$$R_1 = \frac{MA \cdot MB}{AB} \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1) \cdot \sin(\beta_1\mu_1)},$$

$$R_1 = \frac{MN}{\operatorname{tg}(\mu_1\omega_1)};$$

μ_1 *est le plan tangent à la quadrique en* M; α_1 *et* β_1 *sont les plans polaires de deux points* A *et* B *de la tangente en* M *à la section principale;* N *est le pôle du plan* ν_1 *de la seconde section principale;* ω_1 *est le plan diamétral passant par la tangente* $\mu_1\nu_1$ *à la surface.*

30. Une conique Σ se correspond à elle-même dans un système plan polaire, dont elle est la directrice. Par suite, d'après la formule (24), la courbure en un point M de cette conique sera donnée par la formule

$$\rho = \frac{MA \cdot MB}{AB} \cdot \frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1) \cdot \sin(b_1m_1)} \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

A et B sont deux points de la tangente m_1 à la conique au point M, a_1 et b_1 leurs droites polaires.

La formule (46) peut s'écrire :

$$\rho = \frac{BM}{AB}[AM \operatorname{cotg}(b_1m_1) - - AM \operatorname{cotg}(a_1m_1)]$$

Désignons par A_1 et B_1 les points d'intersection de la normale au point M, avec les perpendiculaires abaissées du point A sur les droites a_1 et b_1; l'égalité précédente devient

$$\rho = \frac{BM \cdot A_1B_1}{AB}.$$

Donc, *si* A *et* B *sont deux points quelconques de la tangente au point* M *d'une conique* Σ, A_1 *et* B_1 *les points d'intersection de la normale en* M *avec les perpendiculaires abaissées du point* A *sur les polaires de* A *et* B, *le rayon de courbure de* Σ *en* M *est donné par la formule*

$$\rho = \frac{A_1B_1 \cdot BM}{AB}.$$

Si le point B est à l'infini, sa polaire est le diamètre passant par le point M, et on retrouve un théorème dû à Ribaucour :

$$\rho = A_1B_1 \ (^*).$$

40. Soient g une génératrice d'une surface gauche Σ, M, M', A, B quatre points de la génératrice g; μ, μ', α, β les plans tangents en ces points;

$$(MAM'B) = (\mu\alpha\mu'\beta).$$

Si les points M et M' sont infiniment voisins,

$$\lim \frac{MM'}{\sin(\mu\mu')} = \frac{MA \cdot MB}{AB} \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu) \cdot \sin(\beta\mu)}.$$

En désignant par n la normale à Σ au point M, $\lim \frac{MM'}{\sin(\mu\mu')}$ est le paramètre de distribution p, relatif à la génératrice n du paraboloïde des normales à Σ le long de g. Les plans des sections principales de Σ au point M sont tangents à ce paraboloïde, aux centres de courbure principaux de Σ au point M; donc, en représentant par R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux de Σ en M,

$$R_1R_2 = -p^2;$$

par suite,

$$R_1R_2 = -\frac{\overline{MA}^2 \ \overline{MB}^2}{\overline{AB}^2} \frac{\sin^2(\alpha\beta)}{\sin^2(\alpha\mu) \cdot \sin^2(\beta\mu)} \quad . \quad . \quad (47)$$

(*) Ribaucour, *Nouvelles Annales de mathématiques*, (2), t. XII, p. 172. — Servais, *Sur la courbure des sections coniques*. (Nouvelles Annales de mathématiques, (3 t. XI, p. 426.)

Ainsi, *si* M, A, B *sont trois points d'une même génératrice d'une surface gauche* Σ ; μ, α, β, *les plans tangents en ces points, la courbure totale au point* M *est donnée par la formule*

$$R_1R_2 = -\frac{\overline{MA}^2 \cdot \overline{MB}^2}{\overline{AB}^2} \frac{\sin^2(\alpha\beta)}{\sin^2(\alpha\mu) \cdot \sin^2(\beta\mu)}$$

Si R'_1 et R'_2 sont les rayons de courbure principaux au point A, on a

$$R'_1R'_2 = -\frac{\overline{AM}^4 \cdot \overline{AB}^2}{\overline{MB}^2} \frac{\sin^2(\beta\mu)}{\sin^2(\mu\alpha) \cdot \sin^2(\beta\alpha)} ;$$

donc

$$R_1R_2 \cdot R'_1R'_2 \sin^4(\alpha\mu) = \overline{MA}^4.$$

Soient M *et* A *deux points pris arbitrairement sur une génératrice* g *d'une surface gauche* Σ ; μ *et* α *les plans tangents en ces points;* R_1 *et* R_2 *les rayons de courbure principaux de* Σ *en* M ; R'_1 *et* R'_2 *les rayons de courbure principaux de* Σ *en* A. *Entre ces différentes quantités existe la relation*

$$R_1R_2 \cdot R'_1R'_2 \sin^4(\alpha\mu) = \overline{MA}^4 \quad (*).$$

A l'aide de la formule (47), on établit de même la propriété :

Soient k_a, k_b, k_c *les courbures totales en un trois points* A, B, C *d'une même génératrice d'une surface réglée* Σ ; α, β, γ *les plans tangents en ces points; on a*

$$K_a \cdot K_b \; K_c = -\frac{\sin^2(\alpha\beta) \; \sin^2(\beta\gamma) \cdot \sin^2(\gamma\alpha)}{\overline{AB}^2 \cdot \overline{BC}^2 \cdot \overline{CA}^2} .$$

11. Si A est le point central de la génératrice g, B son point de l'infini, la formule (47) devient

$$R_1R_2 = -\frac{\overline{AM}^2}{\sin^2(\alpha\mu)\cos^2(\alpha\mu)} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

(*) Demoulin, *Note sur deux classes particulières de congruences rectilignes.* (Bulletin des sciences mathématiques, t. XVIII, octobre 1894.)

ou $$R_1R_2 = -\overline{AM}^2[\operatorname{cotg}(\alpha\mu) + \operatorname{tg}(\alpha\mu)]^2.$$

Si k est le paramètre de distribution relatif à g, on a

$$k = \frac{AM}{\operatorname{tg}(\alpha\mu)};$$

donc

$$R_1R_2 = -\left(k + \frac{\overline{AM}^2}{k}\right)^2 (^*). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

42. Théorème. *Soient* g *et* g_1 *deux droites conjuguées d'un complexe linéaire, dont l'axe est* a *et le paramètre* k; M_1 *et* N_1 *deux points de* g_1 *dont les plans polaires* μ *et* ν *sont rectangulaires;* ω *le plan diamétral passant par* g; r_1 *la distance du point* M_1 *à l'axe* a; *on a*

$$k + \frac{r_1^2}{k} = \frac{M_1N_1}{\operatorname{tg}(\mu\omega)} \cdot \frac{\sin(g_1a)}{\sin(ga)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

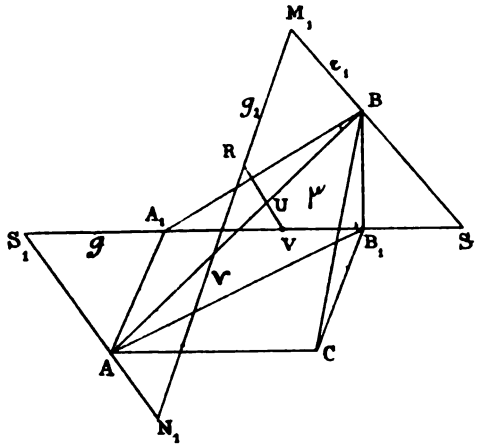


Fig. 8.

(*) Lamarle, *Théorie géométrique des centres et des axes instantanés de rotation.*

En effet, désignons par A et B les traces de l'axe a sur les plans μ et ν (fig. 8); par A_1 et B_1 les projections de A et de B sur la droite g; par C le quatrième sommet du rectangle construit sur AA_1 et BB_1 comme côtés. Le plan ABC est parallèle à ω, et l'angle CBB_1 est égal à $(\mu\omega)$.

L'angle ABA_1 est l'angle σ que l'axe AB fait avec le plan μ; on a

$$k = BM_1 \operatorname{tg}\sigma = BM_1 \cdot \frac{AA_1}{BA_1} = BM_1 \cdot \frac{B_1C}{BA_1},$$

$$\frac{BA_1}{BS} = \frac{BB_1}{B_1S}.$$

S désigne le point de rencontre des droites BM_1 et g. Donc

$$k = BM_1 \cdot \frac{B_1C}{BS} \cdot \frac{B_1S}{BB_1} = \frac{BM_1}{BS} B_1S \operatorname{tg}(\mu\omega).$$

On a aussi

$$\frac{r_1^2}{k} = \frac{BM_1}{\operatorname{tg}\sigma} = BM_1 \cdot \frac{A_1B}{AA_1} = BM_1 \frac{A_1B}{B_1C},$$

$$A_1B \cdot BS = A_1S \cdot BB_1;$$

donc

$$\frac{r_1^2}{k} = BM_1 \cdot \frac{A_1S \cdot BB_1}{BS \cdot B_1C} = \frac{BM}{BS} \cdot \frac{A_1S}{\operatorname{tg}(\mu\omega)}.$$

Par suite,

$$k + \frac{r_1^2}{k} = \frac{BM}{BS} \frac{B_1S \cdot \operatorname{tg}^2(\mu\omega) + A_1S}{\operatorname{tg}(\mu\omega)}.$$

Mais

$$\overline{BB_1}^2 = B_1S \cdot A_1B_1, \quad \overline{B_1C}^2 = \overline{AA_1}^2 = A_1S \cdot A_1B_1,$$

S_1 désigne le point d'intersection des droites AN_1 et g,

$$\frac{\overline{BB_1}^2}{\overline{B_1C}^2} = \frac{B_1S}{A_1S_1} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\mu\omega)};$$

par conséquent,

$$k + \frac{r_1^2}{k} = \frac{BM_1}{BS} \cdot \frac{SS_1}{\operatorname{tg}(\mu\omega)}$$

D'autre part, si l'on désigne par R, U, V les points d'appui sur g_1, a, g de la plus courte distance des droites conjuguées g et g_1,

$$\frac{BM}{BS} = \frac{RU}{UV} = \frac{\operatorname{tg}(g_1 a)}{\operatorname{tg}(ga)},$$

$$SS_1 = \frac{AB}{\cos(ga)}, \quad M_1N_1 = \frac{AB}{\cos(g_1 a)}.$$

Donc

$$k + \frac{r_1^2}{k} = \frac{M_1N_1}{\operatorname{tg}(\mu\omega)} \cdot \frac{\sin(g_1 a)}{\sin(ga)}.$$

43. Si s_1 désigne la distance du point N_1 à l'axe a, on a de même

$$k + \frac{s_1^2}{k} = \frac{M_1N_1}{\operatorname{tg}(\nu\omega)} \cdot \frac{\sin(g_1 a)}{\sin(ga)}.$$

Par suite,

$$\left(k + \frac{r_1^2}{k}\right)\left(k + \frac{s_1^2}{k}\right) = \overline{M_1N_1}^2 \frac{\sin^2(g_1 a)}{\sin^2(ga)},$$

$$\left(k + \frac{r_1^2}{k}\right) : \left(k + \frac{s_1^2}{k}\right) = \frac{\operatorname{tg}(\nu\omega)}{\operatorname{tg}(\mu\omega)}.$$

Mais les droites g, g_1, a sont des génératrices d'un paraboloïde équilatère (fig. 8); les plans μ, ν sont tangents à cette surface respectivement en S et S_1; V est le point central sur la génératrice g; donc

$$\frac{\operatorname{tg}(\nu\omega)}{\operatorname{tg}(\mu\omega)} = \frac{SV}{S_1V} = \frac{RM_1}{RN_1}.$$

Par suite, *soient* g *et* g_1 *deux droites conjuguées dans un système focal dont l'axe est* a; M_1 *et* N_1, *deux points de la droite* g_1, *tels que les plans polaires soient rectangulaires;* r_1 *et* s_1 *les distances de ces points à l'axe;* k *le paramètre du complexe linéaire;*

R *le point de* g_i *situé sur la plus courte distance des droites* a *et* g_i ; *on a*

$$\left(k + \frac{r_i^2}{k}\right)\left(k + \frac{s_i^2}{k}\right) = \overline{M_iN_i}^2 \frac{\sin^2(g_i a)}{\sin^2(ga)}, \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

$$\left(k + \frac{r_i^2}{k}\right) : \left(k + \frac{s_i^2}{k}\right) = \frac{RM_i}{RN_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

44. Si les droites y et g_i coïncident, c'est-à-dire si g_i est un rayon du complexe, la formule (50) devient

$$k + \frac{r_i^2}{k} = \frac{M_iN_i}{\operatorname{tg}(\mu\omega)}.$$

Cette égalité, combinée avec la relation (37), donne

$$\tau = k + \frac{r_i^2}{k}.$$

Donc, *si les tangentes d'une courbe gauche* (C) *sont des rayons d'un complexe linéaire, la torsion en un point* M_i *de la courbe est donnée par la formule*

$$\tau = k + \frac{r_i^2}{k},$$

k *est le paramètre du complexe,* r_i *la distance du point* M_i *à l'axe* (*).

45. On généralise aisément la formule (50). Soient, sur la droite $M_i N_i$, les points A_i et B_i dont les plans polaires sont α_i et β_i. On a, d'après les formules (25) et (27),

$$\frac{M_iN_i}{\operatorname{tg}(\mu\omega)} = \frac{M_iA_i \cdot M_iB_i}{A_iB_i} \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu)\sin(\beta\mu)}.$$

Donc, *si* g *et* g_i *sont deux droites conjuguées d'un complexe*

(*) APPELL, *Sur les propriétés des cubiques gauches et le mouvement hélicoïdal d'un corps solide* (ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE, 1876.) — DEMOULIN, *Comptes rendus*, séance du 17 mai 1897.

linéaire; M_1, A_1, B_1 *trois points de* g_1; μ, α, β, *leurs plans polaires;* r_1 *la distance du point* M *à l'axe* a *du complexe, on a*

$$k + \frac{r_1^2}{k} = \frac{M_1A_1 \cdot M_1B_1}{A_1B_1} \frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\alpha\mu) \cdot \sin(\beta\mu)} \cdot \frac{\sin(g_1a)}{\sin(ga)} \quad . \quad (53)$$

COROLLAIRE. Soient A_1, B_1, C_1 trois points de la droite g_1; α, β, γ leurs plans polaires; r_a, r_b, r_c les distances de ces points à l'axe du complexe; on a

$$\left(k + \frac{r_a^2}{k}\right)\left(k + \frac{r_b^2}{k}\right)\left(k + \frac{r_c^2}{k}\right) = \frac{A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1}{\sin(\alpha\beta)\sin(\beta\gamma) \cdot \sin(\gamma\alpha)} \cdot \frac{\sin^3(g_1a)}{\sin^3(ga)} \cdot (54)$$

46. Nous avons établi la formule

$$\tau \frac{AB}{MA \cdot MB} \frac{\sin(\alpha\mu) \cdot \sin(\beta\mu)}{\sin(\alpha\beta)} = \frac{1}{\tau_1} \frac{M_1A_1 \cdot M_1B_1}{A_1B_1} \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\alpha_1\mu_1) \cdot \sin(\beta_1\mu_1)}, \quad (26)$$

qui lie les rayons de torsion τ et τ_1 de deux courbes gauches réciproques (C) et (C_1) en deux points M et M_1. Dans le cas particulier du système focal, les tangentes m et m_1 des courbes (C) et (C_1) sont analogues à g et g_1, et on peut appliquer la formule (53) à chacun des groupes de points M_1, A_1, B_1 et M, A, B. Il en résulte immédiatement, en désignant par r et r_1 les distances des points M et M_1 à l'axe du système focal,

$$\tau\tau_1 = \left(k + \frac{r^2}{k}\right)\left(k + \frac{r_1^2}{k}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Cette relation entre les torsions de deux courbes correspondantes dans un système focal est due à M. Demoulin.

47. Soit Δ une ligne de courbure d'une quadrique Σ; Δ est l'intersection de Σ et d'une quadrique homofocale Σ_1. Les tangentes à la courbe Δ ont pour conjuguées relativement à Σ, les normales à la surface Σ_1 le long de Δ (fig. 9). Ces normales

sont les génératrices d'une surface développable, dont l'arête de rebroussement Δ_1 est la courbe polaire réciproque de Δ par

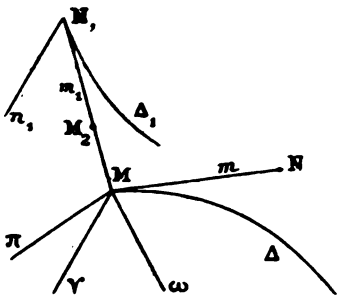


Fig. 9.

rapport à Σ. Cette courbe Δ_1 est aussi le lieu des centres de courbure des sections principales de Σ_1, tangentes à Δ. Appelons :

m et μ la tangente et le plan osculateur en un point M de la courbe Δ ; m_1 la tangente conjuguée de m ;

μ_1 le plan tangent à la quadrique Σ au point M ;

ν le plan normal à Σ mené par m ;

ω le plan diamétral passant par m.

Le pôle du plan μ par rapport à Σ est le centre de courbure M_1 de la section principale, faite dans la surface Σ_1 par le plan μ_1. Le pôle M_2 du plan ν est le second centre principal de courbure de la quadrique Σ_1 au point M (*). Cela étant, on a

$$(\mu_1\nu\mu\omega) = (MM_2M_1\infty),$$

ou

$$\frac{\operatorname{tg}(\mu_1\mu)}{\operatorname{tg}(\mu_1\omega)} - \frac{MM_1}{M_2M_1} = \frac{\dfrac{MM_1}{MM_2}}{1 - \dfrac{MM_1}{MM_2}}.$$

(*) Salmon, *Géométrie analytique*, § 197. — Servais, *Sur la courbure des surfaces du second ordre*. (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 3e série, t. XXIV, p. 479.)

Mais nous avons démontré que si R_1 et R_2 sont les rayons de courbure, au point M des sections principales de Σ, tangentes respectivement à m et m_1, on a

$$\frac{R_1}{R_2} + \frac{MM_1}{MM_2} = 1 \ (*);$$

donc

$$\operatorname{tg}(\mu_1\mu) = \frac{R_1 - R_2}{R_1} \operatorname{tg}(\mu_1\omega) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Cette formule fait connaître l'inclinaison du plan osculateur μ de la ligne de courbure Δ sur le plan tangent μ_1 de la surface Σ.

Si ρ désigne le rayon de courbure de la courbe Δ au point M, la formule précédente et le théorème de Meusnier donnent

$$\rho = \frac{R_1(R_1 - R_2)\operatorname{tg}(\mu_1\omega)}{\sqrt{(R_1 - R_2)^2 \operatorname{tg}^2(\mu_1\omega) + R_1^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

48. La formule

$$\operatorname{tg}(\mu_1\mu) = \frac{R_1 - R_2}{R_1} \operatorname{tg}(\mu_1\omega)$$

établit la propriété :

Si des quadriques ont en un point M *même indicatrice, et si les lignes de courbure au point* M, *tangentes à un même axe de l'indicatrice, ont en ce point même plan osculateur, les centres de ces surfaces sont dans un même plan, passant par l'axe considéré.*

49. La formule

$$d\alpha \frac{\sin(ab)}{\sin(am)\sin(bm)} = d\alpha_1 \frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1)\sin(b_1m_1)} \quad . \quad (31)$$

appliquée aux deux courbes Δ et Δ_1, donne, en tenant compte de l'égalité

$$ds = MM_1 d\alpha_1,$$

(*) SERVAIS, *Quelques propriétés des surfaces du second degré.* (IDEM, t. XXV, p. 782.)

la relation suivante :

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\sin(ab)}{\sin(am)\sin(bm)} = \frac{1}{MM_1}\,\frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1)\sin(b_1m_1)}. \quad (58)$$

Par conséquent, *dans le plan osculateur en un point* M *à une ligne de courbure* Δ *d'une quadrique, on trace par le point* M *deux droites quelconques* a *et* b. *Les conjuguées* a_1 *et* b_1 *de ces droites par rapport à la quadrique, se coupent au pôle* M_1 *du plan osculateur considéré. Le rayon de courbure de la courbe* Δ *au point* M *est donné par la formule*

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\sin(ab)}{\sin(am)\sin(bm)} = \frac{1}{MM_1}\,\frac{\sin(a_1b_1)}{\sin(a_1m_1)\sin(b_1m_1)}.$$

Bruxelles. — Hayez, imprimeur

Supplément de MATHESIS, tome VIII, mai 1898.

Vient de paraître:

Mélanges mathématiques (1883-1898), par P. Mansion, professeur à l'Université de Gand, etc. In-8° de 216 pages. Prix. . . . . 5 francs.

TABLE DES MATIÈRES.

(*B* = DEUXIÈME PARTIE).

	Pages.
Histoire. Sur une table du papyrus Rhind	1-3, B, 55
Sur l'enseignement élémentaire de l'algèbre en 1676, d'après l'Euclide de Henrion	113-116
Copernic.	74-79
Sur les raisons données par Copernic en faveur du mouvement de la Terre	101-104
Sur une opinion de Galilée relative à l'origine commune des planètes	104-110
Sur une opinion de Galilée relative à la chute des corps	110-112
Esquisses biographiques. Kummer (1810-1893), Weierstrass (1815-1897), Kronecker (1823-1891)	B, 34-37
Catalan (1814-1894) et Gilbert (1832-1892).	B, 37-38
Sylvester (1814-1897) et Cayley (1821-1895)	B, 39-42
H. S. Smith (1826-1883)	149-157
A. Ribaucour (1845-1893)	B, 14-17
Analyse algébrique. Méthode des coefficients égaux de Clasen pour la résolution des équations linéaires	6-15
Sur l'extension du théorème de Rolle aux racines imaginaires des équations algébriques	24-27
Sur la théorie des racines égales	81-83
Sur l'éliminant de deux équations algébriques	97-99
Sur la définition des invariants et covariants.	3-5
Analyse infinitésimale. Formule d'Ozanam	B, 1-6, 56
Sur l'emploi du signe Σ dans la théorie des fonctions	30-32
Limite ou génératrice (Voir note, B, 56)	B, 11-14
Sur la formule de Leibniz.	B, 9-11
Sur une formule de M. Darboux	30-3
Sur la formule de quadrature de Gauss	87-88
Sur le calcul approché d'une intégrale définie, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.	15-16
Démonstration élémentaire de la relation qui lie les deux Eulériennes	117-120
Sur la fonction gamma	81-86
Sur deux formules relatives aux Eulériennes.	99-101
Deux remarques sur les fonctions elliptiques.	27-29
Sur les intégrales elliptiques de troisième espèce	147-148

Pages.

Mécanique. Sur les principes de la mécanique rationnelle 69-74
Sur l'inutilité de la considération de l'espace dit réel en mécanique . . 120-122
Sur les principes de la mécanique rationnelle et de la mécanique physique 145-147
Sur la mesure du temps 112

Calcul des probabilités. Sur le sens du mot hasard en calcul des probabilités 93-96
Sur le théorème de Jacques Bernoulli 79-81, 159-160
Sur la loi des grands nombres en calcul des probabilités 93-95
Sur la méthode des moindres carrés 96
Problème de calcul des probabilités 112

Géométrie euclidienne et non euclidienne. (Histoire). Sur les postulats et les axiomes d'Euclide 37-47
Analyse des recherches de Saccheri sur le postulatum d'Euclide. . . 47-61
Sur la géométrie non euclidienne (Ampère, Fourier, De Tilly) . . . 33-34
Sur l'histoire de la géométrie non euclidienne . . . . . 65-66, B, 53
Sur les recherches de Schering et de Gauss en métagéométrie . . 67-69, B, 55

(Principes). Sur la portée philosophique de la métagéométrie . . . 89-92
Sur la métagéométrie et ses trois subdivisions 126-128
Sur les premiers principes de la métagéométrie et de la géométrie riemannienne . . . . . B, 17-20
Principes fondamentaux de la géométrie non euclidienne de Riemann . 122-125
Méthode élémentaire d'exposition des principes de la géométrie non euclidienne . . . . . 142-143, B, 21-34
Relation entre les distances de cinq points en géométrie non euclidienne (Théorème des six points). 61-64
Relations entre les distances de cinq ou six points en géométrie euclidienne et en géométrie non euclidienne. 129-136
Nouvelle forme de la relation entre les distances de cinq points en géométrie non euclidienne. 136-137
Sur l'expression analytique du volume d'un corps en géométrie non euclidienne 144-145
Le plan riemannien est-il identique à la sphère euclidienne? . . . 137-142
Pour la géométrie non euclidienne . . . . . B, 43-54
Le plus court chemin sur la sphère . . . . . B, 7-8

MATHESIS

MATHESIS

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Liége, Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis!
PH. BRETON.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME IX. — ANNÉE 1899.

(TOME XIX DE LA COLLECTION.)

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
47, RUE DES CHAMPS, 47

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, QUAI DES GRANDS AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1899

ABRÉVIATIONS.

BB., Bulletin de l'Académie royale de Belgique.

CR., Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

NAM., Nouvelles Annales de Mathématiques (depuis 1842).

CGQ., Correspondance physique et mathématique, fondée en 1825 par GARNIER et QUETELET, continuée par QUETELET.

NCM., Nouvelle Correspondance Mathématique (1874-1880).

JME, (ou JMS.), Journal de Mathématiques élémentaires (ou Journal de Mathématiques spéciales), fondé en 1877 par BOURGET, continué d'abord par G. DE LONGCHAMPS, ensuite par G. MARIAUD.

IM., Intermédiaire des Mathématiciens, fondé en 1894 par MM. LAISANT et LEMOINE.

AF., Association française pour l'avancement des sciences.

Crelle, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par CRELLE en 1826, continué successivement par BORCHARDT, KRONECKER et WEIERSTRASS, par KRONECKER et par FUCHS (en allemand surtout).

Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par LIOUVILLE en 1836, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(2), III, 327-333 signifie : Deuxième série, tome troisième, pages 327 à 333.

MATHESIS

DÉMONSTRATION GÉNÉRALE DU SECOND THÉORÈME DE LEGENDRE,

par M. De Tilly (*).

I. Préliminaires. En géométrie générale, la ligne droite est une ligne telle que l'on peut en faire passer une, et une seule, par deux points quelconques, suffisamment rapprochés. Le plan est une surface dans laquelle, prenant deux points à volonté, suffisamment rapprochés, et joignant ces deux points par une droite, cette ligne est tout entière dans la surface.

Soit α l'intervalle au-dessous duquel se réalise toujours la propriété fondamentale de la droite ; soit β l'intervalle au-dessous duquel se réalise toujours la propriété fondamentale du plan. Dans tout le § II, nous ne considérons que des figures dont la plus grande dimension est moindre que la plus petite des deux quantités α et β. C'est ce que nous appelons la région de superposition, parce que toutes les superpositions de figures rectilignes, telles que celles qui sont faites dans les propositions du livre I d'Euclide ou de Legendre, avant la théorie des parallèles, supposent toujours que par deux points on ne puisse faire passer qu'une ligne droite. Les propositions dont il s'agit sont donc établies dans ces limites.

II. Le théorème de Legendre, dans la région de superposition. *Si, dans cette région, il existe un triangle dont la somme des angles vaut deux angles droits, il en sera de même de tous les triangles de la région.*

1. Soit ABC le triangle donné dans lequel $A + B + C = 2$ droits ; du sommet du plus grand angle, abaissons la perpendiculaire AD sur le côté opposé. Si, dans les triangles ADC, ADB, la somme des angles vaut aussi 2 angles droits, nous aurons réussi à construire un triangle rectangle jouissant de la propriété indiquée. Si cela n'arrive pas, la somme des angles doit être supérieure à deux droits dans l'un des triangles, et inférieure dans l'autre, puisque celle des angles de ABC est deux droits. Portons, sur le plus grand segment DC, $DB' = DB$, et joignons AB'. En

(*) Legendre connaissait ce théorème dès 1808 ; sa démonstration et celle de Lobatchefsky, publiées beaucoup plus tard, supposent essentiellement que la somme des trois angles d'un triangle ne surpasse pas deux droits, ou que deux droites ne peuvent enclore un espace. (P. M.)

faisant mouvoir le point B′ vers B′C, la différence entre deux droits et la somme des angles du triangle variable ADB′ devra changer de signe; donc, en vertu de la continuité, il existera un triangle ADE, intermédiaire entre ADB′ et ADC, ayant pour somme de ses angles, deux angles droits. Au point E, menons sur ED la perpendiculaire EF = DA et joignons AF. Les triangles ADE, EFA, sont superposables; donc le quadrilatère ADEF a les quatre angles droits. En posant DE = γ, DA = δ, nous avons donc ce théorème :

Le quadrilatère qui a un côté égal à γ, les deux angles adjacents droits, et les deux côtés adjacents égaux à δ, a les quatre angles droits et les côtés opposés égaux. On peut d'ailleurs changer γ en δ et réciproquement(*).

2. Divisons DE en deux parties égales et, au milieu, menons une perpendiculaire; le quadrilatère sera divisé en deux parties superposables; donc on peut, dans l'énoncé ci-dessus, changer γ en $\frac{1}{2}\gamma$, ou, plus généralement en $\frac{1}{2^p}\gamma$; on peut ensuite accoler autant de quadrilatères $\left(\frac{\gamma}{2^p}, \delta\right)$ que l'on voudra, sauf à ne pas sortir de la région de superposition. Donc, dans l'énoncé, on peut changer γ en $\frac{k\gamma}{2^p}$. De même on peut changer δ en $\frac{k'\delta}{2^q}$. On suppose p, q, k, k' entiers.

3. Soit maintenant un quadrilatère quelconque, ayant deux angles droits adjacents et les côtés opposés, adjacents à ces angles droits, égaux. On peut déterminer les entiers p, k, q, k', de manière que la base et la hauteur du quadrilatère $\left(\frac{k\gamma}{2^p}, \frac{k'\delta}{2^q}\right)$ diffèrent aussi peu que l'on voudra de la base et de la hauteur du quadrilatère donné. Donc, par la loi de continuité, le quadrilatère donné a les quatre angles droits.

4. Un triangle rectangle servira, comme précédemment (n° 1)(**), à

(*) *Autrement.* Si l'on construit ABM égal à ABD et situé de l'autre côté de AB, AM étant égal à BD, MB à AD, puis le triangle ACN égal à ACD et situé de l'autre côté de AC, on trouve aisément que la figure BCNAM est un quadrilatère ayant ses quatre angles droits et ses côtés opposés égaux (P. M.)

(**) Au contraire, la construction indiquée en note au n° 1 ne peut être utilisée ici (P. M.).

former un quadrilatère qui aura deux angles droits et les deux côtés opposés adjacents égaux ; d'où l'on déduira que la somme de ses angles vaut deux angles droits, et enfin un triangle quelconque se décomposera en deux triangles rectangles.

5. Ainsi donc, dans la région de superposition, s'il existe un triangle ayant pour somme d'angles deux angles droits, tous les triangles jouissent de la même propriété.

6. Par suite, dans la région de superposition, il ne peut exister deux triangles ayant l'un une somme d'angles supérieure à deux droits, l'autre une somme d'angles inférieure à cette même valeur, comme nous l'avons montré dans une note antérieure (*Mathesis*, 1898, (2) VIII, pp. 217-218).

III. Le théorème de Legendre, dans une région quelconque. *S'il existe, même en dehors de la région de superposition, un triangle* ABC *ayant pour somme d'angles deux angles droits, cette somme sera la même dans tous les triangles.*

1. Divisons la base BC en m parties égales, et les côtés AB, AC, chacun en n parties égales. Menons des lignes quelconques du point A aux points de division de la base, puis des lignes quelconques par les points de division des côtés AB, AC, portant les mêmes numéros sur ces côtés.

Nous diviserons ainsi le triangle primitif en m triangles (curvilignes ou non) et $(n - 1)\,m$ quadrilatères (curvilignes ou non), ou en $m\,(2n - 1)$ triangles, si l'on partage chaque quadrilatère en deux triangles par une diagonale quelconque.

Augmentons le nombre des points de division jusqu'à ce que tous nos triangles (y compris les constructions nécessaires à faire sur eux) soient compris dans la région de superposition. A ce moment, remplaçons tous les tronçons de lignes courbes formant les côtés des triangles par des tronçons de droites, lesquels seront déterminés.

La somme des angles de tous les triangles comprend :

1° Les angles $A + B + C = 2$ droits (par hypothèse) ;

2° $m - 1$ fois 2 droits sur la base ou $(2m - 2)$ droits ;

3° $2\,(n - 1)$ fois 2 droits sur AB et AC, ou $(4n - 4)$ droits ;

4° $(m - 1)\,(n - 1)$ fois 4 droits aux points intérieurs, c'est-à-dire, $4\,(m - 1)\,(n - 1)$.

La somme totale est donc $2m\,(2n - 1)$ droits, c'est-à-dire autant de fois 2 droits qu'il y a de triangles. Si donc la somme n'était pas égale à 2 droits dans chacun de ces triangles, il y en aurait dans lesquels cette somme serait supérieure, et d'autres dans lesquels elle serait inférieure, ce qui a été démontré impossible (II, n° 6), puisqu'il s'agit de triangles contenus dans la région de superposition.

Donc enfin chacun des petits triangles a pour somme d'angles deux angles droits; et dès lors, en vertu de ce qui précède, tout triangle de la région de superposition a pour somme d'angles deux angles droits.

9. Prenons maintenant un triangle ABC dans lequel on ne connaît pas d'avance la somme des angles, et exécutons sur lui la même construction. La somme des angles de tous les petits triangles sera $2m\,(2n - 1)$ droits et en retranchant les angles formés sur les côtés du grand triangle et aux points intérieurs, on trouvera deux droits pour la somme des angles $A + B + C$.

C'est le théorème de Legendre, mais l'illustre auteur ne l'avait établi qu'en admettant l'existence d'une seule droite entre deux points quelconques.

8. Remarque. Il ne résulte pas du théorème de Legendre que, dans la géométrie euclidienne (ou dans celle de Lobatchefsky), deux droites ne puissent se couper qu'en un point (*).

Pour concevoir la raison de cette remarque, il faut remplacer le plan par un cylindre droit de très grand diamètre, où l'on considérerait la géométrie des triangles formés d'arcs d'hélices et cela, en géométrie euclidienne.

Dans tout espace limité, compris sur cette surface, la géométrie est la même que la géométrie euclidienne, puisque l'on peut y appliquer un plan sans extension, contraction, déchirure ni duplicature. Aussi deux droites ne peuvent-elles y comprendre un espace (limité), comme le disait Euclide, mais on peut concevoir qu'elles entourent un espace illimité, si l'on peut ainsi dire. Considérons, par exemple, une génératrice AB du cylindre; puis une grande hélice aplatie partant de A et arrivant en B après avoir fait tout le tour du cylindre.

(*) On peut arriver à la même conclusion en considérant sur une sphère les figures formées par les arcs de loxodromie (P. M.)

Nous avons là le simulacre de deux droites se coupant en deux points dans un pareil espace à deux dimensions, où cependant la géométrie euclidienne est complètement réalisée.

C'est pourquoi il ne faut pas essayer de démontrer, par le théorème sur la somme des angles d'un triangle, que deux droites ne se coupent qu'en un point.

SUR LES FIGURES CYLINDRIQUES,

par M. C. E. Wasteels.

1. Considérons un cylindre de révolution et imaginons une section droite OXY et une section oblique OX'Y, de même centre O. Proposons-nous d'évaluer l'aire de la surface courbe comprise entre les deux sections et deux génératrices du cylindre, telles que AA' et BB'. Supposons OX et OX' perpendiculaires à OY et menons une génératrice quelconque MM'. Posons

$$OX = R, \quad XOX' = \alpha, \quad XOM' = \theta, \quad XOA' = \theta_0, \quad XOB' = \theta_1.$$

Nous aurons, en désignant la surface ABB'A' par $\mathfrak{s}$,

$$\mathfrak{s} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} MM' . R d\theta.$$

Or,

$$MM' = R \cos\theta \operatorname{tang} \alpha.$$

Donc,

$$\mathfrak{s} = R^2 \operatorname{tang} \alpha \int_{\theta_0}^{\theta_1} \cos\theta d\theta,$$

ou

$$\mathfrak{s} = R^2 \operatorname{tang} \alpha (\sin\theta_1 - \sin\theta_0). \qquad (1)$$

2. Remarque. Des points A' et B', on abaisse sur OY les perpendiculaires A'A$_1$ et B'B$_1$; on a

$$A_1B_1 = R (\sin\theta_1 - \sin\theta_0),$$

$$XX' = R \operatorname{tang} \alpha.$$

Par suite,

$$\mathfrak{s} = A_1B_1 . XX'.$$

Il résulte de là que la surface considérée équivaut à celle du rectan-

gle déterminé, dans le plan tangent mené en X, par les quatre plans XOY, X'OY, $AA'A_1$, $BB'B_1$.

3. *Démonstration géométrique.* Divisons l'arc A'B' en un nombre quelconque de parties égales A'C', C'D', ...; menons les cordes de ces arcs, ainsi que les génératrices C'C, D'D, ... et les cordes AC, CD, ...

N et N' étant les milieux des côtés AC et A'C' du trapèze AA'C'C, on a

$$surf.\ AA'C'C = A'C' . NN'.$$

Or, si l'on abaisse de N' et de C' les perpendiculaires $N'N_1$ et $C'C_1$ sur OY, et de C', la perpendiculaire C'E sur $A'A_1$, on aura, dans les triangles semblables A'C'E et $ON'N_1$:

$$A'C' : ON' = C'E : N'N_1;$$

d'où

$$A'C' . N'N_1 = C'E . ON' = A_1C_1 . ON'.$$

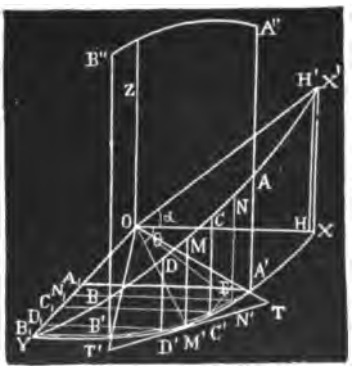


Fig. 1.

On a aussi

$$NN' = N'N_1 \text{ tang } \alpha.$$

Par suite,

$$A'C'.NN' = A'C'.N'N_1 \text{ tang } \alpha = A_1C_1 . ON' \text{ tang } \alpha.$$

Portons sur OX une longueur OH = ON' et élevons la perpendiculaire HH' sur OX ; nous pourrons écrire

$$AA'C'C = A_1C_1 . HH'.$$

On conclut facilement de ce qui précède que

$$la\ surf\ polyédr.\ AA'B'B = A_1B_1 . HH'. \qquad (2)$$

Si l'on fait croître indéfiniment le nombre des parties égales de l'arc A'B', on aura :

$$lim.\ surf.\ polyédr.\ AA'B'B = A_1B_1 . \lim HH',$$

ou

$$u = A_1B_1, XX'; \qquad \text{c. q. f. d.}$$

4. *Autre expression de u.* Nous avons trouvé

$$u = R^2 \text{ tang } \alpha \ (\sin \theta_1 - \sin \theta_0).$$

Or, on a

$$\frac{\sin \theta_1 - \sin \theta_0}{\cos \theta_1 + \cos \theta_0} = \text{tang } \frac{\theta_1 - \theta_0}{2} = \text{tang } \frac{A'OB'}{2}.$$

Par suite,

$$\varkappa = R \operatorname{tang} \frac{A'OB'}{2} (R \cos \theta_0 \operatorname{tang} \alpha + R \cos \theta_1 \operatorname{tang} \alpha),$$

ou

$$\varkappa = R \operatorname{tang} \frac{A'OB'}{2} (AA' + BB').$$

Remarquons que $R \operatorname{tang} \frac{A'OB'}{2}$ représente la moitié de la droite TT', tangente au milieu de l'arc A'B' et limitée aux droites OA' et OB' ; la formule peut donc s'écrire

$$\varkappa = \frac{AA' + BB'}{2} \times TT'. \qquad (3)$$

5. Considérons maintenant la surface courbe A''B''BA comprise entre les génératrices AA' et BB' et deux sections planes quelconques de centre O. Nous aurons

$$\text{surf. } A''B''BA = A''B''B'A' - ABB'A' = \frac{A''A' + B''B'}{2} \times TT'$$

$$- \frac{AA' + BB'}{2} \times TT' = \frac{(A''A' - AA') + (B''B' - BB')}{2} \times TT',$$

ou

$$A''B''BA = \frac{A''A + B''B}{2} \times TT'.$$

La formule (3) est donc encore applicable.

On remarquera l'analogie de cette formule avec celle qui donne la surface d'un trapèze (plan).

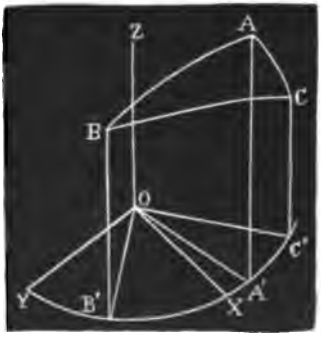


Fig. 2.

6. Soit actuellement un triangle cylindrique ABC, formé par trois sections planes de même centre O. Posons

$$AA' = \alpha, \quad BB' = \beta, \quad CC' = \gamma,$$

et désignons par c la droite TT' relative à l'arc B'A', et par b et a celles qui correspondent respectivement aux arcs A'C' et B'C'; nous aurons

$$ABC = ABB'A' + ACC'A' - BCC'B' = \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot c + \frac{\alpha + \gamma}{2} \cdot b - \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot a.$$

Pour la généralité des résultats, nous allons regarder les quantités α, β, γ comme positives ou négatives, suivant que les points A, B, C se trouvent au-dessus ou au-dessous de la section droite OXY; pour fixer le signe des quantités a, b, c, imaginons un mobile parcourant le périmètre du triangle ACB dans le sens direct, pour un observateur qui suit son mouvement du côté convexe; la projection orthogonale de ce mobile sur la section droite XY parcourra les arcs B'A', A'C', C'B'; chacune des quantités a, b, c sera considérée comme positive ou négative suivant que l'arc correspondant sera parcouru dans le sens YX ou en sens contraire.

Ces conventions admises, on trouvera sans peine que la formule devient, dans tous les cas :

$$\text{ABC} = \frac{\alpha+\beta}{2}\cdot c + \frac{\beta+\gamma}{2}\cdot a + \frac{\gamma+\alpha}{2}\cdot b,$$

ou

$$\text{ABC} = \text{S}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot c = \text{S}\frac{\alpha}{2}(b+c). \qquad (4)$$

7. On peut trouver une expression plus simple de la surface du triangle en introduisant la longueur AD, D étant l'intersection de AA' avec le côté BC. En effet, on a :

$$\text{ABB'A'} = \frac{\text{BB'}+\text{AA'}}{2}\cdot c, \quad \text{DBB'A'} = \frac{\text{BB'}+\text{DA'}}{2}\cdot c;$$

d'où

$$\text{ABD} = \frac{\text{AD}}{2}\cdot c.$$

On aura de même

$$\text{ACD} = \frac{\text{AD}}{2}\cdot b.$$

Par suite,

$$\text{ABC} = \frac{\text{AD}}{2}(c+b). \qquad (5)$$

Il résulte de cette formule que la surface du triangle ne change pas, lorsque ses sommets glissent sur trois génératrices fixes, pourvu que la longueur AD reste invariable.

8. *Autre transformation.* Supposons que le côté BC reste fixe et cherchons le lieu géométrique du sommet A, quand la surface du triangle reste constante.

Menons OX suivant la bissectrice de l'angle B'OC', OY perpendiculaire à OX, et OZ suivant l'axe du cylindre.

Nous aurons :

$$ABC = AD \cdot R\left(\operatorname{tang}\frac{B'OA'}{2} + \operatorname{tang}\frac{A'OC'}{2}\right) = \frac{AD \cdot R \sin\dfrac{B'OC'}{2}}{\cos\dfrac{B'OA'}{2} \cdot \cos\dfrac{A'OC'}{2}}.$$

Or,

$$\cos\frac{B'OA'}{2} \cdot \cos\frac{A'OC'}{2} = \cos\frac{B'OX + XOA'}{2} \cos\frac{B'OX - XOA'}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\cos XOC' + \cos XOA').$$

Mais R cos XOA' et R cos XOC' sont les abscisses x et x' des points A' (ou A) et C'; donc

$$ABC = \frac{2AD \cdot R^2 \sin\dfrac{B'OC'}{2}}{x + x'}.$$

Puisque le premier membre doit être constant, on devra avoir, k étant une constante,

$$\frac{AD}{x + x'} = k,$$

ou

$$AD = k\,(x + x').$$

Soit $z = mx + ny$ l'équation du plan OBC; nous aurons :

$$AD = z - (mx + ny); \quad \text{d'où} \quad z - (mx + ny) = k(x + x').$$

Le sommet A décrit donc une courbe plane. Cherchons l'intersection de cette courbe avec BC. Si l'on fait $z = mx + ny$, on trouve $x = -x'$; d'où l'on conclut que le lieu géométrique en question coupe BC en deux points diamétralement opposés à B et C.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant (à rapprocher de celui de Lexell) :

Le sommet d'un triangle cylindrique de surface constante et de base fixe, décrit une section plane passant par les points diamétralement opposés aux extrémités de la base.

Ce théorème permet de transformer les triangles cylindriques à peu près comme les triangles plans.

9. Dans tout ce qui précède, les figures cylindriques étaient limitées par des section planes *de même centre;* supposons maintenant des sections planes quelconques.

Dans la fig. 1, supposons que l'arc A''B'' appartienne à une section plane de centre O'', différent de O, et AB, à la section droite menée par O''; nous aurons :

$$A''B''BA = \frac{A''A + B''B}{2} \times TT';$$

$$ABB'A' = \text{arc } A'B' \times OO'';$$

donc

$$A''B''B'A' = \frac{A''A + B''B}{2} \times TT' + \text{arc } A'B' \times OO'',$$

ou

$$A''B''B'A' = \frac{A''A' + B''B'}{2} \times TT' - OO'' (TT' - \text{arc } A'B').$$

On verrait, comme au n° 5, que l'expression conserve encore la même forme, si les deux sections planes qui limitent la figure sont quelconques.

10. Considérons maintenant un triangle cylindrique quelconque ABC (fig. 2), et désignons par α', β', γ' les hauteurs des centres des sections planes BC, CA, AB, comptées à partir de la section droite XY; désignons enfin par a', b' et c' les arcs B'C', C'A' et A'B', en faisant, sur les signes de ces quantités, une convention analogue à celle qui a été faite pour a, b et c.

Nous aurons :

$$ABC = S\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot c - S\gamma' (c - c').$$

11. On peut, comme au n° 7, trouver une expression plus simple de la surface de ABC. Posons

$$\beta' - \alpha' = \beta'', \quad \gamma' - \alpha' = \gamma''.$$

On trouve sans peine, en opérant comme au n° 7,

$$ABC = \frac{AD}{2}(c+b) - \gamma''(c-c') - \beta''(b-b').$$

Gand, 19 septembre 1898.

SUR UNE QUARTIQUE,

par M. V. Jeřábek.

On donne un angle A et un point B dans un même plan. D'un point quelconque O de la bissectrice de l'angle A comme centre, on décrit une circonférence (O) qui touche les deux côtés : Soit M l'un des points où la droite OB rencontre cette courbe. Nous nous proposons d'étudier la courbe parcourue par le point M.

I. Le lieu (M) est une quartique.

En effet, considérons le cercle (O) dans une position particulière (ω) comme la base d'un cône dont le sommet S se projette orthogonalement en A sur le plan P. Imaginons aussi un paraboloïde hyperbolique ayant pour directrices la droite Sω et la perpendiculaire Bb élevée en B sur le plan P; les génératrices sont supposées parallèles à P. Le cercle O peut être regardé comme la projection de la section du cône par un certain plan horizontal π; la droite OB, comme la projection de la génératrice du paraboloïde qui est contenue dans le plan mené par OB perpendiculairement à P. Par suite, le point M est la projection d'un point m de la courbe d'intersection du cône par le paraboloïde. Cette courbe étant de quatrième ordre, le lieu (M) est une quartique.

On arrive à la même conclusion, en observant que sur chaque droite OB menée par B, se trouvent deux points variables du lieu; mais B lui-même est un point double du lieu, car on peut construire deux circonférences passant par B et touchant les côtés de l'angle A; leurs centres O_1, O_2 s'obtiennent en menant des droites BO_1, BO_2 parallèles aux rayons ωD_1, ωD_2 qui aboutissent aux points de rencontre de la circonférence (ω) avec la droite AB (les points O_1, O_2, D_1, D_2 ne sont pas marqués sur la figure). Les droites BO_1, BO_2 sont les tangentes au point double B. Cependant, si le point B tombe en dehors de l'angle A et de son opposé au sommet, il est un point isolé; s'il est pris sur un côté de l'angle A, B

devient un point de rebroussement, avec une tangente perpendiculaire à AB.

II. La tangente au point M est évidemment la projection horizontale de l'intersection des plans tangents menés au point m au cône et au paraboloïde. Un second point de cette tangente est donc l'intersection des traces horizontales des deux plans tangents.

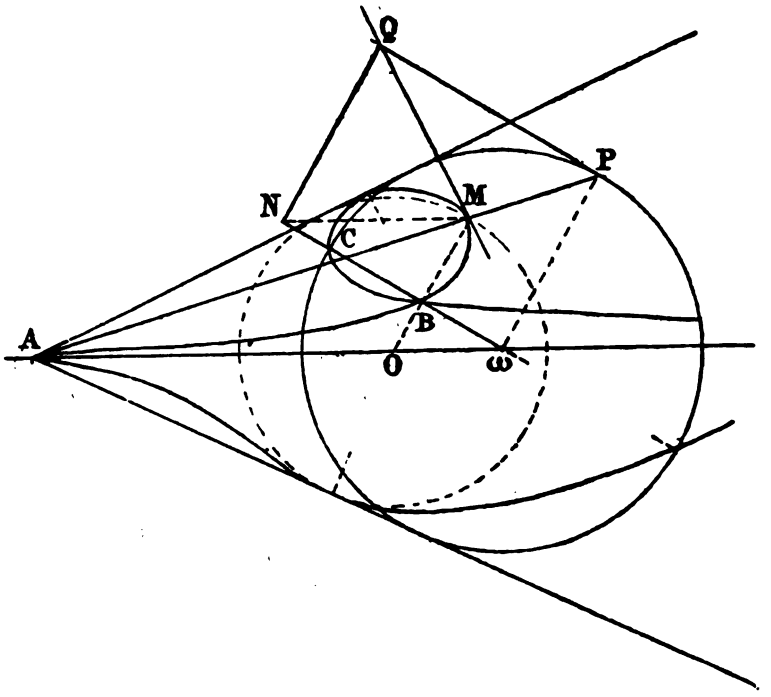


Fig. 1.

Or, la génératrice Sm du cône se projette en AM ; sa trace horizontale est donc le point P où AM rencontre la base (ω), et la tangente PQ à cette base est la trace du plan tangent au cône.

D'autre part, une génératrice du second système du paraboloïde passe par m; elle est parallèle au second plan directeur A, sa projection horizontale est donc une parallèle MN à Aω et sa trace est le point N où cette projection coupe la génératrice ωB du premier système, contenue dans le plan de projection. La trace du plan tangent mené en m au para-

boloïde passe donc par N; d'ailleurs, elle est parallèle à la projection BM de la génératrice du premier système passant par m. Par suite, nous menons NQ parallèle à BM, et MQ sera la tangente cherchée.

III. Si le point A est à l'infini, le courbe (M) devient la conchoïde de Nicomède.

Dans le cas général, elle admet la définition suivante : Étant donnés une circonférence (ω) et deux points A et B, on joint un point quelconque P de cette courbe au centre ω et au point A, puis on mène par B une droite parallèle au rayon ωP et rencontrant AP en M; M décrit la quartique.

Le point A peut être pris à l'extérieur ou à l'intérieur des cercles (ω). S'il est sur la circonférence, la quartique devient une strophoïde.

Cette construction montre que sur chaque droite menée par A, il existe deux points de la courbe, variables avec la droite. Mais, si E, E_1 sont les extrémités du diamètre du cercle (ω) parallèles à AB, les points du lieu qui correspondent à P $\equiv$ E ou à P $\equiv$ E_1 se confondent avec A; donc A est un point double, avec les tangentes AE, AE_1.

Si le point A est situé sur la circonférence (ω), le lieu (M) devient une strophoïde.

Note. La dernière définition du lieu (M) conduit à une construction de la normale, fondée sur le principe de Roberval.

Considérons le point P comme déterminé par l'intersection des droites AP, ωP mobiles autour de A et de ω. En faisant tourner toutes les vitesses de 90° autour de leur point d'application, nous prenons pour vitesse définitive du point P la droite Pω; la vitesse du point M empruntée à la rotation de BM autour de B, sera alors représentée par MB. La vitesse que P emprunte à la rotation de P autour de A, a pour mesure la projection de Pω sur PA; d'où il suit que la vitesse empruntée par M à la même rotation, est représentée par la projection MO′ de MO sur AM. Ayant ainsi les projections MO, MB de la vitesse de M (tournée de 90° autour de M) sur deux droites, nous aurons l'extrémité R de cette vitesse par l'intersection de OO′ avec la perpendiculaire élevée en B sur MB : MR sera donc la normale à la courbe (M). (J. N.).

CONCOURS GÉNÉRAL EN PREMIÈRE SCIENTIFIQUE, 1898.

Solutions de la question de Géométrie analytique,

par M. Jean Déprez, professeur à Charleroi.

Par l'un des foyers d'une ellipse, on mène deux cordes AC, BD *parallèles à deux diamètres conjugués; aux extrémités* A, B *de ces cordes on mène des tangentes à la courbe. Chercher le lieu décrit par le point d'intersection de ces tangentes, en supposant que le système des cordes issues du foyer soit variable.*

I. On peut représenter les coordonnées des points A et B par $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$, $(a\cos\beta, b\sin\beta)$; les tangentes, AP, BP ont alors pour équations

$$\frac{x\cos\alpha}{a}+\frac{y\sin\alpha}{b}=1, \quad \frac{x\cos\beta}{a}+\frac{y\sin\beta}{b}=1.$$

On en tire les coordonnées de P :

$$x=\frac{a\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}, \quad y=\frac{b\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}. \tag{1}$$

Les directions des cordes AC, BD étant conjuguées, on a

$$\frac{b\sin\alpha}{a\cos\alpha-c}\cdot\frac{b\sin\beta}{a\cos\beta-c}=-\frac{b^2}{a^2},$$

ou

$$2a^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)-2ac\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)-b^2=0. \tag{2}$$

Les équations (1) donnent

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}, \quad \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{x\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{a},$$

ce qui permet d'éliminer α et β de l'équation (2). On trouve

$$a^2y^2+b^2x^2+2a^2cx-2a^4=0.$$

Le lieu est donc une ellipse dont le centre a pour coordonnées $\left(-\frac{a^2c}{b^2}, 0\right)$; les demi-axes sont

$$\frac{a^2}{b^2}\sqrt{a^2+b^2}, \quad \frac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2}.$$

2. Voici une autre manière de faire le calcul. Soient (X, Y), (x', y') (x'', y'') les coordonnées des points P, A, B. La condition que les droites

FA, FB sont parallèles à deux diamètres conjugués s'exprime par l'égalité

$$a^2y'y'' + b^2x'x'' - b^2c(x' + x'') + b^2c^2 = 0. \qquad (3)$$

Si l'on élimine x ou y entre les équations

$$a^2yY + b^2xX = a^2b^2, \quad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

les équations résultantes auront respectivement pour racines y' et y'', x' et x'', d'où

$$x' + x'' = \frac{2a^2b^2X}{a^2Y^2 + b^2X^2}, \quad x'x'' = \frac{a^4(b^2 - Y^2)}{a^2Y^2 + b^2X^2},$$

$$y'y'' = \frac{b^4(a^2 - X^2)}{a^2Y^2 + b^2X^2}.$$

Il reste à substituer ces valeurs dans l'équation (3), etc.

3. On peut donner une solution géométrique. En effet, l'ellipse est la projection d'une circonférence de diamètre $2a$; les cordes AC, BD sont les projections de deux cordes rectangulaires A'C', B'D' de la circonférence. Soient P' le point de concours des tangentes menées en A' et B', M' le milieu de la corde A'B'. On a

$$\overline{OM'}^2 + \overline{M'A'}^2 = \overline{OM'}^2 + \overline{FM'}^2 = \overline{OA'}^2 = a^2;$$

donc le lieu de M' est une circonférence qui a son centre au milieu I de OF et pour rayon $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. Mais $OM'.OP' = \overline{OA'}^2 = a^2$; donc le point P' décrit une ligne inverse de la circonférence (M), ou une circonférence. Il en résulte que le point P décrit une ellipse semblable à l'ellipse proposée.

4. Cette solution géométrique conduit à d'autres propriétés de la figure.

Soit N' la projection de F sur A'B'; ce point appartient à la circonférence (M'). On en conclut que les milieux des côtés du quadrilatère ABCD et les points où ces côtés sont rencontrés par les droites menées par F parallèlement aux diamètres conjugués avec ces côtés, se meuvent sur une même ellipse.

Comme P décrit une ellipse, sa polaire AB par rapport à l'ellipse donnée enveloppe une ellipse.

Les milieux des cordes A'C', B'D' décrivent une circonférence de diamètre OF. On en conclut que les milieux des cordes AC, BD se meu-

vent sur une ellipse homothétique à l'ellipse proposée et ayant pour grand axe OF.

La troisième diagonale du quadrilatère ABCD se confond avec la directrice; car elle est la polaire de F.

5. On démontre encore, par un calcul facile, que les cercles décrits sur AC et BD comme diamètres, se coupent en deux points (*points de* MONGE du quadrilatère ABCD), qui décrivent une circonférence; que l'axe radical de ces cercles passe par un point fixe de OF, et que le pied de cet axe se meut sur une circonférence.

6. Les propriétés que nous venons de signaler, subsistent encore lorsqu'on mène, d'un point fixe quelconque, des cordes parallèles à un système de diamètres conjugués.

7. Voici comment on peut étendre la question du Concours à la géométrie sphérique.

Étant donnés, sur une même sphère, un petit cercle Σ et un point F, ou mène par F deux arcs de grand cercle qui rencontrent Σ en A et B. Si les angles du triangle FAB vérifient la relation $A + B = F$, le milieu M de l'arc AB et la projection N de F sur le grand cercle AB décrivent une conique sphérique; le pôle sphérique P de l'arc AB par rapport à Σ décrit une conique sphérique; enfin, l'arc AB enveloppe une conique sphérique.

BIBLIOGRAPHIE.

Encyclopedie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, herausgegeben von Dr. Burkhardt, o. Professor der Mathematik an der Universität Zürich und Dr. W. Fr. Meyer, o. Professor der Mathematik an der Universität Königsberg i. Pr. In sechs Bänden. Erster Band. Erster Heft. Leipzig, B. G. Teubner (112 p. gr. in-8°). Prix : Marcs 3,40.

Nous attirons l'attention de nos lecteurs sur cette importante publication dont le prospectus fait connaître le but dans les termes suivants :

« Présenter, sous une forme condensée et synoptique, un exposé aussi complet que possible des résultats acquis dans les diverses branches des Mathématiques, indiquer soigneusement la bibliographie de chaque partie et retracer par là le développement historique des méthodes employées dans les sciences depuis le commencement du 19e siècle, tel est le but que se propose cette Encyclopédie. Loin de se borner aux Mathématiques pures, elle traitera aussi, dans une large mesure, les applications des Mathématiques à la Mécanique, à la Physique, à l'Astronomie, à la Géodésie, aux sciences techniques, etc., de manière à renseigner le mathématicien sur les questions pour lesquelles les applications

réclament son concours, et à faire connaître à l'astronome, au physicien, à l'ingénieur, etc., les solutions que les Mathématiques fournissent à leurs problèmes. Les démonstrations des propositions, cela va de soi, sont supprimées.

L'Encyclopédie comprendra environ 240 feuilles grand-in-8°; chaque volume paraîtra en quatre livraisons de 10 feuilles.

L'ouvrage peut rendre des services même aux personnes qui ne voudraient se renseigner que sur une partie déterminée des Sciences, car il ne présuppose pas de connaissances préliminaires spéciales.

La Rédaction est assistée d'une Commission actuellement composée de MM. W. Dyck (Munich), G. v. Escherich (Vienne), F. Klein (Goettingue), L. Boltzmann (Vienne) et H. Weber (Strasbourg).

Il serait superflu d'insister davantage sur la haute valeur de l'Encyclopédie. Cet ouvrage a sa place marquée dans toutes les bibliothèques scientifiques. »

La première livraison a paru ; elle contient les articles suivants : 1. Principes de l'Arithmétique par H. Schubert (Hambourg); 2. Analyse combinatoire, par E. Netto (Giessen); 3. Nombres irrationnels et convergence d'expressions infinies, par A. Pringsheim. Ce début fait bien augurer de la nouvelle encyclopédie.

Cours de Géométrie analytique par J. Carnoy, Professeur à l'Université de Louvain. Géométrie de l'Espace. Cinquième édition, revue et augmentée. Louvain, Uytspruyst; Paris, Gauthier-Villars, 1899 (XII-542 p. in-8). Prix : 11 francs.

Nous avons le plaisir de signaler à nos lecteurs la publication de la *cinquième* édition de la Géométrie analytique à trois dimensions de M. le Professeur Carnoy. L'auteur a introduit, dans son livre, un grand nombre d'améliorations de détails, puis diverses additions parmi lesquelles nous signalerons une application des invariants et des déterminants à la discussion de l'équation en s et au passage de l'équation générale du second degré aux formes réduites, une discussion plus détaillée de l'intersection de deux quadriques. La théorie des surfaces gauches a été rendue plus simple; les coordonnées tangentielles ont été plus souvent employées encore que dans les éditions précédentes. Voici au reste le plan du livre.

1. Introduction. 2. Droite. 3. Plan. 4-5. Droite et plan en coordonnées tétraédriques et tangentielles. 6-7. Sphère et systèmes de sphères. 8-10. Quadriques en général; à centre; autres. 11. Lignes focales et quadriques homofocales. 12-13. Quadriques étudiées en coordonnées tétraédriques et tangentielles. Exercices. 14-16. Propriétés générales des quadriques (coordonnées tétraédriques et tangentielles); polaires réciproques, figures homographiques et homologiques. 17. Génération des surfaces. 18. Surfaces algébriques.

Théorie du potentiel newtonien. Leçons professées à la Sorbonne pendant le premier semestre 1894-1895, par H. Poincaré, membre de l'Institut, rédigées par E. Leroy, docteur es Sciences et G. Vincent. Paris, G. Carré et C. Naud, 1899 (366 p. in-8°). Prix : 14 francs.

Ce volume est l'un des derniers du brillant *Cours de Physique mathématique*

professé à la Sorbonne, par M. Poincaré avant son passage à la chaire de Mécanique céleste. En réalité, la théorie du potentiel telle qu'elle est exposée dans le présent ouvrage appartient beaucoup plus aux mathématiques pures qu'à la physique. Le cours de M. Poincaré sur ce sujet intéressera d'autant plus les géomètres qu'il contient l'exposé des recherches de l'auteur sur le problème de Dirichlet et que M. Léroy, l'un des deux rédacteurs des leçons de M. Poincaré, a prouvé, par la publication de sa thèse inaugurale de doctorat, qu'il est spécialement versé dans le sujet traité ici.

Voici le sommaire de l'ouvrage : 1-2. Potentiel en un point extérieur (intérieur) aux masses agissantes : équation de Laplace (de Poisson). Développements en séries. 3. Surfaces et lignes attirantes. 4. La fonction de Green et le problème de Dirichlet. 5. Résolution dans le cas du cercle et de la sphère; théorème de Harnack. 6. Doubles couches. 7. Résolution du problème de Dirichlet par la méthode de Poincaré. 8. Par la méthode de Neumann. 9. Extension de cette méthode au cas des domaines simplement connexes. Les fonctions fondamentales.

Éléments d'analyse mathématique, à l'usage des ingénieurs et des physiciens, cours professé à l'École Centrale des Arts et Manufactures par P. APPELL, Membre de l'Institut. Paris, G. Carré et C. Naud. 1898 (719 p. gr. in-8°; 224 fig. dans le texte; cartonné à l'anglaise). Prix : 24 francs.

En attendant que nous puissions publier une analyse critique des *Éléments d'analyse* de M. Appell, nous croyons utile d'en faire connaître la table des matières; cela suffira pour en donner une idée assez exacte; le nom de l'auteur est d'ailleurs, une garantie suffisante de la valeur scientifique de l'ouvrage. I. 1. Infiniments petits; principes de substitution. 2-3. Différentielles des fonctions d'une ou de plusieurs variables (en supposant connues, par un cours antérieur, les règles de la dérivation). II. 1. Intégrales indéfinies. 2. Aire. 3-4. Intégrales définies. Changement de variable. 5. Aire d'un secteur. III. 1. Volume d'un solide à bases parallèles. 2. Cas où la section est fonction quadratique de sa distance à une des bases. 3. Solides de révolution. IV. 1. Rectification des courbes. 2. Aire des surfaces de révolution. 3. Aire d'un cylindre ou d'un cône entre deux génératrices. V. Quelques méthodes d'intégration. 1. Réduction aux types élémentaires. 2-3. Fractions rationnelles en ϖ, ou en $\sin\varpi$ et $\cos\varpi$. 4. Applications. 5. Fractions rationnelles en x et y ($y^2 = a + bx + cx^2$). 6. Différentielles binômes. VI. Développement en séries des puissances entières et positives de la variable. 1. Préliminaires. 2-3. Développement par intégration. 4-5. Formules de Mac-Laurin et de Taylor. 6. Applications au calcul des deux premières intégrales elliptiques et à $\Gamma(\frac{1}{4})$ incomplet. 7. Vraies valeurs des expressions indéterminées. VII. 1. Séries trigonométriques. 2. Polynôme exprimé au moyen de ses valeurs moyennes. VIII. Intégrales définies où la fonction à intégrer ou bien l'une des limites de l'intégrale devient infinie. IX. Tangente, point d'inflexion d'une courbe plane; maximum et minimum d'une fonction d'une variable. X. Tangente et plan osculateur d'une courbe gauche. Hélice. XI. Séries de Mac-Laurin et de Taylor pour les fonctions de deux variables; plan tangent aux surfaces, en parti-

culier aux surfaces réglées; maximum et minimum d'une fonction de deux variables. XII. Enveloppe d'une famille de courbes planes, de courbes dans l'espace, de surfaces dépendant de un ou de deux paramètres. XIII. Courbure des courbes planes; étude d'une courbe aux environs d'un point. XIV. Courbure et torsion des courbes gauches; étude d'une courbe gauche dans le voisinage d'un point ordinaire; développement sur un plan d'une surface développable; développées. XV. Courbure des lignes tracées sur une surface; étude de la surface autour d'un point. XVI. Lignes de courbure; lignes asymptotiques; lignes de niveau et de plus grande pente; lignes géodésiques; tangentes conjuguées. XVII. Différention sous le signe d'intégration; intégration des différentielles totales; intégrales le long d'une courbe plane ou d'une courbe quelconque. XVIII. Intégrales doubles et triples; recherche générale des volumes et des aires; intégrales eulériennes. XIX. Équations différentielles du premier ordre. Généralités et intégration de sept types divers. XX. Equations différentielles d'ordre supérieur. XXI. Équations différentielles linéaires sans (ou avec) second membre, à coefficients constants ou non. XXII. Équations différentielles simultanées. XXIII. Équations aux dérivées partielles (surtout du premier ordre et linéaires) XXIV. Méthodes d'approximation des intégrales définies; intégrateurs et intégraphes.

L'exécution typographique de l'ouvrage est très claire et très soignée.

Nous ne doutons pas que le livre de M. Appell ne rende de grands services aux élèves des écoles spéciales belges, aussi bien qu'à ceux de l'École Centrale de Paris. Dans une seconde édition, çà et là, on pourra rendre certaines démonstrations plus simples ou plus rigoureuses; pour les lecteurs non français, il faudra ajouter au chapitre premier la démonstration des règles de la dérivation des fonctions, car ce n'est qu'en France que l'on enseigne ces règles dès le collège ou lycée.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1045.

(Voir *Mathesis* (2), V, p. 264).

Si $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ *sont les racines de l'équation;*

$$A_0x^3 + 3A_1x^2 + 3A_2x + A_3 = 0,$$

chercher l'équation ayant pour racines

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta),\ \operatorname{tg}(\beta+\gamma),\ \operatorname{tg}(\gamma+\alpha). \qquad \text{(J. Neuberg.)}$$

Solution par M. A. Droz Farny. On a

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = -\frac{3A_1}{A_0},\quad \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta.\operatorname{tg}\gamma = -\frac{A_3}{A_0},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = y = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{-\frac{3A_1}{A_0} - x}{1+\frac{A_3}{xA_0}},\quad y = -\frac{3A_1x + A_0x^2}{A_0x + A_3}.$$

Il s'agira donc d'éliminer x entre les deux équations :

$$A_0x^3 + 3A_1x^2 + 3A_2x + A_3 = 0 \qquad (1)$$
$$A_0x^2 + (A_0y + 3A_1)x + A_3y = 0. \qquad (2)$$

Nous emploierons à cet effet la méthode Cauchy-Cayley.

Multiplions (2) par x; on obtiendra en isolant d'abord les 2 premiers termes, puis les 2 premiers termes de chaque équation

$$1 = \frac{3A_1x^2 + 3A_2x + A_3}{(A_0y + 3A_1)x^2 + A_3yx}, \qquad \frac{A_0x + 3A_1}{A_0x + (A_0y + 3A_1)} = \frac{3A_2x + A_3}{A_3yx}.$$

Ces deux relations et l'équation (2) fournissent le système :

$$\begin{aligned} &A_0x^2 + (A_0y + 3A_1)x + A_3y = 0, \\ &A_0yx^2 + (A_3y - 3A_2)x - A_3 = 0, \\ &(A_0A_3y - 3A_0A_2)x^2 + (3A_1A_3y - A_0A_3 - 3A_0A_2y - 9A_1A_2)x \\ &\qquad - A_3(A_0y + 3A_1) = 0 \end{aligned}$$

d'où par élimination de x

$$\begin{vmatrix} 1 & A_0y + 3A_1 & -y \\ y & A_3y - 3A_2 & 1 \\ A_3y - 3A_2, & 3A_1A_3y - A_3A_0 - 3A_0A_2y - 9A_1A_2, & A_0y + 3A_1 \end{vmatrix} = 0$$

L'équation développée en y sera :

$$y^3(A_3^2 + 3A_0A_2 - 3A_1A_3 - A_0^2) + 3y^2(A_0A_3 + 3A_1A_2 - 2A_0A_1 - 2A_2A_3) + 3y(A_1A_3 + 3A_2^2 - A_0A_2 - 3A_1^2) + A_0A_3 - 9A_1A_2 = 0.$$

Remarque. Si α, β, γ sont les angles d'un triangle, l'équation proposée prend la forme :

$$A_0x^3 + 3A_1x^2 + 3A_2x + 3A_1 = 0$$

L'équation cherchée devient alors :

$$A_0x^3 - 3A_1x^2 + 3A_2x - 3A_1 = 0,$$

ce qui est d'ailleurs évident; car $tg(\beta + \gamma) = -tg\,\alpha$ et les racines de la nouvelle équation sont égales et de signes contraires à celles de la proposée.

Solution par MM. Fairon, Déprez, Brocard, Maurice Legrand, Barbette *et* Seligmann. L'équation cherchée est

$$\left(x - \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\,tg\,\beta}\right)\left(x - \frac{tg\,\beta + tg\,\gamma}{1 - tg\,\beta\,tg\,\gamma}\right)\left(x - \frac{tg\,\gamma + tg\,\alpha}{1 - tg\,\beta\,tg\,\alpha}\right) = 0.$$

Remplaçant $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ par a, b, c et effectuant les opérations indiquées, cette équation devient :

$$x^3[1-(ab+bc+ca)+abc(a+b+c)-a^2b^2c^2]$$
$$-x^2[2(a+b+c)-3abc-(a+b+c)(ab+bc+ca)+2abc(ab+bc+ca)]$$
$$+x[(a+b+c)^2+(ab+bc+ca)-abc(a+b+c)-(ab+bc+ca)^2]$$
$$-[(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc]=0;$$

et, en tenant compte des relations

$$a+b+c=-\frac{3A_1}{A_0},\quad ab+bc+ca=\frac{3A_2}{A_0},\quad abc=-\frac{A_3}{A_0},$$

nous aurons :

$$x^3[A_0^2-3A_0A_2+3A_1A_3-A_3^2]-3x^2[A_0A_3-2A_0A_1-2A_2A_3+3A_1A_2]$$
$$+3x[3A_1^2-A_1A_3+A_0A_2-3A_2^2]-[A_0A_3-9A_1A_2]=0.$$

Question 1047.

(Voir *Mathesis* (2) V, p. 280).

Le lieu des projections du foyer F *d'une parabole sur ses normales est une parabole (théorème connu). Le lieu des projections de* F *sur les normales à la développée est une cubique.* (E. N. Barisien).

Solution par M. Déprez. 1° Soient A, F le sommet et le foyer d'une parabole; T, N les points où la tangente et la normale menées au point M de la courbe rencontrent l'axe AF; P le pied de l'ordonnée de M, N′ la projection de F sur MN. Comme F est le milieu de TN, N′ est le milieu de MN. L'ordonnée de N′ est donc la moitié de celle M; à cause de $PN=2AF$, l'abscisse de N′ par rapport aux axes rectangulaires Fx, Fy est égale à AP. Le point N′ décrit donc une parabole de sommet F et de paramètre $\frac{1}{2}p$, c'est-à-dire que l'équation de cette parabole est $y'^2=\frac{1}{2}px'$.

2° Si l'on prend pour origine des coordonnées le symétrique A′ de A par rapport au foyer F, la développée de la parabole a pour équation $27py^2-8x^3=0$; un point de cette courbe a alors pour coordonnées

$$x=\frac{27}{8}p\lambda^2,\quad y=\frac{27}{8}p\lambda^3.$$

L'équation de la normale en ce point est

$$24\lambda y+16x-27p\lambda^2(3\lambda^2+4)=0;$$

et celle de la perpendiculaire abaissée du point F $(-\frac{1}{2}p, 0)$.

$$y = \frac{3}{2}\lambda\left(x + \frac{p}{2}\right).$$

En éliminant λ et plaçant l'origine des coordonnées en F, on trouve pour la podaire cherchée

$$y = \pm x\sqrt{\frac{2x - p}{p}}.$$

NOTE. Autres solutions par MM. SOONS, FAIRON, MANDART, STUYVAERT et DROZ FARNY.

Voici comment M. MANDART forme l'équation de la normale à la développée de la parabole. L'équation de la tangente à la parabole étant

$$y = mx + \frac{p}{2m} \quad \text{ou} \quad y\cos\alpha - x\sin\alpha = \frac{p}{2}\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha},$$

la dérivée de cette équation par rapport à α,

$$y\sin\alpha + x\cos\alpha = \frac{p}{2}\cos\alpha\frac{1 + \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha},$$

représente la normale à la parabole ou la tangente à la développée; la seconde dérivée par rapport à α,

$$y\cos\alpha - x\sin\alpha = -\frac{p}{2}\frac{\sin^4\alpha + \cos^2\alpha + 1}{\sin^3\alpha},$$

représente la normale à la développée.

M. STUYVAERT trouve directement l'équation du second lieu en coordonnées polaires. Soient C le centre de courbure de la parabole au point M, φ la projection de F sur la perpendiculaire élevée en C sur MN. On a

$$F\varphi = MC - MN' = \frac{\overline{MN}^3}{p^2} - \frac{MN}{2},$$

ou

$$\rho = \frac{p}{\cos^2\omega} - \frac{p}{2\cos\omega},$$

ρ et ω étant les coordonnées polaires de φ par rapport au pôle F et à l'axe polaire Fx.

×Question 1050.

(Voir *Mathesis* (2), V, p. 280).

Calculer en fonction des côtés, le rapport des segments déterminés sur un côté d'un pseudocarré par la perpendiculaire abaissée du milieu du côté opposé. (E. Colart.)

Solution par MM. Francq et Tiete. Soient ABCD un pseudocarré, M le milieu de AB, H la projection de M sur CD. Désignons par a, b, c, d les côtés AB, BC, CD, DA; par l les diagonales AC, BD.

Des triangles ABD, ABC on tire :

$$\overline{MD}^2 = \frac{d^2 + l^2 - \frac{a^2}{2}}{2}, \quad \overline{MC}^2 = \frac{b^2 + l^2 - \frac{a^2}{2}}{2}.$$

Mais

$$\overline{CH}^2 - \overline{DH}^2 = \overline{MC}^2 - \overline{MD}^2 = \frac{b^2 - d^2}{2}, \quad CH + DH = c;$$

d'où

$$CH - DH = \frac{b^2 - d^2}{2c}.$$

Ensuite

$$\frac{CH + DH}{CH - DH} = \frac{2c^2}{b^2 - d^2}, \quad \frac{CH}{DH} = \frac{2c^2 + b^2 - d^2}{2c^2 - b^2 + d^2}.$$

Question 1159.

(Voir *Mathesis* (2) t. VIII, p. 55).

Étant donnés trois points A, B, C *sur une droite* Δ, *on prend un point* M *variable sur une droite* Δ' *passant par* C. *Trouver le lieu des centres de similitude des cercles circonscrits aux triangles* MAB, MAC.

(E. N. Barisien.)

Solution par M. Déprez. Prenons pour axes de coordonnées Δ et la perpendiculaire en A, et soient $(2b, 0)$, $(2c, 0)$, (b, β), (c, γ), les coordonnées des points B, C et des centres B_1, C_1 des cercles MAB, MAC. Les équations de ces cercles sont

$$x^2 + y^2 - 2bx - 2\beta y = 0, \quad x^2 + y^2 - 2cx - 2\gamma y = 0; \qquad (1)$$

d'où l'équation de la corde commune

$$(b - c)x + (\beta - \gamma)y = 0. \qquad (2)$$

Si l'on représente Δ′ par

$$y = k(x - 2c), \tag{3}$$

on déduit de (2) et (3), pour les coordonnées de M,

$$x = \frac{2c(\beta - \gamma)k}{b - c + k(\beta - \gamma)}, \quad y = \frac{-2c(b - c)k}{b - c + k(\beta - \gamma)}.$$

Subtituons ces valeurs dans l'équation du cercle C_1; nous aurons

$$c\beta - b\gamma = k[c(b - c) + \gamma(\beta - \gamma)]. \tag{4}$$

Soient maintenant x, y les coordonnées du centre de similitude S des cercles B_1, C_1. En exprimant que S est situé sur la droite B_1C_1 et la divise dans le rapport des rayons, on obtient les égalités

$$(y - \beta)(b - c) - (x - b)(\beta - \gamma) = 0,$$
$$\frac{b^2 + \beta^2}{c^2 + \gamma^2} = \frac{(x - b)^2}{(x - c)^2}.$$

De là, on tire

$$\gamma = \frac{y^2(c - b) - x^2(c + b) + 2bcx}{2y(x - b)},$$
$$\beta = \frac{y^2(b - c) - x^2(c + b) + 2bcx}{2y(x - c)}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (4); il vient, après suppression du facteur $x^2 + y^2$,

$$2y[x(b + c) - 2bc](x - c) + k\{[x(b + c) - 2bc]^2 + y^2(b - c)[2x - b - c)\} = 0.$$

équation d'une cubique.

×Question 1170.

(Voir *Mathesis*, (2) t. VIII, p. 128).

Soit un triangle ABC; *on prolonge le côté* AB *d'une longueur* BD = AB *et l'on joint* DC. *On élève sur le milieu de* CD *une perpendiculaire qui rencontre le cercle* ABC *en deux points* E *et* F. *Démontrer que* B *est le milieu du segment déterminé sur* BC *par les droites* AE *et* AF. (A. Gob.)

Solution par MM. R. Buysens et Droz Farny. Menons la corde AG du cercle circonscrit parallèle à BC. Les tangentes aux points B et G se coupent en H. Les triangles HBD et HGC sont égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun, savoir : l'angle

HBD égal à l'angle HGC comme ayant pour mesure respectivement la moitié des arcs égaux ACB et GBC ; les côtés HB et BD respectivement égaux à HG et GC.

On a donc HD = HC et le point H appartient à la perpendiculaire élevée au milieu de CD. Les points B, G, E, F, forment un groupe harmonique, puisque EF passe par le pôle de BG. On a donc le faisceau harmonique A(BGEF), qu'il suffit de couper par BC parallèle au rayon AG pour démontrer le théorème.

Question 1175.

(Voir *Mathesis* (2), t. VIII, p. 152).

Par le point d'intersection M *de deux cercles donnés* O *et* O', *on mène deux sécantes rectangulaires qui coupent les deux circonférences respectivement en* A *et* B, *en* A' *et* B'. *Soient* S, S' *les conjugués harmoniques de* M *par rapport aux segments* AB, A'B'. *Trouver* 1° *le lieu des points* S, S'; 2° *le lieu du milieu de la distance* SS'. (E. N. Barisien).

Solution par M. G. Gérard. Soient N et N' les points diamétralement opposés à M sur les cercles O et O'; joignons AN, BN', et menons SPP' perpendiculaire sur MS en S, et coupant MN, MN' en P, P'. Nous aurons évidemment

$$\frac{MP}{MN}=\frac{MS}{MA}=\frac{MA-SA}{MA}=1-\frac{SA}{MA}.$$

$$\frac{MP'}{MN'}=\frac{MS}{MB}=\frac{MB+SB}{MB}=1+\frac{SB}{MB}.$$

Mais, par les conditions du problème,

$$\frac{SA}{MA}=\frac{SB}{MB}.$$

Il en résulte qu'en posant MO = R, MO' = R', nous avons entre les segments MP et MP' la relation

$$\frac{MP}{R}+\frac{MP'}{R'}=4.$$

Par suite, les points P et P' décrivent des ponctuelles semblables, et la droite PP' enveloppe une parabole Π, tangente aux diamètres MN, MN', les points de contact sur ceux-ci étant aux distances 4R, 4R' de M. Le lieu de S (ou de S') est la polaire de cette parabole par rapport au point

extérieur M, c'est-à-dire une cubique circulaire crunodale, ayant son nœud en M, et passant par M', second point commun aux cercles donnés.

Achevons le rectangle SMS'Q; SQ et S'Q étant deux tangentes rectangulaires de Π se coupent sur la directrice; donc T, milieu de SS' et de MQ, décrit une droite parallèle à cette directrice.

M. Déprez a résolu la même question par la géométrie analytique, et l'a généralisée en remplaçant les deux cercles par deux coniques.

QUESTIONS D'EXAMEN.

869. Si par les sommets A, B, C d'un triangle ABC inscrit à un cercle, on mène des cordes AA', BB', CC' parallèles aux côtés opposés BC, CA, AB, le triangle A'B'C' est homothétique au triangle orthique de ABC par rapport au centre de gravité G. (Soons.)

Les droites AA', BB', CC' forment un triangle A''B''C'' dont A, B, C sont les milieux des côtés; donc A', B', C' sont les pieds des hauteurs de A''B''C''. Les triangles A''B''C'', ABC étant homothétiques par rapport à G, il en est de même de leurs triangles orthiques.

870. Dans tout triangle ABC, la circonférence de diamètre HO coupe les hauteurs AH, BH, CH aux sommets d'un triangle A'B'C' inversement semblable à ABC; elle coupe les rayons OA, OB, OC aux sommets d'un triangle A''B''C'' inversement semblable au triangle orthique de ABC. (Soons.)

Quels que soient les points O et H, le triangle A'B'C' est inversement semblable à celui dont les côtés sont parallèles aux droites AH, BH, CH, etc.

871. La tangente en un point quelconque M d'une ellipse rencontre en T la tangente menée au sommet A. Lieu de l'intersection de FT avec la parallèle à l'axe OA menée par M. (Soons).

$$(a-c)^2y^2+b^2(x-c)^2-2b^2(a-c)(x-c)=0.$$

872. Les circonférences décrites sur les côtés d'un quadrilatère ABCD comme diamètres se coupent consécutivement aux sommets d'un quadrilatère A'B'C'D' inversement semblable au quadrilatère primitif.

(Soons.)

Les points B', D' sont les projections de B, D sur AC, et les points A', C' sont les projections de A, C sur BD. O étant l'intersection de AC et BD le triangle O A'B' est inversement semblable à OAB, etc.

873. Si une ellipse et une hyperbole ont mêmes foyers et même axe non focal, elles se coupent sur la circonférence qui a pour diamètre la distance des foyers. (Soons.)

874. Lieu de l'orthocentre d'un triangle dont deux sommets coïncident avec le sommet et le foyer d'une parabole et dont le troisième sommet décrit cette courbe. (Soons.)

Equation : $2py^2 = x\left(x - \frac{p}{2}\right)^2$.

874. Soient A', B', C' les milieux des côtés d'un triangle ABC, I le le centre du cercle inscrit; on a

$$\overline{IA'}^2 + \overline{IB'}^2 + \overline{IC'}^2 = \frac{p^2 + 3r^2 - 12Rr}{2}.$$

Si le cercle inscrit passe par le centre de gravité G, on a

$$\overline{IA'}^2 + \overline{IB'}^2 + \overline{IC'}^2 = \frac{7r^2 + 4Rr}{2}.$$

(Jorge F. D'Avillez.)

Soient α, β, γ les points de contact du cercle I avec les côtés BC, CA, AB; le triangle rectangle $IA'\alpha$ donne

$$\overline{IA'}^2 = \overline{I\alpha}^2 + \overline{\alpha A'}^2 = r^2 + \tfrac{1}{4}(b-c)^2.$$

Donc

$$\overline{\Sigma IA'}^2 = 3r^2 + \frac{\Sigma a^2 - \Sigma bc}{2} = 3r^2 + \frac{4p^2 - 3\Sigma bc}{2}.$$

Or

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)p-c)}{p} = \frac{p^3 - p^2\Sigma a + p\Sigma bc - abc}{p} = -p^2 + \Sigma bc - 4Rr;$$

tirons de là Σbc et substituons la valeur dans l'expression de $\overline{\Sigma IA'}^2$.

Si $GI = r$, on a $4r^2 = p^2 - 16Rr$,....

875. Construire par points l'hyperbole équilatère circonscrite à un quadrilatère ABCD. (E. N. Barisien.)

On détermine les orthocentres H_1, H_2, H_3, H_4 des triangles ABC, ACD, BAD, BCD qui sont des points de la courbe. Puis on construit les orthocentres des triangles tels que H_1AD, H_1CD, H_2AC, H_2BC, etc., et en continuant de même on obtient des points de l'hyperbole équilatère, en nombre indéfini.

876. Soient OM et OP les rayons vecteurs centraux d'une ellipse et de sa podaire du centre, ayant même direction. Démontrer que

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{\overline{OM}^2} = \frac{\overline{OP}^2}{a^2b^2}.$$ (E. N. Barisien.)

Les équations polaires de l'ellipse et de sa podaire centrale sont

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\mathrm{O} + b^2\cos^2\mathrm{O}}, \quad \mathrm{R}^2 = a^2\cos^2\mathrm{O} + b^2\sin^2\mathrm{O}.$$

Or, $r = \mathrm{OM}$, $\mathrm{R} = \mathrm{OP}$. En éliminant θ entre ces deux équations, on trouve la relation demandée. (E. N. B.).

QUESTIONS PROPOSÉES.

1201. Un angle de grandeur constante tourne autour de son sommet qui reste fixe. Il est coupé par une droite, de direction constante également, de façon à donner un triangle de périmètre constant ou de surface constante. Trouver le lieu du centre du cercle circonscrit. (Soons.)

1202. On considère le triangle ayant pour sommets les deux foyers F et F′ d'une ellipse et un point M variable de l'ellipse. Le lieu des pieds des bissectrices intérieure et extérieure situés sur les côtés MF et MF′ se compose de deux coniques. (E. N. Barisien.)

1203. Démontrer algébriquement la relation suivante :

$$(2n+1)\left\{C_{2n+1}^{n} - \frac{1}{3}C_{2n+1}^{n-1} + \frac{1}{5}C_{2n+1}^{n-2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{0}\right\}$$
$$= 8n\left\{C_{2n-1}^{n-1} - \frac{1}{3}C_{2n-1}^{n-2} + \frac{1}{5}C_{2n-1}^{n-3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}C_{2n-1}^{0}\right\},$$

où $C_p^r = C_p^{p-r}$ désigne le nombre des combinaisons de p objets pris r à r.

×**1204.** Construire une courbe rationnelle du troisième degré, étant donnés trois points collinéaires, avec leurs tangentes et le point double. (V. Retali.)

×**1205.** Démontrer que l'expression

$$x(y-z)^{6n+1} + y(z-x)^{6n+1} + z(x-y)^{6n+1}$$

est divisible par

$$(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2 - xy - yz - zx).$$

Chercher le quotient, quand $n = 1$. (Mathews.)

1206. Chercher le lieu du pied de la normale menée du point O à une conique qui touche les côtés d'un angle MON, aux points donnés M et N. (Lemoine.)

Rectification. *Mathesis*, (2), VIII, question 1199, lire *différence des cotangentes* au lieu de *cotangent de différences*.

PROBLÈMES DE CONSTRUCTION;

par M. Stuyvaert (Gand).

1. Nous nous appuierons, pour résoudre divers problèmes relatifs aux tangentes et aux cercles de courbure, sur les propositions suivantes :

1° les courbes polaires de même ordre d'un point par rapport aux courbes d'un faisceau forment un autre faisceau projectif au premier; de plus la droite polaire d'un point d'une courbe est la tangente en ce point; — 2° la courbure en un point d'une courbe algébrique d'ordre n vaut $n-1$ fois la courbure de la conique polaire du point considéré(*).

La question, pour le centre de courbure, est ainsi ramenée à la construction de la conique polaire d'un point, et à la recherche de la courbure dans les coniques; cette dernière question est bien connue.

2. Cissoïde. On donne le point de rebroussement, la tangente en ce point et l'asymptote. L'équation est

$$y^2(a-x)=x^3.$$

La courbe fait partie du faisceau déterminé par les deux courbes

$$y^2(a-x)=0 \quad \text{et} \quad x^3=0.$$

La première se compose de l'axe des x compté double et de l'asymptote. La droite polaire d'un point M de la cissoïde relativement à ce système passe par le point A ($x=a$, $y=0$) et, pour achever de la déterminer, on mène l'ordonnée MP rencontrant en X la droite polaire inconnue; on a

$$\frac{3}{MX}=\frac{2}{MP}+\frac{1}{M\infty},$$

ou

$$MX=\frac{3}{2}MP;$$

relativement au système $y^2(a-x)$, le point M a pour droite polaire AX;

(*) Ce dernier théorème a été démontré par M. Servais (B. B. 1891, n° 3) et par M. Demoulin (*Mémoires* in-8° de l'Académie royale de Belgique, t. XLV), mais pour une cubique seulement; nous en avons donné une troisième démonstration (*Ibid.*, t. LV). M. Servais nous fait remarquer que la proposition appartient à M. Moutard (voir N. A. M. 1860, p. 195).

relativement au système x^3, il a pour droite polaire l'axe des y; si ce dernier rencontre AX en R, MR est la tangente en M à la cissoïde.

On pourrait considérer la courbe comme appartenant à un faisceau dont feraient partie les systèmes $y^2a = 0$ et $x(x^2 + y^2) = 0$; on est alors conduit à une autre construction moins simple.

Quant à la conique polaire de M par rapport à la cissoïde, on en connaît déjà deux points et les tangentes en ces points, savoir M et le point de rebroussement; il suffit d'en connaître encore un point Z, par exemple sur MP. L'axe des x étant un axe de symétrie, MP rencontre la cissoïde en M', symétrique de M, et à l'infini, donc

$$\frac{2}{MZ} = \frac{1}{MM'} + \frac{1}{M\infty};$$

d'où

$$MZ = 2MM' = 4MP.$$

Le problème est donc résolu.

3. Strophoïde. On donne le point double O et le sommet S; on sait que les tangentes au nœud sont inclinées à 45° sur l'axe. Le mode habituel de génération donne immédiatement des couples de points M, M' de la courbe alignés sur S.

La conique polaire de M passe par O, et sa tangente en O est la conjuguée harmonique de OM, relativement aux tangentes au nœud de la strophoïde. Cette conique passe encore par le point X obtenu en prenant, sur l'ordonnée MP, une distance MX = 4MP; le raisonnement est le même que pour la cissoïde. Enfin le conjugué harmonique de M sur SM' appartient aussi à la conique polaire de M, et achève de la déterminer. On peut donc construire la tangente et le rayon de courbure en M.

4. Quartiques trinodales spéciales. Dans certaines questions(*) on est amené à considérer des courbes du quatrième ordre ayant trois points doubles A, B, C et touchant la droite de l'infini aux deux points cycliques. Ces courbes forment un faisceau auquel appartiennent, d'abord le système Σ composé des trois côtés du triangle ABC avec la droite de l'infini; ensuite le cercle circonscrit à ABC, dont tous les points comptent comme points doubles; appelons ce second système Σ'.

(*) Voir *Mathesis*, 1897, p. 83.

Un point M détermine une des courbes du faisceau ; ce point ne peut être ni à l'infini, ni sur la circonférence circonscrite.

La droite polaire de M par rapport au système Σ se détermine sans peine, grâce au théorème de Cotes ; la droite polaire de M relativement au système Σ′ n'est autre que la polaire de M par rapport au cercle ABC ; le point de rencontre T de ces deux droites est sur la tangente en M à la quartique.

Menons la droite MA qui rencontre la circonférence en D et le côté BC en E ; soient N le symétrique de D par rapport à E, P et P′ les points où AM rencontre les droites polaires de N relativement aux systèmes respectifs Σ et Σ′. On a, en vertu du théorème de Cotes,

$$\frac{4}{NP}=\frac{2}{NA}+\frac{1}{NE}+\frac{1}{N\infty}\qquad\frac{4}{NP'}=\frac{2}{NA}+\frac{2}{ND}.$$

Comme ND = 2NE, NP = NP′, les points P et P′ coïncident ; et la droite polaire de N relative à la quartique (Q), que détermine le point M, passe par ce même point P facile à construire, puisqu'il est le conjugué harmonique de N sur AD.

Soit R le quatrième point inconnu où NA rencontre (Q) ; on a

$$\frac{4}{NP}=\frac{2}{NA}+\frac{1}{NM}+\frac{1}{NR},$$

d'où, par comparaison avec l'égalité précédente,

$$\frac{2}{ND}=\frac{1}{NM}+\frac{1}{NR}.$$

R est donc le conjugué harmonique de M sur ND. Soit enfin X le point où MA rencontre la conique polaire de M relative à (Q) ; on a

$$\frac{3}{MX}=\frac{2}{MA}+\frac{1}{MR},$$

ce qui permet de déterminer ce point X ; répétant cette opération avec les deux autres sommets B et C, on obtient en tout trois points X, X_1, X_2 de la conique polaire de M ; mais on connaît déjà le point M de cette conique et la tangente en ce point. On a donc les éléments suffisants pour construire le rayon de courbure de la quartique (Q).

5. Cubiques en général. La courbe étant donnée par neuf points, on sait trouver sa troisième intersection avec la droite joignant deux des points donnés ; on sait aussi mener la tangente en un de ces points.

Joignons le point donné M à un autre de ces points, A par exemple, et déterminons la troisième intersection A′ de la courbe avec MA. Le conjugué harmonique de M sur AA′ est sur la conique polaire de M; en répétant la construction avec deux autres points B et C, on trouve deux nouveaux points de la conique polaire; et comme cette conique passe par M, et que l'on peut mener sa tangente en M, elle est entièrement déterminée. On peut donc construire le cercle osculateur à la cubique.

×QUESTIONS D'ARITHMOLOGIE,

par M. G. de Rocquigny d'Adanson.

1. Soit

$$A = n^2 + (n+1)^2;$$

A est la somme de deux nombres entiers consécutifs dont le plus grand est la somme de deux triangulaires. Car

$$A = (n^2 + n) + (n^2 + n + 1),$$

$$n^2 + n + 1 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

2. Soit

$$B = \tfrac{1}{2}(2n-2)(2n-1) + \tfrac{1}{2}(2n-1)\,2n;$$

B est la somme de deux nombres entiers consécutifs dont le plus grand est la somme de deux carrés. En effet,

$$B = (2n^2 - 2n) + (2n^2 - 2n + 1) \text{ et } 2n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 + n^2.$$

3. Soit

$$N = (a^3 + ab)^3 + (a^2 - ab)^3 + (a^2 - b^2)^3 + (b^2)^3;$$

mettre N sous la forme d'une somme de trois nombres triangulaires. On a

$$N = \frac{(a^3 - ab^2)(a^3 - ab^2 + 1)}{2} + \frac{(a^3 + 2ab^2)(a^3 + 2ab^2 + 1)}{2}$$

$$+ \frac{(2a^3 + ab^2)(2a^3 + ab^2 - 1)}{2}.$$

Si $a = 2$, $b = 1$, par exemple :

$$N = 6^3 + 2^3 + 3^3 + 1^3 = 21 + 153 + 78.$$

4. La somme des carrés de deux triangulaires consécutifs de parités

différentes est divisible par la somme de ces deux triangulaires. Exemples :

$$3^3 + 6^3 \text{ est divisible par } 3 + 6,$$

$$10^3 + 15^3 \text{ est divisible par } 10 + 15, \text{ etc.}$$

5. Le nombre $(a^2 + b^2)^{2^n}$ est la somme de trois carrés, si l'on a $n > 1$. On a, en effet,

$$(a^2 + b^2)^{2^n} - (a^2 - b^2)^{2^n} = 4a^2b^2[(a^2 + b^2)^2 + (a^2 - b^2)^2] \times$$

$$[(a^2 + b^2)^4 + (a^2 - b^2)^4] \ldots [(a^2 + b^2)^{2^{n-1}} + (a^2 - b^2)^{2^{n-1}}]$$

et le second membre est évidemment une somme de 2 carrés.

6. Toute puissance sixième d'un nombre entier quelconque est la somme d'un cube, d'un carré et d'un triangulaire :

$$n^6 = (n^2 - 1)^3 + (n^3 - 1)^2 + n^2(2n^2 - 1).$$

Soit $n = 2$; on a $2^6 = 27 + 9 + 28$.

7. La somme des nombres entiers :

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, 2n - 1, 2n,$$

et des nombres pairs qui les suivent :

$$2n + 2, 2n + 4, 2n + 6, \ldots\ldots, 2(n^2 - 1),$$

est égale à un bicarré. Ainsi,

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = 3^4.$$

8. On sait que, par définition, le nombre polygonal de m côtés et de rang n est la somme des n premiers termes d'une progression arithmétique de raison $m - 2$ et commençant par l'unité.

Voici une autre définition des nombres polygonaux qui est peut-être nouvelle :

Le nombre triangulaire de rang n peut être considéré comme la somme des n termes consécutifs d'une progression arithmétique de raison -1 et commençant par n.

Le nombre carré de rang n peut également être considéré comme la somme des n termes consécutifs d'une progression arithmétique de raison 0 et commençant par n.

Le nombre pentagonal de rang n est aussi la somme des n termes consécutifs d'une progression arithmétique de raison 1 et commençant par n; et ainsi de suite.

Nous pouvons généraliser et dire que le nombre polygonal de m côtés et de rang n est la somme des n termes consécutifs d'une progression arithmétique de raison $m-4$ et commençant par n.

9. Tout nombre polygonal d'un nombre *impair* de côtés et de rang n est la somme de n nombres entiers consécutifs.

On a, en effet, pour le nombre $(2m+1)$.gonal de rang n,

$$\frac{(2m-1)n^2-(2m-3)n}{2}=\frac{(m.n-m+1)(m.n-m+2)}{2}$$

$$-\frac{(m.n-m-n+1)(m.n-m-n+2)}{2}.$$

10. Tout nombre polygonal d'un nombre *pairement pair* de côtés et de rang n est la somme de n impairs consécutifs.

On a, en effet, pour le nombre $4m$.gonal de rang n,

$$(2m-1)n^2-(2m-2)n=[m.n-(m-1)]^2-[(m-1)n-(m-1)]^2.$$

11. Tout nombre polygonal d'un nombre *pairement impair* de côtés et de rang n est la somme de n nombres pairs (ou impairs) consécutifs, suivant que n est pair (ou impair).

On a, en effet, pour le nombre $(4m+2)$.gonal de rang n,

$$2m.n^2-(2m-1)n=\frac{[(2m-1)n-(2m-2)+(2m+1)n-2m]n}{2}.$$

12. La somme des carrés entiers de rangs n et $n+1$ est égale au triangulaire de rang $(n-1)$ augmenté du pentagonal de rang $(n+1)$

$$n^2+(n+1)^2=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{3(n+1)^2-(n+1)}{2}.$$

Soit $n=2$:

$$2^2+3^2=4+9=1+12.$$

13. La somme de $4(2n-1)$ nombres entiers consécutifs n'est jamais une puissance exacte.

14. Tout cube pair est la somme algébrique de deux carrés et de deux bicarrés :

$$(2n)^3=(n-2)^2-(n+2)^2+(n+1)^4-(n-1)^4.$$

Exemple :

$$6^3=1-25+356-16.$$

15. Soient $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ quatre termes consécutifs d'une progression arithmétique quelconque et

$$S = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta$$

la somme de leurs produits 2 à 2. On a les deux théorèmes :

1° $S + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ est un carré;

2° $S + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ est un carré.

En prenant

$$\alpha = a - r, \quad \beta = a, \quad \gamma = a + r, \quad \delta = a + 2r,$$

on trouve pour le premier carré, $(3a+r)^2$; et pour le second, $(3a+2r)^2$.

16. Les $3n$ premiers nombres pairs forment une somme algébrique de quatre cubes

$$3n(3n+1) = n^3 - (n+1)^3 + (2n+1)^3 - (2n)^3.$$

Soit $n = 1$:

$$3.4 = 1 - 8 + 27 - 8.$$

SUR LA FORMULE DU BINÔME;

par M. Godefroid, bibliothécaire de la Faculté des sciences de Marseille.

L'une des méthodes les plus simples (*) pour établir la formule du binôme est celle qui a été signalée par Catalan dans son *Traité élémentaire des séries* pp. 99-100, et dans les *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1874, (2), XIII, pp. 59-60. Elle consiste à considérer *à priori* la série entière :

$$y = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n + \ldots$$

dont le rayon de convergence est l'unité; si l'on prend sa dérivée on voit qu'elle vérifie la relation

$$y'(1+x) = my,$$

ou,

$$\frac{y'}{y} = \frac{m}{1+x};$$

(*) Elle suppose toutefois connue la théorie de la dérivation des séries entières, ce qui est moins élémentaire peut être que l'emploi de la formule de Mac Laurin. (P.M.)

de là, Catalan déduit,

$$\log y = m \log (1 + x),$$

et

$$y = (1 + x)^m.$$

Cette manière de procéder présente l'inconvénient de faire intervenir les logarithmes dans une question purement algébrique. On peut éviter leur introduction de la façon suivante : Si l'on pose

$$z = (1 + x)^m,$$

on trouve,

$$z' (1 + x) = mz ;$$

par suite,

$$yz' - zy' = 0 ;$$

si l'on divise par y^2, il résulte de là, en désignant par C une constante arbitraire

$$z = Cy.$$

Quand x s'annule, les deux fonctions z et y se réduisent à l'unité, C est donc égale à l'unité et l'on a, pour toute valeur de x comprise entre -1 et $+1$, et pour toute valeur rationnelle de m,

$$(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} x^n + \cdots$$

On examine ensuite le cas de $x = \pm 1$, en appliquant la règle de Gauss(*).

Notice historique et bibliographique sur la formule du binôme. — La formule du binôme pour l'exposant entier est due à H. Briggs(**), on la trouve dans son *Arithmetica logarithmica* publiée à Londres en 1624; Newton, dans une lettre adressée à Collins et datée du 13 juin 1676, indique que la même loi s'applique aux puissances fractionnaires et

---

(*) On peut aussi traiter ces cas directement sans recourir à cette règle. Voir notre *Résumé du Cours d'Analyse de l'université de Gand*, n° 263 pp. 157-158. (P. M).

(**) Si nos souvenirs sont exacts, la loi des coefficients du binôme quand l'exposant est entier positif, était connue avant Briggs, de Stifel, par exemple. Le vrai binôme, celui qu'il était difficile de trouver, c'est le développement en série et celui-là appartient bien à Newton. (P. M.).

négatives; le 24 octobre de la même année, à la suite d'une demande d'explications formulée par Leibniz, Newton écrit à Oldenburg qu'il a été amené à ce résultat par la considération des quadratures de Wallis, mais il ne fait pas connaître de méthode rigoureuse pour y parvenir. La première, suivant Terquem, aurait été donnée par Euler(*). On voit, d'après ce qui précède, que la découverte de la formule du binôme ne revient pas tout entière à Newton; cependant à sa mort, cette formule désormais fameuse fut gravée sur le tombeau qu'on lui éleva dans l'abbaye de Westminster (Voir TERQUEM, N.A.M., 1847, (1), VI, p. 85-91; CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, t. 3, p. 65-68. — Les deux lettres de Newton sont reproduites dans le *Commercium epistolicum*).

La démonstration la plus commune de la formule du binôme, dans le cas où l'exposant est entier, est celle que l'on déduit de la théorie des combinaisons; on peut utiliser aussi la méthode des coefficients indéterminés (Voir ROCHE, N. A. M., 1842, (1) I, 42-43 et 118-119; G. DE LONGCHAMPS, *Algèbre*, p. 6-8; ED. LUCAS, *Théorie des Nombres*, t. I, p. 183).

Lorsque l'exposant est un nombre rationnel quelconque, on se sert ordinairement de la formule de Mac Laurin; cependant l'emploi des dérivées n'est pas indispensable (Voir C. O. RODRIGUES, *Liouville*, 1838, (1), III, p. 550-551); mais les procédés les plus généraux, puisqu'ils conviennent même au cas où l'exposant est irrationnel, sont celui qui a été indiqué par Cauchy dans son *Cours d'analyse de l'école royale polytechnique* (*Œuvres complètes*, 2e série, t. 3, p. 141-142 et 146-147) et celui d'Abel, dans son mémoire intitulé *Recherches sur la série*

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots$$

(*Œuvres complètes*, éd. L. Sylow et S. Lie, t. I, pp. 223 et suivantes). Ce dernier procédé est une conséquence directe de la multiplication des séries (Voir C. E. PRUVOST et D. PIERON, *Leçons d'algèbre*, première partie, p. 330-332 et p. 376-378) (**).

(*) Nous croyons que c'est Cauchy qui, le premier, a démontré la formule du binôme en toute rigueur. (P. M.).

(**) Le procédé d'Abel s'applique même au cas où l'exposant est imaginaire. On peut étendre aussi le procédé de Cauchy à ce cas. (P. M.).

NOTES MATHÉMATIQUES.

1. *Généralisation de la question* 789 (Voir *Mathesis*, (2) VIII, p. 253). Si des sommets A, B, C d'un triangle comme centres, avec un même rayon p, on décrit des arcs de cercle qui coupent respectivement en D et E les côtés de l'angle CAB, en F et G les côtés de l'angle ABC, en H et K les côtés de l'angle BCA, les droites DE, FG, HK forment un triangle A'B'C'.

1. Les triangles A'B'C', ABC sont homologiques. En effet, on obtient l'équation de la droite DE en coordonnées normales, en exprimant que la somme algébrique des distances d'un point quelconque de DE aux droites AC, AB est égale à la distance de E à AB. On trouve ainsi

$$p \sin A\,(a\alpha + b\beta + c\gamma) = 2T\,(\beta + \gamma),$$

ou en remplaçant $2T$ par $bc \sin A$:

$$\frac{pa\alpha}{(p-b)(p-c)} + \frac{b\beta}{p-b} + \frac{c\gamma}{p-c} = 0. \qquad (1)$$

Par analogie, les équations de FG, HK sont

$$\frac{a\alpha}{p-a} + \frac{pb\beta}{(p-a)(p-c)} + \frac{c\gamma}{p-c} = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{a\alpha}{p-a} + \frac{b\beta}{p-b} + \frac{pc\gamma}{(p-a)(p-b)} = 0. \qquad (3)$$

En retranchant (2) de (3), (3) de (1), (1) de (2), on obtient les équations des droites AA', BB', CC' ;

$$b\beta\,[p\,(c+a-b) - ca] = c\gamma\,[p\,(a+b-c) - ab], \text{ etc.}$$

On en conclut que ces droites se coupent en un point V dont les coordonnées sont inversement proportionnelles aux quantités suivantes (coordonnées d'un point de la droite OI) :

$$ap\,(b+c-a) - abc, \quad bp\,(c+a-b) - abc, \quad cp\,(a+b-c) - abc$$

ou $$2pr\cos^2\tfrac{1}{2}A - T, \quad 2pr\cos^2\tfrac{1}{2}B - T, \quad 2pr\cos^2\tfrac{1}{2}C - T. \qquad (4)$$

2. Cherchons le lieu décrit par V lorsque p varie. A cet effet, égalons les expressions (4) à $\frac{\mu}{x}, \frac{\mu}{y}, \frac{\mu}{z}$, où x, y, z représentent les coordonnées de V ; μ désigne un facteur de proportionnalité. Entre les trois égalités ainsi obtenues, on peut éliminer les variables p et μ, ce qui donne

$$(\cos B - \cos C)\,yz + (\cos C - \cos A)\,zx + (\cos A - \cos B)\,xy = 0.$$

Cette équation est vérifiée par les valeurs $(1, 1, 1), \left(\frac{1}{\cos A}, \frac{1}{\cos B}, \frac{1}{\cos C}\right)$; donc le lieu de V est une hyperbole équilatère passant par les sommets A, B, C et par le centre du cercle inscrit au triangle fondamental.

Cette courbe est la transformée par points inverses de la droite joignant les centres des cercles inscrit et circonscrit.

3. Des équations (1), (2), (3) on déduit facilement l'équation de l'axe d'homologie des triangles ABC, A'B'C' :

$$\frac{a\alpha}{p-a}+\frac{b\beta}{p-b}+\frac{c\gamma}{p-c}=0,$$

ou
$$p^2\Sigma a\alpha-\Sigma a(b+c)\alpha+abc\,\Sigma\alpha=0.$$

L'enveloppe de cet axe a pour équation

$$\Sigma^2 a(b+c)\alpha-abc\,\Sigma\alpha\,\Sigma a\alpha=0.$$

C'est donc une parabole dont un diamètre a pour équation $\Sigma a(b+c)\alpha=0$; la tangente à l'extrémité de ce diamètre est la droite $\Sigma\alpha=0$, qui passe par les pieds des bissectrices extérieures du triangle ABC.

4. Soient I_a, I_b, I_c les centres des cercles exinscrits au triangle A B C. Le triangle A'B'C' est homothétique au triangle $I_a I_b I_c$; les droites I_aA', I_bB', I_cC', médianes des triangles I_aBC, I_bCA, I_cAB concourent au point de Lemoine U du triangle $I_aI_bI_c$.

Appelons a_1, b_1, c_1, T_1 les côtés du triangle $I_aI_bI_c$, dont ABC est le triangle orthique. Le rayon du cercle circonscrit et les angles étant égaux à 2R, $\frac{1}{2}(\pi-A)$, etc., on a

$$a_1=4R\cos\tfrac{1}{2}A,\ \text{etc.},\quad T_1=8R^2\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C.$$

Par suite, pour calculer les éléments du triangle A'B'C', il suffit de connaître encore le rapport de similitude des triangles A'B'C', $I_aI_bI_c$, ou celui des distances de U à deux côtés homologues B'C', I_bI_c.

D'après un théorème connu, la distance de U à I_bI_c est égale à

$$\frac{2T_1a_1}{a_1^2+b_1^2+c_1^2}=4R\frac{\cos^2\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\cos^2\frac{1}{2}A+\cos^2\frac{1}{2}B+\cos^2\frac{1}{2}C};$$

celle de A à B'C' a pour expression $p\cos\frac{1}{2}A$.

Donc le rapport cherché a pour valeur

$$1-\frac{p}{4R}\frac{\cos^2\frac{1}{2}A+\cos^2\frac{1}{2}B+\cos^2\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}.$$

5. Les enveloppes des droites EG, .. FK, ... ont déjà été traitées (Voir *Mathesis*, (1) VII, 265; X, 30). Nous allons étudier le triangle A''B''C'' formé par les droites FK, HE, DG.

Des équations (1), (2), (3) on déduit facilement celles des côtés du triangle A''B''C'' :

$$\frac{a(p-b)(p-c)}{p}\alpha + b(p-b)\beta + c(p-c)\gamma = 0,$$

$$a(p-a)\alpha + \frac{b(p-c)(p-a)}{p}\beta + c(p-c)\gamma = 0,$$

$$a(p-a)\alpha + b(p-b)\beta + \frac{c(p-a)(p-b)}{p}\gamma = 0.$$

En les combinant par soustraction deux à deux, on trouve les équations des droites AA'', BB'', CC''; ces lignes coïncident avec AA', BB', CC'.

L'axe d'homologie des triangles ABC, A''B''C'' a pour équation

$$a(p-a)\alpha + b(p-b)\beta + c(p-c)\gamma = 0$$

ou
$$p(a\alpha + b\beta + c\gamma) - (a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma) = 0:$$

on voit qu'il est constamment parallèle à la droite $a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma = 0$.

6. Nous avons supposé p quelconque. Si l'on prend pour p le demi-périmètre du triangle ABC on retrouve les formules de la question 789.

(A. C.)

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1043.

(Voir *Mathesis* (2), VI, p. 31).

Chercher le lieu du foyer d'une parabole touchant en un point fixe A *une circonférence et passant par les extrémités* B *et* C *d'un diamètre variable de cette circonférence, et le lieu du point de rencontre de l'axe de la parabole avec la droite* AC. (E. N. Barisien.)

Solution par MM. A. Droz Farny, Buysens, Stuyvaert, Déprez et Hacken. 1° Soit O le centre du cercle donné; on sait que le barycentre des quatre points d'intersection d'un cercle et d'une parabole se trouve toujours sur l'axe de la parabole. Or O est le barycentre des points B et C; et le barycentre des points O et A chacun doublement compté est le point

G, milieu de OA. Il en résulte que les axes de nos paraboles passent tous par le point G.

Les paraboles du système ont, avec le cercle, la normale OA et la tangente t en A en commun. Menons par G une droite quelconque qui coupe t en L, et considérons-la comme l'axe d'une des paraboles. Son foyer sera, d'après un théorème connu, au milieu F de GL. Le lieu des foyers est donc *une droite parallèle à la tangente t menée par le milieu de* GA.

2° Pour une position donnée de BC, on aura les axes des deux paraboles possibles en menant par G, d'après un théorème connu, les droites GE et GD parallèles aux bissectrices des angles formés par BC et t; soient D et E les points où elles rencontrent BC. Menons GI parallèle à t et coupant BC en I.

Les angles IEG et IGE étant égaux ainsi que IGD et IDG, on a IE=IG = ID. Le lieu cherché est donc une strophoïde de sommet O; G est son point double et t son asymptote.

Remarques (dues à M. Déprez). Toutes les paraboles considérées touchent une droite fixe At au même point A, et leurs axes passent par un point fixe G de la normale AO. De là on déduit facilement les lieux de points remarquables et les enveloppes de droites remarquables de ces courbes.

1° Menons par G une droite quelconque qui coupe At en L, et considérons-la comme axe d'une parabole π du système. Le foyer F de π étant au milieu de GL, le milieu M de AL appartient à la tangente au sommet, et le sommet S est la projection de M sur GL. Or, si I est le milieu de AG, MI est parallèle à LG et par suite perpendiculaire à MS. Il résulte de là que *la tangente au sommet de* π *enveloppe une parabole* π' *ayant pour foyer* I, *pour sommet le point* A.

2° *Le sommet* S *de* π *décrit la podaire de* G *par rapport à la parabole* π'.

3° Soit Q le symétrique de F par rapport à At; ce point décrit une droite h symétrique de FI par rapport à At. La droite AQ étant parallèle à GL, *la directrice de* π (qui passe par Q et est perpendiculaire à GL) *enveloppe une parabole* π'' *ayant pour foyer* A, *pour tangente au sommet la droite h.*

4° *Le pied de la directrice de* π *parcourt la podaire de* G *par rapport à la parabole* π''.

5° Soient D, E les extrémités du diamètre du cercle perpendiculaire à BC. Les axes des deux paraboles qui passent par B et C et touchent Af en A sont parallèles aux bissectrices AD, AE des angles formés par les cordes AB, AC. Il suit de là que AD, par exemple, est le diamètre passant par A. Le diamètre conjugué à la corde BC étant parallèle à AD, passe par le milieu R de la corde AE. Les points R et A étant symétriques par rapport à l'axe mené par G parallèlement à AD, R appartient à la parabole considérée. Si l'on prolonge OR de RU = OR, U sera le pôle de la corde BC. Or AU = AO ; donc U décrit une circonférence de centre A et de rayon AO.

Question 1054.

(Voir *Mathesis*, (2) V. p. 32).

Trouver le lieu des centres des coniques passant par trois points donnés A, B, C ***et ayant leurs axes parallèles à deux directions rectangulaires données.***

Solution analytique par MM. Boutin, Barisien, Déprez, Colart. Prenons pour axes coordonnés deux droites parallèles aux directions données. Si X, Y désignent les coordonnées du centre de l'une des coniques considérées, cette courbe a pour équation

$$\lambda\,(x-X)^2+\mu\,(y-Y)^2=1.$$

Exprimons qu'elle passe par les points donnés A (x_1,y_1), B (x_2,y_2), C (x_3,y_3) et éliminons λ, μ entre les équations de condition ; il vient

$$\begin{vmatrix} (x_1-X)^2 & (y_1-Y)^2 & 1 \\ (x_2-X)^2 & (y_2-Y)^2 & 1 \\ (x_3-X)^2 & (y_3-Y)^2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

ou, après des simplifications faciles,

$$\begin{vmatrix} x_1^2-2x_1X & y_1^2-2y_1Y & 1 \\ x_2^2-2x_2X & y_2^2-2y_2Y & 1 \\ x_3^2-2x_3X & y_3^2-2y_3Y & 1 \end{vmatrix}=0,$$

ou enfin

$$4XY\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}-2X\begin{vmatrix} x_1 & y_1^2 & 1 \end{vmatrix}-2Y\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Le lieu est donc une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux directions données.

Solution géométrique par MM. MANDART, DROZ et DÉPREZ. Soit D le point où la circonférence circonscrite au triangle ABC coupe l'une des coniques considérées. D'après un théorème connu, les cordes AD et BC ont des directions symétriques par rapport à un axe de la conique. Le point D est donc fixe et les centres des courbes ont pour lieu la conique des neuf points du quadrilatère ABCD.

REMARQUE. Les foyers et les sommets des coniques considérées décrivent des cubiques. (COLART, DÉPREZ).

Question 1055.

(Voir *Mathesis*, (2), VI, p. 32).

La podaire de la Kreuzcurve

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{k^2} \qquad (a)$$

par rapport à son centre est une courbe fermée dont l'aire est égale à $3\pi k^2$.

(E. N. BARISIEN).

Solution par M. V. CRISTESCO. Plus généralement, cherchons la podaire de la courbe représentée par l'équation :

$$\left(\frac{a}{x}\right)^n+\left(\frac{b}{y}\right)^n=1, \qquad (1)$$

par rapport à l'origine des coordonnées.

Les coordonnées (α, β) d'un point de la podaire, correspondant au point (x, y) de la courbe, satisfont aux équations :

$$\frac{a^n\alpha}{x^{n+1}}+\frac{b^n\beta}{y^{n+1}}=1, \qquad \frac{a^n}{\alpha x^{n+1}}-\frac{b^n}{\beta y^{n+1}}=0. \qquad (2)$$

Si l'on élimine x, y entre les équations (1) et (2) on trouve :

$$(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{n}{n+1}}=(a\alpha)^{\frac{n}{n+1}}+(b\beta)^{\frac{n}{n+1}}. \qquad (3)$$

Par suite, si l'on fait dans l'équation (3) $n=2$ et $a=b=k$, on trouve pour la podaire de la *kreuzcurve* (a)

$$(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{2}{3}}=k^2(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}). \qquad (4)$$

En coordonnées polaires, l'équation de cette courbe est

$$\rho^2 = k^2(\sqrt[3]{\sin^2\varphi} + \sqrt[3]{\cos^2\varphi})^3. \tag{5}$$

Son aire sera donc

$$A = 2k^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sqrt[3]{\cos^2\varphi} + \sqrt[3]{\sin^2\varphi})^3 d\varphi. \tag{6}$$

Or, on sait que pour n entier, positif et impair, on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sqrt[n]{\cos^2\varphi} + \sqrt[n]{\sin^2\varphi})^n d\varphi = 2^{n-2}.\pi \sum_{p=0}^{p=n-1} \left(\cos\frac{2p+1}{2n}\pi\right)^{n-1} \sin\frac{2p+1}{2n}\pi.$$

Pour $n = 3$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt[3]{\cos^2\varphi} + \sqrt[3]{\sin^2\varphi})^3 d\varphi = \frac{3\pi}{2},$$

et, par suite,

$$A = 3\pi k^2.$$

Solution par M. Krahé (Madrid). L'équation (4) montre que la podaire de la kreuzcurve (*a*) est la transformée par rayons vecteurs réciproques de l'hypocycloïde à quatre rebroussements

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}, \quad \text{ou} \quad \rho^{\frac{2}{3}} = \frac{k^{\frac{2}{3}}}{\cos^{\frac{2}{3}}\varphi + \sin^{\frac{2}{3}}\varphi}.$$

La formule (5) donne

$$A = 2k^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} [\cos^2\varphi + 3\cos^{\frac{4}{3}}\varphi \sin^{\frac{2}{3}}\varphi + 3\cos^{\frac{2}{3}}\varphi \sin^{\frac{4}{3}}\varphi + \sin^2\varphi] d\varphi$$

$$= \pi k^2 + 12k^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{\frac{2}{3}}\varphi \sin^{\frac{4}{3}}\varphi d\varphi,$$

car le changement de φ en $\frac{1}{2}\pi - \varphi$ fait voir que

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{\frac{4}{3}}\varphi \sin^{\frac{2}{3}}\varphi d\varphi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{\frac{4}{3}}\varphi \cos^{\frac{2}{3}}\varphi d\varphi.$$

Posons maintenant $\operatorname{tg}\varphi = z^3$; il vient d'abord

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{\frac{2}{3}}\varphi \sin^{\frac{4}{3}}\varphi d\varphi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\varphi \operatorname{tg}^{\frac{4}{3}}\varphi d\varphi = 3\int_0^{\infty} \frac{z^6 dz}{(1+z^6)^2}$$

$$= 3\int_0^{\infty} z \frac{z^5 dz}{(1+z^6)^2} = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} z d\frac{1}{1+z^6},$$

puis, intégrant par parties,

$$\left[-\frac{z}{2(1+z^6)}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{dz}{1+z^6}.$$

Par suite,

$$A = \pi k^2 + 6k^2 \int_0^{\infty} \frac{dz}{1+z^6};$$

en appliquant la formule connue

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n} = \frac{1}{n \sin\frac{m\pi}{n}},$$

pour $m = 1$, $n = 6$, on trouve

$$A = \pi k^2 + 6k^2 . \frac{1}{6\sin\frac{\pi}{6}} = 3\pi k^2.$$

Solution par M. Colart (Huy). La substitution $\cot\varphi = z^3$ donne

$$\frac{1}{2}\rho^2 d\varphi = -\frac{3}{2}k^2 z^2 (1+z^3)^{\frac{1}{3}} (1+z^6)^{-2} dz = -\frac{3k^2}{2}\frac{(z^4+z^2)\,dz}{(z^4-z^2+1)^2};$$

en décomposant la fraction rationnelle, on trouve

$$\frac{1}{2}\rho^2 d\varphi = -\frac{3k^2}{8\sqrt{3}}\left[\frac{z}{(z^2-z\sqrt{3}+1)^2} - \frac{z}{(z^2+z\sqrt{3}+1)^2}\right]dz.$$

Faisons encore $z - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}u$; nous aurons

$$\int \frac{z\,dz}{(z^2-z\sqrt{3}+1)^2} = \int \frac{4u\,du}{(u^2+1)^2} + 4\sqrt{3}\int \frac{du}{(u^2+1)^2}$$

$$= -\frac{2}{1+u^2} + \frac{2\sqrt{3}\,u}{1+u^2} + 2\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg} u$$

$$= \frac{z\sqrt{3}-2}{z^2-z\sqrt{3}+1} + 2\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}(2z-\sqrt{3}).$$

Par analogie

$$\int \frac{z\,dz}{(z^2+z\sqrt{3}+1)^2} = -\frac{z\sqrt{3}+2}{z^2+z\sqrt{3}+1} - 2\operatorname{arc\,tg}(2z+\sqrt{3}).$$

Par conséquent

$$A = \frac{3k^2}{4}\left[\frac{z(z^2-1)}{z^4-z^2+1} + \operatorname{arc\,tg}(2z-\sqrt{3}) + \operatorname{arc\,tg}(2z+\sqrt{3})\right]_0^{\infty} = 3\pi k^2.$$

Si les coordonnées d'un point de la circonférence $x^2+y^2=k^2$ sont $x=k\cos\varphi$, $y=k\sin\varphi$, celles du point correspondant de la kreuzcurve sont

$$x=\frac{k}{\cos\varphi},\quad y=\frac{k}{\sin\varphi};$$

et celles du point correspondant de la podaire,

$$x=\frac{k\cos^5\varphi}{\sin^6\varphi+\cos^6\varphi}=\frac{k\cos^5\varphi}{1-3\sin^2\varphi\cos^2\varphi},$$

$$y=\frac{k\sin^5\varphi}{\sin^6\varphi+\cos^6\varphi}=\frac{k\sin^5\varphi}{1-3\sin^2\varphi\cos^2\varphi}.$$

×Question 1165.

(Voir *Mathesis*, (2) VIII, p. 104).

Soient AB *un diamètre fixe d'un cercle de centre* O *et* M *un point variable de la circonférence. Démontrer que les centres de similitude des cercles circonscrits aux triangles* OAM *et* OBM *se trouvent sur deux droites. — Généraliser en remplaçant* AB *par une corde fixe du cercle donné.*

(E. N. Barisien).

Solution par MM. Soons et Déprez. Considérons le cas général, O étant toujours le centre du cercle. Les centres A', B' des cercles circonscrits aux triangles isoscèles OAM, OBM sont à l'intersection de la perpendiculaire au milieu N de OM, avec les perpendiculaires aux milieux des rayons OA, OB, ou avec les bissectrices des angles AOM, BOM. Le centre de similitude interne S divise A'B' dans le rapport des rayons A'O, B'O; donc OS est la bissectrice de l'angle A'OB'.

Soit T le point où la bissectrice intérieure de l'angle AOB coupe A'B'. La droite OS est la bissectrice de l'angle TON; en effet, les droites ON, OT, OS sont parallèles au rayon MO, à la hauteur issue de M et à la bissectrice de l'angle AMB du triangle AMB. Il résulte de là qu'en proje-

tant S en S′ sur OT, on a SN = SS′, OS′ = ON. Donc le lieu de S est une parallèle à AB menée par le milieu du rayon perpendiculaire à AB.

Raisonnement analogue pour le centre de similitude externe.

Autres solutions par MM. François (La Haye) et Colart (Huy). M. Colart généralise la question en considérant les triangles AOM, BOM où O désigne le milieu de la corde AB.

Voici comment il démontre que le lieu de S est encore une parallèle à AB. Représentons par α, β, σ les perpendiculaires $A'A_1$, $B'B_1$, SS_1 abaissées sur AB, par r, r' les rayons OA′, OB′, par λ, μ les angles AMO, OMB. Une formule connue donne

$$\sigma = \frac{\alpha r' + \beta r}{r + r'};$$

des triangles rectangles $A_1A'O$, B_1OB, on déduit (AB = 4m) :

$$\alpha = m \cot \lambda, \quad r = \frac{m}{\sin \lambda}, \quad \beta = m \cot \mu, \quad r' = \frac{m}{\sin \mu}.$$

En substituant on trouve $\sigma = m \cot \frac{1}{2}(\lambda + \mu) = m \cot \frac{1}{2}$ AMB.

Solution analogue par M. Brocard.

Solution par M. Ripert. On démontre aisément que, AB étant l'axe des x et l'équation du cercle O étant $x^2 + y^2 = a^2$, le lieu se compose des deux droites $y = \pm \frac{1}{2} a$, parallèles à AB et passant par les milieux des rayons perpendiculaires à l'axe des x.

On peut imaginer une généralisation de la question plus complète que celle qui est demandée. En effet, les centres de similitude de deux cercles (passant par les points cycliques I_1 et I_2) sont les points communs à deux tangentes communes et à la ligne des centres (pôles de la droite i de l'infini). On démontre (ce qui est évident par homographie) que, si deux coniques ont deux points communs (réels ou imaginaires) N_1 et N_2, déterminant une corde commune n, il y a, sur la ligne des pôles de n, deux points d'intersection de deux tangentes communes; j'appellerai ces points (pour les dénommer) *centres de quasi-similitude*. Ceci posé, le théorème ci-dessus est un cas particulier du suivant :

Soient une conique C, *passant par* N_1, N_2, *et par rapport à laquelle le pôle de* N_1N_2 *ou* n *est* O, AB *une corde fixe passant par* O *et* M *un point variable de* C. *Le lieu des centres de quasi-similitude des coniques* (OAMN$_1$N$_2$) *et* (OBMN$_1$N$_2$) *se compose de deux droites coupant la ligne des pôles de* n *par rapport à ces coniques au conjugué harmonique de* O *par rapport au couple* (A, B) *et passant par les conjugués harmoniques du point d'intersection avec* n *de la polaire conjuguée* d *de* AB (*passant par* O)

par rapport aux couples (O, E) et (O, E'), E *et* E' *étant les points d'intersection de d avec la conique* C.

Corrélativement, si deux coniques ont deux tangentes communes (réelles ou imaginaires) n_1, n_2 dont le point commun est N, il passe, par le point d'intersection des polaires de N, deux droites de jonction de points communs aux deux coniques et que l'on peut appeler *droites de quasi-similitude*.

Le théorème corrélatif est alors : *Soient une conique* C, *tangente à* n_1, n_2 *et par rapport à laquelle la polaire de* n_1n_2 *ou* N *est* O, *a et b un couple de tangentes issues d'un point fixe* (*ab*) *de* O *et m une tangente variable à* C. *L'enveloppe des quasi-droites de similitude des coniques* (O, *a*, *m*, n_1, n_2), (O, *b*, *m*, n_1, n_2) *se réduit à deux points, en ligne droite avec le point d'intersection des polaires de* N *par rapport à ces coniques, la droite de jonction étant conjuguée harmonique de* O *par rapport au couple* (*a*, *b*), *et situés sur les conjugués harmoniques de la droite de jonction de* N *au pôle conjugué* D *de ab* (*situé sur o*) *par rapport aux couples* (*o*, *e*), (*o*, *e'*), *e et e' étant les tangentes menées de* D *à la conique* C(*).

×Question 1171.

(Voir *Mathesis*, (2) VIII, p. 128).

Si l'angle A *d'un triangle sphérique* ABC *est égal à 120°, la longueur de la bissectrice* AD *de l'angle est donnée par*

$$\cot d = \cot b + \cot c. \qquad \text{(J. Déprez).}$$

Solution par M. Emmerich. Supposons, pour généraliser, un triangle sphérique quelconque. On a

$$\cos b = \cos d \cos \mathrm{CD} + \sin d \sin \mathrm{CD} \cos \mathrm{ADC},$$

$$\cos c = \cos d \cos \mathrm{BD} - \sin d \sin \mathrm{BD} \cos \mathrm{ADC}.$$

Je divise les équations par sin CD, sin BD et j'ajoute :

$$\frac{\cos b}{\sin \mathrm{CD}} + \frac{\cos c}{\sin \mathrm{BD}} = \cos d \left(\frac{\cos \mathrm{CD}}{\sin \mathrm{CD}} + \frac{\cos \mathrm{BD}}{\sin \mathrm{BD}} \right)$$

(*) Les centres de quasi-similitude sont les centres d'homologie, les droites de quasi-similitude, les axes d'homologie. (Cl. S.)

comme sin BD : sin CD = sin c : sin b, on peut écrire :

$$\cot b + \cot c = \cos d\left(\frac{\cos \mathrm{CD}}{\sin b} + \frac{\cos \mathrm{BD}}{\sin c}\right).$$

Or $$\cos \mathrm{BD} = \cos c \cos d + \sin c \sin d \cos \frac{\mathrm{A}}{2},$$

$$\cos \mathrm{CD} = \cos b \cos d + \sin b \sin d \cos \frac{\mathrm{A}}{2}.$$

Il vient donc

$$\cot b + \cot c =$$

$$\cos d\left(\cos d \cot b + \sin d \cos \frac{\mathrm{A}}{2} + \cos d \cot c + \sin d \cos \frac{\mathrm{A}}{2}\right),$$

$$(1 - \cos^2 d)(\cot b + \cot c) = \sin d \cos d \cos \frac{\mathrm{A}}{2},$$

donc enfin

$$\cot b + \cot c = \cot d \cos \frac{\mathrm{A}}{2}.$$

MM. Soons et Droz ont résolu la même question.

Question 1172.

(Voir *Mathesis*, (2), VIII, p. 128.)

On donne, sur une même droite Ox, *les points* A, A′, B, B′. *Une parabole donnée* P *se meut de manière qu'elle passe constamment par* O *et que son axe reste parallèle à* Oy.

Soient M, M′ *les extrémités des diamètres de* P *menés par* A, A′. *Les droites* MB, M′B′ *se coupent en un point* N. *Trouver le lieu décrit par* N *et chercher les conditions nécessaires pour que ce lieu soit égal à une parabole donnée* P′. (Petit-Bois).

Solution par M, Ripert. Soient a, a', b, b' les abscisses respectives de A, A′, B, B′ et $x^2 = 2\lambda x + 2py$ l'équation de la parabole P (de paramètre constant).

On trouve aisément, pour les équations de MB et M′B′,

$$a(a-2\lambda)(x-b) - 2p(x-b)y = 0, \quad a'(a'-2\lambda)(x-b') - 2p(a'-b')y = 0.$$

L'équation du lieu N est, par suite,

$$x^2 - \frac{2p(ab'-ba')}{aa'(a-a')}xy - (b+b')x - 2p\frac{aa'(b-b') - bb'(a-a')}{aa'(a-a')}y + bb' = 0.$$

C'est en général une hyperbole, passant par B, B′ et ayant Oy pour direction asymptotique.

Elle devient parabole si l'on a $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} = \rho$, et est égale à une parabole donnée P′ de paramètre $2p'$ si ρ satisfait à la relation :

$$\rho(1-\rho) = \frac{p'}{p}.$$

Remarque. Une parabole P est une conique tangente à la droite i de l'infini en un point donné I. Deux paraboles P_1 et P_2 sont homothétiques si leurs points communs sont le point double I et deux points fixes O et O′. Elles sont égales si elles n'ont qu'un point fixe O commun, le point I devenant triple. On peut exprimer ce fait en disant que P se meut en restant osculatrice(*) à elle même en I sur la tangente i.

On aperçoit alors le théorème suivant : « *On donne un triangle* XOY *et quatre points* A, A′, B, B′ *sur le côté* OX. *Une conique* P, *passant constamment par* O, *se meut en restant osculatrice à elle-même en* Y *sur la tangente* XY. *Soient* M *et* M′ *les extrémités des cordes* YA *et* YA′. *Les droites* MB *et* M′B′ *se coupent en un point* N *dont le lieu est une conique passant par* B, B′, Y. *La tangente en* Y *est* XY *si les rapports anharmoniques* (OBAX) *et* (OB′A′X) *sont égaux* (à un nombre ρ) ».

Solution analytique analogue par MM. Soons, Déprez et Barisien.

Solution géométrique par M. R. Buysens. On voit d'abord aisément que le lieu des sommets des paraboles (P) est une parabole (P_1) égale à (P), ayant son sommet en O et tournée en sens inverse de (P). Un point S de la parabole (P_1) fixe donc une position de la parabole mobile. En appelant Y le point à l'infini de Oy et appliquant le théorème de Pascal à l'hexagone SSOYYM inscrit dans (P), on obtient la construction suivante du point M : SO rencontre AM en C qu'on projette parallèlement à Ox en D sur Oy; SD passe par M.

La ponctuelle (D) étant projective à la ponctuelle du second ordre (S), SD enveloppe une courbe de troisième classe; mais il est aisé de

(*) *Osculatrice* signifie ici, *abusivement*, ayant un contact du second ordre (*Red.*)

voir que les points O et Y font partie de cette enveloppe; par suite SD décrit un faisceau de rayons projectif à O (S); son centre n'est autre que le point A_2 symétrique par rapport à Oy du point A_1 où la droite AM rencontre la parabole (P_1).

Les ponctuelles (M) et (M') sont donc projectives et de plus perspectives, car le point commun de leurs supports est à lui-même son correspondant; le centre de perspectivité est d'ailleurs le point E de Oy où se croisent les droites $A_2A'_1$, $A_1A'_2$.

Enfin, les faisceaux B (M) et B' (M) étant projectifs, le point N décrit une conique contenant le point Y; on remarquera que les points B et B' ne sont pas nécessairement alignés sur O. Cette conique passe par les points F et G où BE et B'E rencontrent respectivement A'M' et AM. Dès lors les diamètres AM et A'M' étant fixes ainsi que le point B, on pourra faire passer par les points B et F une parabole égale à la parabole donnée (P') et dont l'axe soit parallèle à Oy; elle coupera en G le diamètre AM et sera coupée en B' par la droite GE.

QUESTIONS D'EXAMEN.

877. Dans un triangle ABC rectangle en A, on connaît l'hypoténuse a et la longueur d de la bissectrice BD de l'angle B. Calculer les côtés de l'angle droit. Discussion. (*Bacc. Lettres-math.*, Paris, 1898).

Equations du problème :

$$b^2 + c^2 = a^2,\ c^2 + \frac{b^2 c^2}{(c+a)^2} = d^2;$$

l'élimination de b^2 donne

$$2ac^2 - d^2c - ad^2 = 0.$$

La racine positive de cette équation convient au problème pourvu qu'on ait $d < a$. L'angle B résulte de

$$c = d\cos\frac{B}{2} = a\cos B.$$

878. Démontrer les identités

$$\Sigma \sin^2 a \sin(b-c) = 3\sin a \sin b \sin c \sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b),$$
$$\Sigma \cos^2 a \sin(b-c) = 3\cos a \cos b \cos c \sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b).$$

La première a déjà été démontrée dans *Mathesis*. La 2e s'en déduit en remplaçant a, b, c par $90^\circ - a$, $90^\circ - b$, $90^\circ - c$.

879. Trouver les projections d'un triangle, connaissant: l'orthocentre H, le centre de gravité G, un plan P qui contient le sommet A, un

plan Q contenant BC qui est parallèle à une droite donnée dans ce plan, et la grandeur de BC. (Soons).

Le plan mené par H perpendiculairement à BC contient A. Du point G on abaisse une perpendiculaire sur Q et on la prolonge au delà de G d'une longueur double, le plan parallèle à Q mené par le point obtenu contient aussi A, qui est dès lors déterminé. L'intersection de AG avec le plan Q donne le point milieu de BC.

880. Chercher les limites des racines de l'équation

$$(a-3)x^2-(5a+1)x+6a+5=0$$

lorsque a croît indéfiniment.

On écrit

$$\left(1-\frac{3}{a}\right)x^2-\left(5+\frac{1}{a}\right)x+6+\frac{5}{a}=0,$$

puis l'on fait $a=\infty$, et on résout l'équation ainsi obtenue $x^2-5x+6=0$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1207. Démontrer la relation

$$\sum_{p=0}^{p=i}(-1)^p 2^p C_{2n-p,\,n} C_{i,\,p} =$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}i}\frac{1.3.5\ldots(i-1)\times 1.3.5\ldots(2n-i-1)}{1.2.3\ldots n},$$

si i est un nombre pair. Si i est impair, la somme indiquée est nulle.

(Beaupain).

1208. Si une tangente mobile AB à une parabole glisse entre deux tangentes fixes OA, OB, le cercle des neuf points du triangle OAB ainsi formé enveloppe une conique. (G. Gérard).

1209. Étant donnés dans un plan un point O, deux droites m, n et une conique C^2 passant par les deux points O et (m, n), l'on prend sur un rayon variable issu de O et coupant C^2 en un second point P, le point P′ harmoniquement séparé de P par les droites m et n : trouver le lieu de P′. Cas particulier dans lequel les droites m et n sont isotropes.

(V. Retali).

1210. Une droite AB de longueur variable s'appuie par ses extrémités A et B sur deux droites fixes Ox et Oy, de façon que le triangle AOB ait une surface constante.

Trouver le lieu du centre des symédianes du triangle OAB ; lorsque l'angle xOy est droit, ce lieu est une lemniscate de Bernoulli.

(E. N. Barisien.)

*CONSTRUCTIONS SPHÉRIQUES A LA RÈGLE ET AU COMPAS;

par M. E. Barbarin, professeur au Lycée de Bordeaux.

Dans les trois géométries riemannienne, euclidienne, lobatchefskienne, un grand cercle sphérique est à la fois une section plane, et le lieu des points équidistants (rectilignement ou sphériquement) de deux points donnés de la sphère; ceci permet de construire sur le plan un grand cercle égal, et, prenant la corde du quadrant comme base invariable, de tracer effectivement, sur la sphère solide donnée, tous les grands cercles que l'on voudra. Ce procédé devient inapplicable quand la sphère dépasse certaines dimensions; je me propose de montrer que sur de grandes surfaces, et en particulier sur le plan riemannien, on peut employer la règle et le compas pour les tracés élémentaires, ce qui permettra ensuite de déterminer telle fraction qu'on voudra de leur paramètre, et par conséquent de construire exactement l'unité métrique de longueur.

I.

Constructions relatives aux quadrilatères et aux triangles.

J'appelle *règle plate sphérique* une portion de la surface sphérique où j'opère, ayant la forme d'un quadrilatère équiangle allongé. Sa vérification se fait à la manière ordinaire, par *glissement* et non *par retournement*.

Si on imagine sur la sphère proposée un triangle ABC birectangle en B et C, et si on désigne par Δ le quart de la circonférence d'un grand cercle, on a la proportion

$$A : 1 \text{ droit} = BC : \Delta;$$

donc, en choisissant convenablement les unités,

$$\text{mes. } A = \text{mes. } BC.$$

Je conviendrai d'écrire cette égalité sous la forme conventionnelle :

$$A = \Phi(BC).$$

Si, étant donné l'un de ses termes, A ou BC, je sais construire l'autre, la détermination du paramètre est résolue.

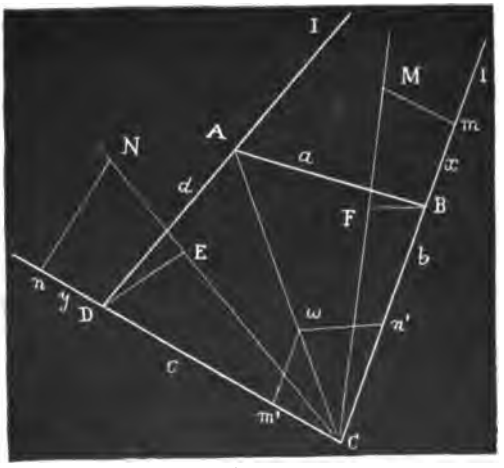


Fig. 1.

Soit (fig. 1) le quadrilatère sphérique ABCD où B,C,D sont des angles droits, et A un angle obtus; je désigne ses côtés successifs comme il suit :

$$AB = a,\ BC = b,$$
$$CD = c,\ DA = d.$$

AD et BC prolongés se couperaient au point I sous un angle $\gamma = \Phi(c)$, et, par suite, le triangle rectangle ABI donnerait

$$\cos d = \frac{\sin a}{\sin \gamma} = \frac{\cos b}{\sin A},$$

$$\sin d = \cos a \sin b, \quad \operatorname{tg} d = \operatorname{tg} b \cos \gamma$$

et, en construisant le triangle rectangle CDE où CD est l'hypoténuse, et $CE = a$,

$$\sin EDC = \frac{\sin a}{\sin c} = \cos \delta, \quad \cos ECD = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c} = \cos \beta;$$

donc

$$EDA = \delta = \Phi(d), \quad ECD = \beta = \Phi(b).$$

Le triangle CBF disposé de même façon donne

$$ABF = \alpha = \Phi(a), \quad BCF = \gamma = \Phi(c).$$

Deux formules sont encore utiles ; le triangle ABI donne

$$\operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} d = -\cos A$$

et, si on tire la diagonale AC,

$$\operatorname{tg} ACD = \frac{\cos ACB}{\cos ACD} = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \gamma}.$$

Voici maintenant les principales constructions qui peuvent s'effectuer.

I. *Construire un quadrilatère trirectangle* ABCD, *connaissant deux côtés consécutifs perpendiculaires* AB, BC, *ou* BC, CD (Tracé évident).

APPLICATION. *Etant donnée la longueur* BC $= b$, *construire* $\Phi(b)$. On prend CD arbitraire.

II. *Construire un quadrilatère trirectangle* ABCD, *connaissant* CD $= c$ *et* $\beta = \Phi(b)$. On construit d'abord auxiliairement $\Phi(c)$ ou γ; puis on trace un angle droit xCy, on prend sur Cy la longueur CD $= c$, et on mène les droites CM, CN telles que MC$x = \gamma$ et NC$y = \beta$; soient prises à volonté sur Cx et Cy les longueurs égales Cm, Cn, on mène mM, nN perpendiculaires respectives sur les côtés de l'angle droit jusqu'à leurs intersections M,N avec CM et CN, puis on reporte sur Cy la longueur Cm' égale à mM; sur Cx, Cn' égale à nN; enfin les perpendiculaires élevées à Cx en n' et à Cy en m' se coupent au point ω; la ligne Cω a la direction même de CA; le point A est donc à l'intersection de Cω avec la perpendiculaire élevée sur Cy en D; il ne reste plus qu'à tirer AB perpendiculaire sur Cx.

Cette construction résulte immédiatement de ce que

$$\operatorname{tg} \mathrm{ACD} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\operatorname{tg} n\mathrm{N}}{\operatorname{tg} m\mathrm{M}} = \frac{\operatorname{tg} n'\mathrm{C}}{\operatorname{tg} m'\mathrm{C}} = \frac{\cos \omega \mathrm{C}x}{\cos \omega \mathrm{C}y} = \operatorname{tg} \omega \mathrm{CD}.$$

APPLICATIONS. 1° *Construire* b, *étant donné* $\Phi(b)$. On se donne c arbitrairement. En particulier, si $\Phi(b) = \frac{p}{q}$ droit, on sait que $b = \frac{p}{q}\Delta$, donc inversement $\Delta = \frac{q}{p} b$; l'unité métrique des longueurs comptées sur les arcs de grand cercle (ou sur les droites du plan riemannien) peut donc être exactement connue.

2° *Construire* ABCD, *connaissant* $\Phi(b)$ *et* $\Phi(c)$. On construit d'abord un quadrilatère auxiliaire où le côté c' qui remplace c est pris arbitrairement; il permet de déterminer b, et on est ainsi ramené au problème général.

3° *Construire* ABCD, *connaissant deux côtés opposés* a *et* c. On construit avec ces données le triangle CDE qui donne $\Phi(b)$; donc on connaît c et $\Phi(b)$.

4° *Construire un triangle rectangle* BGF, *connaissant les deux angles non droits* BCF $= \gamma$ *et* CBF $= 1$ *droit* $- \alpha$. Les angles α et γ sont aigus; on construit d'abord a et c (application 1°), on en déduit ABCD (application 3°); il ne reste plus qu'à construire un triangle ayant b pour hypoténuse et un des angles donnés.

III. *Construire un quadrilatère trirectangle* ABCD, *connaissant les deux*

côtés de l'angle obtus a, d. Il s'agit de construire cet angle; pour cela, construisons d'abord $\Phi(a)$ et $\Phi(d)$, puis traçons le triangle rectangle qui a pour angles aigus 1 droit — $\Phi(a)$ et 1 droit — $\Phi(d)$. Soit l son hypoténuse ; construisons alors $\lambda = \Phi(l)$; son supplément est l'angle cherché A.

Application. *Construire un triangle rectangle* CDE, *connaissant un côté* CE $= a$ *et l'angle aigu opposé* CDE $=$ 1 *droit* $- d$. En construisant $\alpha = \Phi(a)$, on est immédiatement ramené à ce qui précède.

IV. *Construire un quadrilatère trirectangle* ABCD, *connaissant l'angle obtus* A *et un de ses côtés a*. La relation entre a et A permet de construire d; mais il y a un moyen plus rapide, c'est de construire c; en effet,

$$\cos c = \cos a \sin A ;$$

il suffit donc de trouver d'abord la longueur auxiliaire a' telle que

$$A - 1 \text{ droit} = \Phi(a') ;$$

le triangle rectangle qui a pour côtés de l'angle droit a et a' a pour hypoténuse c, il est donc égal à CDE, ce qui prouve que DE $=$ BF $= a'$ ou que

$$A - 1 \text{ droit} = \Phi(DE) = \Phi(BF).$$

Application. *Tracer l'arc de grand cercle perpendiculaire à deux arcs de grand cercle* PQ, MN *non sécants*. Prenons sur MN le point quelconque A, et abaissons AB perpendiculaire sur PQ; l'angle MAB est obtus, et la perpendiculaire CD cherchée est le côté opposé à AB, dans le quadrilatère trirectangle ABCD.

Ce qui précède permet d'effectuer à l'aide de la règle et du compas, toutes les constructions élémentaires concernant les triangles; nous nous plaçons, bien entendu, dans l'hypothèse pratique où ces constructions *peuvent réussir*, c'est-à-dire dans celle où l'angle obtus A du quadrilatère trirectangle diffère très peu d'un angle droit. Les longueurs a, b, c, d sont alors de petite dimension. Il convient d'observer néanmoins que nous savons construire ainsi un triangle ayant trois angles donnés, seulement quand il est isoscèle; le cas général nous échappe.

(*A continuer*).

SUR LA TRISECTRICE DE MACLAURIN;

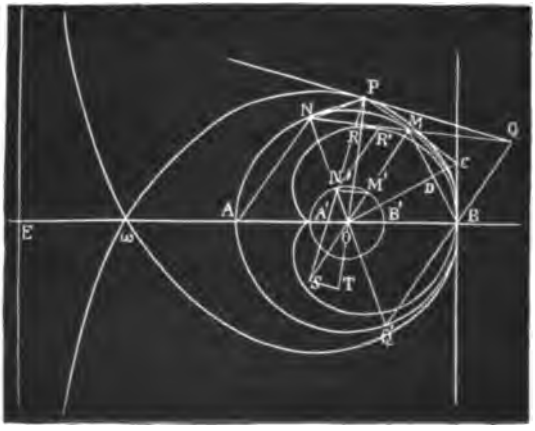
par M. V. Jeřabek.

I. Etant donnée une circonférence (O), si, par le centre O et un point fixe A de cette ligne, on mène deux droites parallèles qui rencontrent la courbe en M et N, les tangentes menées en M et N se coupent en un certain point P : le lieu du point P est la *trisectrice* représentée par l'équation polaire

$$\rho = r \sec \frac{\varphi}{3},$$

où $r = OA$, $\rho = OP$, $\varphi = BOP$. En effet, les angles MOB et NAB étant égaux, l'arc $BM = MN$; donc l'angle $POM = \frac{1}{3} POB$, et l'équation (1) se déduit immédiatement du triangle rectangle MOP.

II. Cherchons la tangente au point P.



Soit C l'intersection des tangentes en B et M. La vitesse du point C sur la droite BC étant représentée par CB, la vitesse de glissement de C sur OC et sa vitesse de circulation autour de O sont égales à la projection CD de CB sur OC et à BD. Comme on a $OP = OC$, la vitesse de glissement de P sur OP est représentée par $PR = CD$ (R est le milieu de NM), et comme l'angle $POB = 3COB$, la vitesse de circulation de P autour de O est égale à 3DB. Donc, si l'on prolonge NM de $MQ = NM$, on a

RQ = 3RM = 3DB, et PR, RQ seront les composantes de la vitesse du point M dirigées suivant PO et suivant une perpendiculaire à PO. Il en résulte que PQ est la tangente cherchée.

Si l'on applique cette construction au cas où les points M et N coïncident avec A et B, le point P est à l'infini, et la tangente en ce point passe par le symétrique E de B par rapport à A ; autrement dit, une asymptote de la trisectrice est la perpendiculaire élevée en E sur AB.

La perpendiculaire au milieu de AO rencontre la circonférence (O) en deux points m, n tels que les droites Am et Bn sont parallèles et que les tangentes en m et n se coupent au milieu ω de AE; ω est donc un point de la trisectrice, et la tangente en ce point passe par le symétrique q de n par rapport à m. En intervertissant les rôles des points m et n on retrouve le même point ω, avec une tangente $\omega q'$ symétrique de ωq par rapport à AB. Donc ω est un point double, avec deux tangentes ωq et $\omega q'$ qui font entre elles un angle 60°.

III. On peut encore obtenir la tangente en P en considérant les vitesses de circulation de P autour des deux points O et M.

Si l'on fait tourner toutes les vitesses de 90° autour de leurs points d'application, on peut représenter la vitesse de circulation de M autour de O par le rayon MO, et, par suite, celle de P autour de O par PT = $\frac{3}{2}$ PO; celle de P autour de M est figurée par PM, car les perpendiculaires OM, MP ont la même vitesse angulaire. Il résulte de la règle du quadrilatère des vitesses que la perpendiculaire élevée en T sur TP coupe MO en un point S appartenant à la normale.

IV. Considérons l'enveloppe de la droite MN. Les vitesses des points M et N sur la circonférence (O) sont dans le rapport 1 : 2; par suite, leurs composantes normales à MN étant dans le même rapport, la droite qui joint les extrémités de ces composantes, passe par le point de MN dénué de vitesse normale, et partage MN dans ce rapport. Il suit de là que, pour le point le contact R′ de MN avec son enveloppe, on a MR′ = $\frac{1}{3}$ R′N = $\frac{1}{3}$ MN.

D'ailleurs, cette enveloppe est la polaire réciproque de la courbe (P) par rapport au cercle O; par suite, R′ est le pôle de PQ et se trouve sur la perpendiculaire abaissée de O sur PQ. R′ étant sur la polaire de Q, la ponctuelle (NMR′Q) est harmonique, et puisque $\frac{QM}{QN} = \frac{1}{2}$, on doit avoir $\frac{R'M}{R'N} = -\frac{1}{2}$.

V. Le lieu (R') est une *cardioïde*. En effet, construisons un cercle de centre O et de rayon $OA' = \frac{1}{2} OA$ et désignons par M' et N' les points où les droites OM, ON rencontrent la nouvelle circonférence. La figure MM'N'R' est un parallélogramme dont le côté N'R' passe par A' et a une longueur $N'R' = A'B'$.

VI. Le milieu R de la corde MN décrit une courbe inverse de la ligne (P), l'équation du lieu (R) est donc

$$\rho = r \cos \frac{\varphi}{3}.$$

On peut démontrer géométriquement que ce lieu est un limaçon de Pascal. En effet, si une circonférence de centre O et de rayon $OA'' = \frac{1}{2} OA$ coupe OM, ON en M'', N'', la figure MM''N''R est un parallélogramme dont le côté RN'' passe par le milieu A'' de OA et est égal à OA''.

VII. Le point Q décrit une cardioïde. Car si Q' est le symétrique de N par rapport à O, le ligne Q'Q passe par B et a une longueur constante AB.

NOTES MATHÉMATIQUES.

2. *Remarques sur le triangle*, par M. L. Ripert. L'hyperbole de Kiepert du triangle ABC $\left[\Sigma \frac{b^2 - c^2}{X} = 0, \text{ en coordonnées barycentriques}\right]$ passe par le centre de gravité du périmètre $(b + c,\ c + a,\ a + b)$; elle coupe l'ellipse de Steiner $\left(\Sigma \frac{1}{X} = 0\right)$ au point remarquable $\left(\frac{1}{b^2 + c^2 - 2a^2}, \text{ etc.}\right)$. Elle est conjuguée par rapport au triangle complémentaire, d'où il résulte que, si un point (α, β, γ) appartient à l'hyperbole, les trois points $(\alpha,\ \alpha - \gamma,\ \alpha - \beta$; etc.) lui appartiennent également.

L'anticomplémentaire de l'hyperbole de Kiepert est l'hyperbole conjuguée $[\Sigma (b^2 - c^2) X^2 = 0]$, ayant son centre au point de Steiner, passant par G, I, ··· et qui est le lieu des points M en ligne droite avec leur réciproque M' et leur inverse M'', en même temps que l'enveloppe

des droites MM'M''. Cette hyperbole passe par tous les points de la famille :

$$X = \pm\sqrt{b^2 + c^2 - \lambda a^2}, \quad Y = \pm\sqrt{c^2 + a^2 - \lambda b^2},$$

$$Z = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - \lambda c^2}.$$

Ce sont en quelque sorte les équations unicursales de la courbe, avec cette particularité (commune à toutes les coniques conjuguées) que, si un point appartient à la courbe, ses trois adjoints lui appartiennent également.

La parabole de Kiepert $[\Sigma\sqrt{(b^2 - c^2)}\,X = 0]$ est corrélative de l'hyperbole de même nom; elle est conjuguée par rapport au triangle anticomplémentaire. Sa complémentaire est la parabole conjuguée $\left[\Sigma\frac{X^2}{b^2 - c^2} = 0\right]$ qui jouit de toutes les propriétés complémentaires de celles de $[\Sigma\sqrt{(b^2 - c^2)}\,X = 0]$ ou corrélatives de celles de $[\Sigma(b^2 - c^2)X^2 = 0]$. Elle est notamment l'enveloppe des droites m concourant au même point que leur réciproque m' et leur inverse m'' et le lieu des points de concours $mm'm''$. Ses équations tangentielles unicursales sont celles ci-dessus, sauf changement de nom des coordonnées.

3. *Sur le parallélipipède.* Soient a, b, c les arêtes d'un parallélipipède. Tout parallélipipède construit sur deux arêtes du premier et une diagonale est équivalent au primitif; tout parallélipipède construit sur une arête et deux diagonales du premier est le double de celui-ci; tout parallélipipède construit sur trois diagonales vaut quatre fois le primitif.

Si l'on considère en outre les diagonales des faces, le parallélipipède primitif est encore équivalent à celui qui serait construit avec : 1° deux arêtes et une diagonale de face; 2° une arête et deux diagonales de faces différentes; 3° une arête, une diagonale de face et une diagonale; 4° une diagonale et deux diagonales de faces différentes; 5° trois diagonales de faces différentes.

Si on fait, dans les 2° et 5°, intervenir deux diagonales d'une même face, le parallélipède obtenu est double du primitif.

On vérifie toutes ces propositions directement, sur la figure, en remarquant que des parallélipèdes de même base et de même hauteur sont équivalents.

On peut aussi employer la notation des vecteurs géométriques; si a,

$\bar{b}$, $\bar{c}$ représentent trois arêtes concourantes d'un parallélipipède, le volume de celui-ci est

$$\bar{a}\,M\,\bar{b}\bar{c} \quad \text{ou} \quad \bar{b}\,M\,\bar{c}\bar{a} \quad \text{ou} \quad \bar{c}\,M\,\bar{a}\bar{b};$$

les diagonales des faces sont

$$\bar{a}+\bar{b},\ \bar{a}-\bar{b},\ \bar{b}+\bar{c},\ \bar{b}-\bar{c},\ \bar{c}+\bar{a},\ \bar{c}-\bar{a};$$

les diagonales du parallélipède primitif sont

$$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c},\ \bar{a}+\bar{b}-\bar{c},\ \bar{a}+\bar{c}-\bar{b},\ \bar{b}+\bar{c}-\bar{a}.$$

Tout volume représenté par $\bar{m}\,M\,\bar{n}\bar{p}$ est nul si deux des lettres m, n, p sont identiques; en appliquant les règles du calcul des vecteurs, on vérifie tous les théorèmes ci-dessus.

Or le volume d'un parallélipipède s'exprime par

$$2\,abc\sqrt{\sin p\,\sin(p-\alpha)\,\sin(p-\beta)\,\sin(p-\gamma)} = 2\,abc\,\sin(a,b,c).$$

En appliquant cette formule à tous les parallélipipèdes de plus haut, on trouve plusieurs relations, parmi lesquelles celles signalées par M. Wasteels (*Mathesis*, avril 1898). (M. Stuyvaert.)

4. *Théorème sur l'hyperbole.* Considérons l'équation d'une conique sous la forme homogène :

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+z(2Dx+2Ey+Fz)=0.$$

Les parallèles menées par l'origine aux asymptotes coupent la courbe sur la droite :

$$2Dx+2Ey+F=0. \qquad (1)$$

La polaire de l'origine étant

$$Dx+Ey+F=0,$$

la droite (1) est parallèle à cette polaire et sa distance à l'origine est la moitié de celle de cette dernière droite.

Comme l'origine est un point quelconque du plan, on peut appliquer cette propriété aux trois sommets d'un triangle autopolaire ABC, et l'on obtient le théorème suivant :

Soient ABC *un triangle*, A'B'C' *le triangle formé par les milieux des côtés; on mène par les sommets* A, B, C *des transversales* AA_1, BB_1, CC_1 et AA_2, BB_2, CC_2 *respectivement parallèles à deux directions données, et*

rencontrant les côtés correspondants du triangle A' B' C' *en* A_1, B_1, C_1 *et* A_2, B_2, C_2. *Démontrer que les six points ainsi obtenus appartiennent à une même hyperbole, dont les asymptotes sont parallèles aux deux directions considérées, et dont* ABC *est un triangle autopolaire.*

Si les deux directions données sont rectangulaires, l'hyperbole obtenue est équilatère. On peut alors ajouter aux 6 points les orthocentres des 20 triangles obtenus en les combinant 3 à 3.

De plus, les cercles des neuf points de ces 20 triangles se coupent en un même point, centre de l'hyperbole en question. (G. Gérard, Liége.)

×**5.** *Formules relatives au triangle.* (Voir *Mathesis*, (2), VI, p. 213). Dans ce qui suit, h_a, h_b, h_c désignent les hauteurs ; h'_a, h'_b, h'_c, les segments de ces hauteurs compris entre l'orthocentre et le sommet correspondant ; h''_a, h''_b, h''_c, les segments entre l'orthocentre et le côté correspondant.

Les formules suivantes, dont quelques-unes sont déjà connues, nous ont été communiquées par M. Delahaye (Roye).

$$2(h_a h'_a + h_b h'_b + h_c h'_c) = a^2 + b^2 + c^2.$$

$$h'_a h''_a = h'_b h''_b = h'_c h''_c.$$

$$h'_b h'_c + h'_c h'_a + h'_a h'_b = 2R\,(h''_a + h''_b + h''_c)$$

$$a^2 + h'^2_a = b^2 + h'^2_b = c^2 + h'^2_c = 4R^2.$$

$$h'^2_a + h'^2_b + h'^2_c = 12R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

$$\frac{a}{h'_a} + \frac{b}{h'_b} + \frac{c}{h'_c} = \frac{abc}{h'_a h'_b h'_c}.$$

$$\frac{h_a^2}{h_b h_c} + \frac{h_b^2}{h_a h_c} + \frac{h_c^2}{h_a h_b} = \frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ab}{c^2}.$$

$$h_a h_b h_c = \frac{a^2 b^2 c^2}{8R^3} = \frac{2S^2}{R} = \frac{2p^2 r^2}{R}.$$

$$h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a = \frac{2p^2 r}{R}.$$

$$\frac{r_a r_b r_c}{h_a h_b h_c} = \frac{R}{2r} = \frac{p^2}{h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a}.$$

$$\frac{h_b h_c}{a r_a} + \frac{h_c h_a}{b r_b} + \frac{h_a h_b}{c r_c} = \frac{p}{R}.$$

$$r^2 = \frac{abc}{(a+b+c)^2}\, h_a\, h_b\, h_c.$$

$$r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = 4R^2 + h_a'^2 + h_b'^2 + h_c'^2.$$

$$h_a' = 2R\cos A = a\cotg A,\quad h_a'' = 2R\cos B\cos C.$$

$$4R\,(h_a\cos A + h_b\cos B + h_c\cos C) = a^2 + b^2 + c^2.$$

$$\frac{h_a - 2r}{h_a} = \frac{h_a}{h_a + 2r_a} = \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

$$4R^2 - [h_a'^2 + h_b'^2 + h_c'^2]\,R - h_a' h_b' h_c' = 0.$$

$$S = \frac{1}{8R}\left[a^2 h_a' \operatorname{coséc} A + b^2 h_b' \operatorname{coséc} B + c^2 h_c' \operatorname{coséc} C\right].$$

BIBLIOGRAPHIE.

Cours de Géométrie élémentaire par AD. MINEUR, Professeur à l'Université libre de Bruxelles. Bruxelles, Stevens, 1898. (In-8°, de 414 p. avec 326 fig. dans le texte). Prix : 6 francs.

Ce Cours est divisé en sept Livres : I. De la droite. II. De la circonférence. III. De la similitude. IV. Des aires. V. Du plan. VI. Des polyèdres. VII. Des trois corps ronds. Un *Appendice* traite du rapport anharmonique, de la division harmonique, des pôles et polaires, des transversales, des triangles homologiques, des théorèmes de Pascal, de Brianchon, de Carnot, etc.; il renferme aussi les problèmes sur la circonférence déterminée par trois conditions, élucide les définitions de la longueur de la circonférence et de l'aire du cercle et démontre le théorème du plus court chemin entre deux points d'une sphère.

L'auteur a largement tenu compte des reproches adressés aux anciens Éléments de Legendre. Ainsi, dans l'Introduction, il explique la mesure des grandeurs; il considère comme *axiomes* les propriétés *essentielles* de la droite et du plan; il démontre immédiatement qu'un plan est déterminé par deux droites qui se coupent. Dans le Livre I, il établit, à l'exemple d'Euclide, que, dans tout triangle, un côté quelconque est moindre que la somme des deux autres; il parle des figures symétriques par rapport à un axe ou à un centre; le groupement des propositions est sensiblement amélioré. La théorie des figures semblables planes est exposée sous une forme plus complète. Des perfectionnements importants sont apportés au Livre V; etc.

Les propositions qui sont regardées comme un complément indispensable des éléments (points et droites remarquables du triangle, cercle des neuf points, calcul des éléments d'un triangle, etc.) sont démontrées dans le corps de l'ouvrage; les exercices proposés, au nombre de 1139, renferment les principales questions de la géométrie récente.

Le Cours de M. Mineur peut soutenir avantageusement la comparaison avec les manuels publiés à l'étranger. On peut le critiquer sur certains points; par exemple, la démonstration des théorèmes où interviennent les incommensurables pourrait être présentée plus rigoureusement. Mais l'ordre des matières, l'amélioration des détails, l'introduction des derniers progrès le recommandent à nos professeurs et aux élèves des classes scientifiques de nos athénées. (J. N.)

Traité de Géométrie par C. GUICHARD, Professeur à l'Université de Clermont. Première partie : Géométrie plane et Géométrie dans l'espace. Paris, Nony et C^ie^, 1899 (In-8° de VII-447 pp.). Prix : 5 francs.

Le présent volume développe le programme de la classe de Mathématiques élémentaires (programme des athénées belges, diminué d'une partie du 7^e^ livre, et augmenté d'une théorie géométrique de l'ellipse, de la parabole et de l'hélice); un second volume contiendra les *compléments* spécialement destinés aux candidats aux Écoles spéciales.

Nous allons signaler rapidement quelques parties par lesquelles cet ouvrage se distingue de la plupart des manuels en usage. Pages 4-6. Notions générales sur la mesure des grandeurs; rapports incommensurables. — Page 24. On démontre que dans tout triangle un côté est moindre que la somme des deux autres. — Pages 27-38. Etude minutieuse des lignes polygonales (ouvertes ou fermées) au point de vue de leur convexité ou concavité. — Page 98. Plus grande commune mesure de deux lignes droites. — Pages 113-118. Problèmes élémentaires et lieux géométriques. — Pages 118-130. Déplacement, dans son plan, d'une figure de forme invariable. Composition de plusieurs déplacements. — Pages 130-134. Symétrie. — Pages 139-143. Il n'existe qu'un seul point qui divise un segment de droite additivement ou soustractivement dans un rapport donné. Division harmonique. — Pages 155-162. Homothétie. Centres d'homothétie de deux circonférences. — Pages 163-169. Polygones semblables. Points homologues. — Page 185. Axes radicaux. — Pages 196-201. Construction des valeurs. — Pages 222-227. Définition de la longueur de la circonférence. — Page 247. Définition de l'aire d'un polygone convexe au moyen du *carrelage*. — Pages 295-297. Définition de l'angle polyèdre. Convexité ou concavité de l'angle polyèdre. — Page 320. Définition du volume d'un polyèdre convexe au moyen de la décomposition en cubes égaux. — Pages 341-346. Déplacements d'une figure de forme invariable. Composition des translations et rotations. — Pages 350-357. Homothétie. Similitude. — Pages 386. Plan radical, axe radical, centre radical.

Chaque Livre est accompagné d'un bon choix d'exercices.

Lehrbuch der Elementar-Geometrie von J. HENRICI, Professor am Gymnasium zu Heidelberg, und P. TREUTLEIN, Director des Realgymnasiums zu Karlsruhe. Erster Teil, Gleichheit der Gebilde in einer Ebene. Abbildung ohne Massänderung. Dritte Auflage, Leipsig, Teubner, 1897. (In-8° de VIII-144 pages avec 198 figures dans le texte). Prix 2 marcs.

Cet ouvrage se distingue des manuels français par l'ordre des matières, les moyens de démonstration et l'introduction de la règle des signes dès le début. A ce titre, nous en recommandons la lecture à nos collègues de l'enseignement moyen.

Les 16 premières pages (chap. I et II) sont consacrées aux notions préliminaires: corps, surface, ligne, point, droite, plan, segment, angle, ponctuelle, faisceau. La droite est une ligne indéfinie qui, de quelque manière qu'on la pose sur deux points fixes, occupe toujours le même lieu. Lorsqu'une droite joint un point fixe A à un point B mobile sur une droite donnée XX', elle tend vers une position limite AI à mesure que B s'éloigne sur XX', AI est dite *parallèle* à XX'. Par A il ne passe qu'une seule parallèle à XX', car il ne passe qu'une seule droite par A et un point déterminé de XX'. Le plan est une surface indéfinie qui, de quelque manière qu'on la pose sur trois points fixes non collinéaires, occupe toujours le même lieu. L'angle est la portion de plan comprise entre deux demi droites issues d'un même point; il est engendré par l'un de ses côtés que l'on fait tourner autour du sommet jusqu'à ce qu'il coïncide avec l'autre côté. Nous citons ces définitions pour faire ressortir le caractère du manuel. Les auteurs parlent déjà dans cette première partie des ponctuelles égales, des faisceaux directement ou inversement égaux.

Les chapitres III, IV, V portent respectivement les titres : rotation, retournement, translation et rotation; ces titres indiquent les moyens de démonstration employés par les auteurs pour établir les propositions concernant deux parallèles coupées par une sécante, le parallélogramme, la somme des angles d'un polygone, la bissectrice d'un angle, le triangle isocèle, la médiatrice d'un segment de droite, les cas d'égalité des triangles. Ces moyens sont aussi employés de préférence dans les chapitres suivants.

Le chapitre VI est consacré à la circonférence : corde et tangente ; angles au centre, inscrit, formé par deux cordes ou par deux sécantes ; position de deux circonférences. Dans le chapitre VII, on trouve les problèmes résolus par la règle, le compas et l'équerre. Les chapitres VIII et IX traitent des n—gones et des n—latères, et enseignent la construction des polygones réguliers. Enfin, le chapitre X renferme des propositions sur les polygones équivalents, le carré de l'hypothénuse, les problèmes sur le partage des figures. Il est suivi d'un grand nombre d'exercices se rapportant aux différents chapitres. (J. N.)

Problèmes de Géométrie élémentaire groupés d'après les méthodes à employer pour leur résolution par I. ALEXANDROFF, Professeur de Mathématiques au lycée de Tambov (Russie). Traduit du russe, sur la 6me édition, par D. AITOFF. Paris, Hermann, 1899 (In-8° de XII-154 pages). Prix : 5 francs.

On connaît l'excellent ouvrage de Petersen : ***Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques avec application à plus de*** 400 ***problèmes*** (Traduction par O. Chemin; Paris, Gauthier-Villars). Le livre de M. Alexandroff suit à peu près le même plan, mais donne un plus grand nombre de problèmes-types et de problèmes proposés. Chaque chapitre débute par un

exposé de la méthode à suivre : lieux géométriques, similitude, constructions inverses, symétrie, translation, rotation(*), inversion, application de l'algèbre à la géométrie. L'auteur donne ensuite un nombre considérable de problèmes résolus complétement, puis énonce des exercices qui peuvent facilement être résolus, si on s'est bien assimilé la marche expliquée dans les problèmes-types. Le livre se termine par des problèmes sur la géométrie de l'espace, des problèmes de construction auxquels on applique la trigonométrie, enfin un chapitre de 160 exercices non classés (problèmes mixtes).

Nous recommandons volontiers l'ouvrage de M. Alexandroff aux professeurs et aux élèves, malgré quelques critiques de détail que nous aurions à faire. (J. N.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1056.

(Voir *Mathesis* (2) VII, p. 56).

Soient A, B, C, D *les sommets consécutifs d'un carré donné. Soit* P *un point tel que la droite de Brocard du triangle* PBD *passe par le pied de la symédiane issue de* P *dans le même triangle. Démontrer que le cercle de Brocard du triangle* PAC *passe par le pied de la bissectrice issue de* P *dans ce dernier triangle, et que le point* P *décrit une ellipse de Cassini, normale en* P *à la symédiane du triangle* PAC. (Déprez.)

Solution par M. A. Droz Farny. Représentons par a, b, c les côtés BD, PD, PB du triangle PBD. La droite de Brocard de ce triangle a pour équation en coordonnées normales

$$(a^4 - b^2c^2)\frac{x}{a} + (b^4 - c^2a^2)\frac{y}{b} + (c^4 - a^2b^2)\frac{z}{c} = 0.$$

Elle passera par le pied de la symédiane issue de P, si son équation est vérifiée par $x = 0$, $\frac{y}{b} = \frac{z}{c}$; il en résulte

$$b^4 + c^4 = a^2(b^2 + c^2). \qquad (1)$$

(*) L'explication de cette méthode (p. 106) laisse un peu à désirer ; la construction du centre de rotation (centre de similitude) aurait dû être indiquée avec plus de détails.

Quelques problèmes sur la similitude inverse auraient pu trouver place dans l'ouvrage.

Représentons de même par a, b', c', les côtés du triangle PAC. Le cercle de Brocard de ce triangle a pour équation

$$a^2yz + b'^2zx + c'^2xy - ab'c'(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Si cette équation est vérifiée par $x = 0$, $y = z$, le cercle de Brocard du triangle PAC passera par le pied de la bissectrice issue de P. On trouve

$$a^2 = 2b'c'. \qquad (2)$$

Prenons maintenant les diagonales du carré, comme axes coordonnés et exprimons les relations (1) et (2) en fonction des coordonnées x et y du point P. Comme on trouve le même résultat en x et y, ces deux relations sont simultanées.

La relation (2) dans laquelle a est une constante, indique que le lieu de P est une cassinienne admettant A et C comme foyers.

Pour construire la normale en P, utilisons la « méthode de Tschirnhausen ». La courbe ayant une équation bipolaire $f(r, r') = 0$, nous portons les longueurs $\frac{df}{dr} = 2r'$, $\frac{df}{dr'} = 2r$, respectivement sur PA et PC. La résultante de ces deux longueurs considérées comme forces concourantes sera la normale cherchée.

Il s'agit donc de porter sur PA une longueur PC′ = PC et sur PC une longueur PA′ = PA ; la résultante passant par le milieu de A′C′ n'est évidemment, le triangle PA′C′ étant le retournement de PAC, rien autre que la symédiane de PAC, issue de P.

Question 1161.

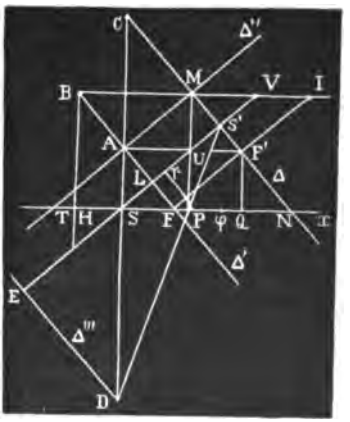
(Voir *Mathesis*, (2) VIII, p. 104).

Si l'on donne le foyer d'une parabole et une normale, le sommet décrit une cissoïde de Dioclès ; si l'on donne le sommet et une normale, le foyer décrit une cissoïdale d'ellipse. (J. Neuberg.)

Solution géométrique. Soient S, F le sommet et le foyer d'une parabole π qui coupe la droite donnée Δ normalement au point M. Supposons que la normale Δ et la tangente en M rencontrent l'axe SF en N et T, et menons l'ordonnée MP ; on sait que

$$SF = \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}PN.$$

1° Si F est donné et M variable sur Δ, projetons F en F′ sur Δ; comme TF = FN, F′ est le milieu de MN et se projette sur l'axe au milieu Q de PN. Le point Q décrit la circonférence de diamètre FF′. Prenons Fφ = SF; puisque FS = QN, S décrit une courbe symétrique par rapport à F de la cissoïde décrite par φ, courbe qui a pour point de rebroussement F et pour asymptote Δ.



(G. Gérard, Déprez, Droz Farny.)

Soit A la projection de F sur MT; comme AS = F′Q, AF′ est parallèle à SF. Or le point A se meut sur une droite Δ, parallèle à Δ; donc *la tangente au sommet de π enveloppe une parabole de foyer* F′ *et de sommet* F. Il résulte de là que S décrit la podaire de F par rapport à cette parabole, donc une cissoïde.

Le diamètre mené par M passe constamment par le symétrique I de F par rapport à Δ, et *la directrice* BH *enveloppe une parabole de sommet* F *et de foyer* I. (J. N.).

2° Si le sommet S est fixe, soit S′ sa projection sur Δ; comme TS = SP, SS′ passe par le milieu U de l'ordonnée MP. Soient C et D les points où la tangente au sommet S est rencontrée par Δ et par S′P; de MU = UP on conclut SC = SD; donc le point D se meut sur la droite Δ''' symétrique de Δ par rapport à S. L'angle DSP étant droit, P décrit une ellipse dont un axe est SS′.

Comme on a SF = $\frac{1}{2}$ PN, F décrit une courbe semblable à la cissoïdale d'ellipse décrite par φ. (G. Gérard.)

Pour trouver le lieu de P, M. Gérard s'appuie sur la proposition suivante, cas particulier du théorème de Newton sur la génération des coniques au moyen de deux angles mobiles: *Étant donnés une droite* Δ''' *et deux points* S, S′ *situés sur une perpendiculaire à* Δ''', *si l'on joint ces points à un point* D *mobile sur* Δ''', *l'intersection de* S′D *avec une perpendiculaire* SP *à* SD *décrit une conique ayant pour sommets* S *et* S′. (J. N.)

Pour trouver le lieu de P, il suffit d'observer que tg PSS′. tg SS′P est constant. Or, le quadrilatère SPS′M étant inscriptible (les angles SPM,

SS'M sont droits), on a : $\operatorname{tg} SS'P = \operatorname{tg} SMP = \frac{SP}{PM}$. On a aussi $\operatorname{tg} PSS' = \frac{PU}{SP} = \frac{PM}{2SP}$; donc $\operatorname{tg} SS'P . \operatorname{tg} PSS' = \frac{1}{2}$. (Déprez.)

S étant le milieu de TP, la perpendiculaire SS' à Δ passe au milieu U de l'ordonnée PM et rencontre le diamètre BM de la parabole en un point V tel que SU = UV. Donc si l'on prend sur SS' un point quelconque U et qu'on prolonge SU de UV = SU, la circonférence décrite sur UV comme diamètre rencontre Δ en un point M, qui est le point d'incidence de Δ pour une parabole ayant pour sommet S, pour ordonnée correspondante MP = 2MU. Or, $\overline{MS'}^2 = US'.S'V$, et si l'on mène P*p* perpendiculaire à SS', on a MS' = P*p*, US' = $\frac{1}{2}$ *p*S', S'U = S*p* ; donc $\overline{Pp}^2 = \frac{1}{2} Sp . S'p$, ce qui prouve que P décrit une ellipse ayant pour sommets S, S' et pour axes SS', $\frac{SS'}{\sqrt{2}}$. (Droz Farny.)

Solution en coordonnées polaires, par M. Barisien. 1° En prenant pour pôle le foyer F, pour axe polaire la perpendiculaire FF' abaissée sur Δ, et en désignant par r, θ les coordonnées de S, l'égalité SF = $\frac{1}{2}$ PN donne immédiatement

$$r = \frac{1}{2} PN = \frac{1}{2} MN \sin\theta = F'N \sin\theta = FF' \sin\theta \operatorname{tg}\theta = \frac{a \sin^2\theta}{\cos\theta}.$$

2° Prenons pour pôle S, pour axe polaire la perpendiculaire SS' abaissée sur Δ ; r et θ désignant les coordonnées de F, on trouve successivement

$$r = SF = \tfrac{1}{2} PN = \tfrac{1}{2} MN \sin\theta = F'N \sin\theta = FF' \sin\theta \operatorname{tg}\theta$$
$$= (SS' - SL) \sin\theta \operatorname{tg}\theta = (b - r\cos\theta) \sin\theta \operatorname{tg}\theta ;$$

d'où

$$r = \frac{b \sin^2\theta}{\cos\theta (1 + \sin^2\theta)} = \frac{b \sin^2\theta}{\cos\theta (2\sin^2\theta + \cos^2\theta)}, \qquad (1)$$

et, en coordonnées cartésiennes,

$$y^2 = \frac{x^3}{a - 2x} = \frac{x^3}{2(\frac{1}{2}a - x)}. \qquad (2)$$

Si l'on écrit l'équation (1) ainsi

$$r = \frac{b}{2\cos\theta} - \frac{b\cos\theta}{2(2\sin^2\theta + \cos^2\theta)},$$

on voit aisément que la courbe (F) est une cissoïdale de l'ellipse

$$r = \frac{b\cos\theta}{2(\cos^2\theta + 2\sin^2\theta)}, \quad x^2 + 2y^2 - \frac{1}{2}ax = 0.$$

La forme (2) montre que la même courbe se déduit de la cissoïde de Dioclès

$$y^2 = \frac{x^3}{\frac{1}{2}a - x}$$

en réduisant les ordonnées de celle-ci dans le rapport $1 : \sqrt{2}$.

Solution analogue par MM. Soons et Déprez.

Solution en coordonnées rectangulaires par M. Audibert. 1° L'origine étant en F, l'équation de la parabole est $y^2 = 2px + p^2$. Si l'on fait tourner les axes d'un angle α jusqu'à ce que l'axe des y devienne parallèle à Δ, l'équation précédente devient

$$f(x,y) = (x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2 - 2p(x\cos\alpha - y\sin\alpha) - p^2 = 0, \quad (1)$$

et les coordonnées de S seront maintenant

$$x = -\frac{p}{2}\cos\alpha, \quad y = \frac{p}{2}\sin\alpha. \quad (2)$$

Posons $FF' = a$. La tangente au point M de la courbe doit être parallèle à l'axe des abscisses ; donc on doit avoir

$$\tfrac{1}{2}f'_x \equiv (x\sin\alpha + y\cos\alpha)\sin\alpha - p\cos\alpha = 0, \text{ pour } x = a.$$

Les coordonnées de M sont donc

$$x = a, \quad y = \frac{p\cos\alpha - x\sin^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}.$$

Introduisant ces valeurs dans (1) on obtient

$$\frac{p}{\sin^2\alpha} - \frac{2a}{\cos\alpha} = 0. \quad (3)$$

L'élimination de α et p entre (2) et (3) donne

$$y^2(x+a) + x^3 = 0.$$

2° Si l'on donne S, on part de l'équation $y^2 = 2px$ et, par des calculs analogues aux précédents, on arrive à l'équation du lieu des foyers

$$x^2 = y^2(a - 2x).$$

Autre solution analytique par M. Andrien.

×Question 1186.

(Voir *Mathesis* (2), VIII, p. 216).

L'angle A *du triangle* ABC *est fixe, et la somme (différence) des côtés* AB, AC *est constante. Démontrer que la droite d'Euler* HO *passe par un point fixe de la bissectrice intérieure (extérieure) de l'angle* A. *Si l'angle* A *est de* 120° (60°), *la droite* HO *est parallèle à la bissectrice de l'angle* A.

(Soons).

Solution par M. A. Droz-Farny. La bissectrice intérieure de l'angle A coupant HO en I, on sait que les angles BAC et HAO admettent la même bissectrice et que l'angle $HAI = \frac{1}{2}(B - C)$.

Comme $AH = 2R\cos A$ et $AO = R$, on trouve, en appliquant la formule de la longueur de la bissectrice,

$$l_a = \frac{2bc\cos\frac{1}{2}A}{(b+c)},$$

au triangle AHO,

$$AI = \frac{4R\cos A\cos\frac{1}{2}(B-C)}{1+2\cos A} = \frac{2a\cos A\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin A\,(1+2\cos A)}.$$

Or,

$$a : b+c = \sin\tfrac{1}{2}A : \cos\tfrac{1}{2}(B-C);$$

donc

$$AI = \frac{2(b+c)\sin\frac{1}{2}A\cos A}{\sin A\,(1+2\cos A)} = \frac{(b+c)\cos A}{\cos\frac{1}{2}A.\,(1+2\cos A)} = \text{constant}.$$

Démonstration analogue dans le cas de $b - c =$ constant.

Si $A = 60°$, on a $AH = 2R\cos 60 = AO$; donc HO est perpendiculaire sur AI et par conséquent HO est parallèle à la bissectrice extérieure de l'angle A.

Démonstration analogue dans le cas de $A = 120°$.

Remarque. J'ai déjà donné une démonstration géométrique de la 2ᵐᵉ partie de cette question dans *Mathesis* (2) VII, page 77.

Solution analogue par MM. Delahaye et Emmerich. Solution analytique par MM. Barisien et Miel.

Solution par M. R. Buysens. Soient Ax et Ay deux axes formant entre eux l'angle A; les points B et C parcourant respectivement

Ax et Ay de telle manière que la quantité $AB \pm AC = a$ reste constante, décrivent deux ponctuelles semblables. Les perpendiculaires abaissées de B sur Ay et de C sur Ax décrivent deux faisceaux perspectifs qui engendrent une droite l lieu de l'orthocentre du triangle ABC; cette droite est perpendiculaire à la bissectrice intérieure(extérieure)de l'angle xAy. car le symétrique d'un triangle ABC quelconque pris par rapport à la bissectrice intérieure (extérieure),satisfait aussi à l'énoncé. Les perpendiculaires élevées à AB et AC en leurs milieux décrivent deux faisceaux perspectifs qui engendrent une droite m, lieu du point O et également perpendiculaire à la bissectrice intérieure (extérieure). Les ponctuelles (H) et (O), projectives aux ponctuelles (B) et (C), sont projectives entre elles et de plus perspectives, car elles ont un élément uni à l'infini. La droite OH pivote donc autour d'un point fixe, appartenant à la bissectrice intérieure (extérieure), à cause de la symétrie par rapport à cette droite. Si l'angle A est de 60° (120°), le triangle AB_1C_1 tel que l'on ait $AB_1 = AC_1 = \frac{a}{2}$ ($AB_1 = -AC_1 = \frac{a}{2}$), est équilatéral. On voit que, dans ce cas, les droites l et m sont confondues : la droite d'Euler du triangle variable reste fixe et est perpendiculaire à la bissectrice intérieure (extérieure) de l'angle A.

Solution par M. Déprez. Soit F le point de rencontre de la circonférence ABC avec la bissectrice intérieure de l'angle A, et supposons $AB + AC = 2s$.

Menons FB', FC' perpendiculaires à AB, AC; les triangles BB'F, CC'F étant égaux, on a $BB' = CC'$, d'où $AB' = AC' = s$. Le point F est donc fixe. AH, OE étant parallèles, la droite OH divise AF dans le rapport $\frac{AH}{OF} = 2\cos A$; donc OH passe par un point fixe de AF. Si $A = 60°$, on a $AH = 2R\cos A = R = AO$; donc OH est perpendiculaire à AF, puisque AF est aussi la bissectrice de l'angle HAO.

Le reste de la question se démontre d'une manière analogue.

Nous avons donné (*Mathesis*, (2), II, p. 238) des solutions géométriques de la 1re partie de la question 1186 et énoncé un grand nombre d'autres propriétés de la figure.

Solution par M. G. Gérard. Supposons, pour fixer les idées, que la somme $AB + AC$ soit constante et égale à l. Les points B et C marquent sur les côtés de l'angle A deux ponctuelles semblables; donc BC

enveloppe une parabole tangente à AB et AC aux distances $AP = AQ = l$ de A, et admettant pour axe la bissectrice intérieure AF de A.

Les cercles circonscrits aux triangles ABC passant par le point A et par le foyer F de la parabole, forment un faisceau ; le lieu de leurs centres O est la perpendiculaire au milieu G de AF.

Le lieu des orthocentres H de ces triangles est la directrice, perpendiculaire en D à AF.

Menons HO qui coupe AF en P. Les droites AH, AO étant isogonales par rapport à l'angle A, on a, si P est supposé entre D et G,

$$\frac{PD}{PG} = \frac{PH}{PO} = \frac{AH}{AO} = \frac{2AO\cos A}{AO} = 2\cos A.$$

Donc, P est un point fixe.

Si $A = 120°$, $\cos A = -\frac{1}{2}$, et le rapport de section $\frac{PD}{PG}$ devient égal à 1, ce qui correspond au point à l'infini sur AF.

Il serait maintenant facile d'appliquer la démonstration au cas où la différence des côtés AB, AC est constante.

Question 1189.

(Voir *Mathesis*, (2), VIII, p. 239).

On considère les triangles variables formés par un point M *d'une ellipse donnée et les deux foyers* F *et* F′ *de l'ellipse. La polaire du centre de l'ellipse par rapport au cercle inscrit dans le triangle* MFF′ *enveloppe une courbe dont l'aire est*

$$U = \frac{\pi c^2}{8}\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}.$$

(E. N. Barisien.)

Solution par M. R. Buysens. Ayant pris les axes de l'ellipse pour axes coordonnés, supposons que le point M décrive le quart d'ellipse compris dans l'angle xOy, le rayon vecteur $FM = u$ variant depuis $a - c$ jusque a. Soit O′ le centre du cercle inscrit, T son point de contact avec FF′ ; on trouve

$$OT = a - u, \quad O'T = r = \sqrt{\frac{(a-c)(a+c-u)(-a+c+u)}{a+c}}$$

$$= k\sqrt{c^2 - t^2};$$

en posant

$$a - u = t, \quad \sqrt{\frac{u-c}{a+c}} = k.$$

Les coordonnées de O′ sont $(t, -r)$; la polaire de O par rapport au cercle (O′) est la perpendiculaire abaissée de T sur OO′ ; écrivons son équation et la dérivée :

$$tx - ry = t^2, \qquad x + \frac{kt}{\sqrt{c^2 - t^2}}\, y = 2t.$$

Ces équations donnent les coordonnées du point caractéristique :

$$x = \frac{1}{c^2}(2c^2 t - t^3). \quad y = \frac{1}{kc^2}\, t^2 \sqrt{c^2 - t^2}.$$

Lorsque t varie de 0 à c, ce point décrit le quart de l'enveloppe situé dans l'angle xOy ;

$$U = 4\int_{t=0}^{t=c} y\,dx = \frac{4}{kc^4}\int_0^c t^2\,(2c^2 - 3t^2)\sqrt{c^2 - t^2}\,dt$$

$$= \frac{4c^2}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\,(2 - 3\sin^2\varphi)\cos^2\varphi\,d\varphi,$$

en posant

$$t = c\sin\varphi.$$

On parvient au résultat annoncé, en décomposant la dernière intégrale et appliquant la formule suivante, établie pour m et n pairs :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m\varphi\cos^n\varphi\,d\varphi = \frac{1.3.5\ldots(m-1).1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots(m+n)} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Autre solution par M. Andrien (Charleroi).

Question 1192.

(Voir *Mathesis* (2). VIII, p. 240).

Étant donné un cycle, ou cercle dirigé, dont les tangentes sont par suite dirigées, on mène d'un point M *les deux tangentes* MA, MB, *sur lesquelles on prend, en tenant compte des signes,* AC = BD = k : *la droite* CD *ou* u *sera la transformée du point* M. *En changeant* k *en* $-k$, *on aura une*

autre droite l, qui sera appelée la primitive du point M, *et* M *sera le point transformé de l. Démontrer que si, un point* M *et une droite m sont associés, c'est à-dire si* M *est sur m, les éléments transformés n et* N *sont aussi associés.*

Généraliser par projection conique; et montrer que, sauf la question de réalité, la construction obtenue se rapporte à la corrélation plane la plus générale. (G. Fontené).

Solution par M. V. Retali (Milan). Lorsque deux systèmes plans réciproques Σ et Σ′ sont placés l'un sur l'autre, à un même point MN′ de leur plan commun correspondent deux droites différentes *m′* et *n*, et à une même droite *rs′* correspondent deux points R′ et S. Le lieu des points qui, considérés comme appartenant soit à l'un soit à l'autre des deux systèmes, tombent sur leurs droites correspondantes, est une conique K^2 (*conique pôle*) et l'enveloppe des droites qui contiennent leurs points correspondants est une deuxième conique C^2 (*conique polaire*) ayant double contact avec K^2. Etant données ces deux coniques C^2 et K^2, on construit les deux droites *m′* et *n* qui correspondent à un point MN′ comme il suit. Si les deux tangentes de C^2 issues du point MN′, coupent K^2 dans les deux couples de points F′, G et H′, L, où l'on a choisi les notations de façon que les cordes |F′ L| et |G H′| sont celles qui vont se couper sur la corde de contact(*) de C^2 et K^2, les deux droites correspondantes au point MN′ sont |F′ H| ≡ *m′* et |G L| ≡ *n*. De même, les deux points correspondants à une droite donnée sont les deux sommets qui ne sont pas alignés avec le pôle de contact de C^2 et K^2, du quadrilatère complet formé par les tangentes menées à la conique polaire C^2 par les deux points communs à la droite donnée et à la conique pôle K^2. Ces propriétés sont connues (V. Schröter, *Ueber zusammenfallende recipr. Gebilde*, Crelle, T. 77. p. 105-142, et Salmon, *Courbes planes*, p. 422-427 de la trad. franç.). Si l'on transforme maintenant, par une projection réelle ou non, K^2 et C^2 en deux cercles concentriques, le *cercle dirigé* de l'énoncé devient la *conique polaire* et le cercle concentrique passant par C est la *conique pôle*, ce qui démontre le théorème.

(*) Les deux cordes | F′L | et | GH′ | vont se couper sur la corde de contact, car les deux points F′G et les deux points H′L sont conjugués harmoniques, sur K^2, par rapport aux deux points de contact; donc ces deux points forment sur K^2 un couple de l'involution définie par les deux couples G, H′ et F′, L.

×QUESTIONS D'EXAMEN.

881. Un cercle C en rencontrant une ellipse E détermine les deux cordes PQ, P'Q'. Montrer que si le pôle R de PQ par rapport à E est situé sur C, le pôle R' de P'Q' par rapport à E est aussi situé sur C.

(E. N. Barisien).

Plus généralement, les six points P, Q, R, P', Q', R' sont situés sur une même conique; car la figure RPQ'R'P'QR est un hexagone de Pascal. La démonstration analytique est également facile; en effet, si (X, Y), (X', Y') sont les coordonnées des points R, R' l'équation d'une conique coupant E en P, Q, P', Q' est

$$(a^2yY+b^2xX-a^2b^2)(a^2yY'+b^2xX'-a^2b^2)+\lambda(a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2)=0,$$

et la condition que cette courbe passe par le point R,

$$a^2YY'+b^2XX'-a^2b^2+\lambda=0,$$

est symétrique par rapport aux deux points R, R'.

882. Trouver sur une droite donnée d le point M dont la somme des carrés des distances à deux points donnés A et B soit un minimum.

Si C est le milieu de la droite AB, l'égalité $\overline{MA}^2+\overline{MB}^2=2\overline{MC}^2+2\overline{MA}^2$ montre que M doit être la projection de C sur d.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1211. Chercher l'enveloppe des hyperboles qui passent par un point donné, ont une asymptote donnée, et dont la deuxième asymptote est une tangente variable d'une courbe plane donnée. (V. Retali.)

×**1212.** Eliminer x et y entre les équations

$$x\left(1+\frac{2y^2}{r^2}\right)=a,\quad y\left(1+\frac{2x^2}{r^2}\right)=b,\quad x^2+y^2=r^2.$$

(M. Stuyvaert.)

×**1213.** On donne deux droites Ox, Oy, et un point A; trouver un point G qui soit le centre de gravité du triangle ayant pour sommets A et les projections B, C de G sur Ox, Oy. (J. Neuberg.)

1214. Une sphère et un cylindre de révolution dont le cercle de base a pour diamètre un rayon de la sphère, se rencontrent suivant une courbe gauche (fenêtre de Viviani). Trouver le lieu de la trace de la tangente à cette courbe sur le plan de la base du cylindre.

(Andrien.)

*CONSTRUCTIONS SPHÉRIQUES A LA RÈGLE ET AU COMPAS;

par M. E. Barbarin, professeur au Lycée de Bordeaux.

(*Suite et fin;* voir pp. 57-60).

II.

Constructions relatives aux circonférences.

On peut diviser les petits cercles d'une sphère de grande dimension en deux classes, suivant que leur rayon sphérique est petit ou grand. Dans le premier cas, ils peuvent être tracés effectivement avec le compas; dans le second, on doit les considérer comme lieux géométriques de points équidistants d'un même grand cercle, et on ne peut plus que les déterminer par points; pour distinguer, nommons ces lieux des ***hypercycles***, et appelons *axe* le grand cercle dont tous les points de chacun sont équidistants; il est évident que certaines constructions différeront suivant qu'on a à traiter de petits cercles ou des hypercycles.

En ce qui concerne les premiers, il y a peu de détails à modifier parmi les tracés habituels du plan; je cite seulement pour mémoire les cercles passant par trois points ou tangents à trois droites; le problème de mener la tangente à une circonférence par un point donné revient toujours à la construction d'un triangle rectangle.

Les questions concernant les axes et centres radicaux, ainsi que les polaires, ne donnent pas lieu davantage à des modifications notables; d'ailleurs les constructions qui mettent l'harmonie en jeu peuvent se réduire à celle-ci :

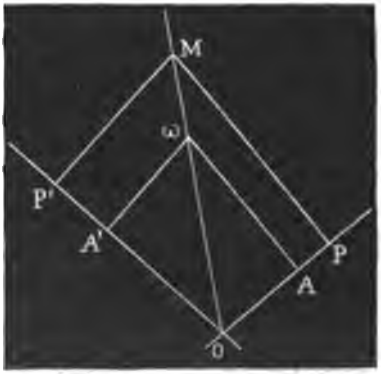


Fig. 2.

I. *Étant données deux longueurs* r, r', *trouver deux autres longueurs* R, R', *telles que*

$$\frac{\sin r}{\sin r'} = \frac{\sin R}{\sin R'}.$$

Faisons un angle quelconque ω sur les côtés duquel sont portées les longueurs $\omega A = r$, $\omega A' = r'$ (fig. 2) élevons AO et A'O perpendiculaires sur ces dernières, joignons leur

intersection O à ω et, d'un point quelconque M de Oω, abaissons MP, MP' perpendiculaires sur les côtés de l'angle O; MP = R, MP' = R' satisfont à la condition demandée; si donc on donnait r,r',R, on pourrait chercher à en tirer R' (quatrième proportionnelle), en construisant, comme nous verrons plus loin, les points de rencontre d'un hypercycle avec un grand cercle.

Ceci va nous permettre de trouver sur un grand cercle OO' les points S,S' qui le partagent harmoniquement, c'est-à-dire de façon à avoir

$$\frac{\sin SO}{\sin SO'} = \frac{\sin S'O}{\sin S'O'} = \frac{\sin r}{\sin r'},$$

r et r' étant deux longueurs données. Décrivons(*) de O et O' comme centres, avec r et r' pour rayons respectifs, deux circonférences; si elles se coupent en A, les points cherchés S,S' sont les pieds des bissectrices interne et externe de l'angle OAO'; si r et r' sont tels que les circonférences ne se coupent pas, on leur substituera des longueurs convenables R,R' déduites de la figure 2.

Les points S,S' construits pourront ensuite servir à tracer les arcs de grand cercle tangents communs aux circonférences O,O'.

II. *Faire passer, par deux points donnés* A *et* B, *une circonférence tangente à un arc de grand cercle* $x'x$ (A et B sont supposés du même côté de $x'x$). Si AB coupe $x'x$ en G, la solution est identique à celle que l'on emploie sur le plan euclidien, parce que le lieu géométrique des points de contact des arcs tangents issus de G à toute circonférence passant par A et B est une circonférence de centre G. Supposons que AB ne coupe plus $x'x$ et qu'on puisse tracer leur perpendiculaire commune MN(*). Le lieu géométrique des points de contact des arcs tangents aux circonférences passant par A et B, et perpendiculaires à MN, est un hypercycle ayant MN pour axe; donc si on fait passer par A et B une circonférence O' et qu'on abaisse O'ω' perpendiculaire sur MN, le côté opposé à O'ω' dans le quadrilatère trirectangle qui a O'ω' et le rayon de la circonférence auxiliaire pour côtés adjacents à l'angle obtus, égale l'équidistance de l'hypercycle; en prenant donc, sur $x'x$, les arcs MD et MD' égaux à cette équidistance, on a les contacts avec $x'x$ des circonférences demandées.

III. *Faire passer, par un point donné* A, *une circonférence tangente à*

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

deux arcs x'x, y'y. Si les arcs se coupent, on trace leur arc bissecteur, dans la région qui renferme A ; s'ils ne se coupent pas, et qu'on puisse tracer leur perpendiculaire commune MN, l'arc bissecteur est remplacé par celui qui est médiateur de MN ; la circonférence demandée passe aussi par B, symétrique de A. En ce cas, il faut que A et B soient dans la même région que l'arc médiateur pour que les solutions puissent être de vraies circonférences. Dans le cas contraire, les solutions seraient, comme on le verra ci-après, des hypercycles.

VI. *Mener, à une circonférence* O, *l'arc de grand cercle tangent perpendiculaire à un arc donné* MN. Il n'y a qu'à construire le quadrilatère trirectangle qui a pour sommet de l'angle obtus le centre O, pour côtés de cet angle le rayon *r* et la distance de O à MN ; le côté opposé à cette distance est l'arc tangent demandé.

V. *Mener à une circonférence* O *une circonférence tangente et passant par deux points donnés* A et B. Faisons passer par A et B une circonférence auxiliaire coupant O en C et D ; si CD coupe AB, la construction ne diffère pas de celle qui est connue pour le plan. — Si CD ne coupe pas AB, et qu'on puisse construire leur perpendiculaire commune MN, on est ramené à tracer au cercle O un arc tangent perpendiculaire à MN ; son point de contact détermine avec A et B la circonférence demandée.

VI. *Mener, par un point donné* A, *une circonférence tangente à une circonférence donnée* O *et à un arc donné x'x*. On doit considérer *x'x* comme transformé par inversion de O par rapport à un point S du diamètre CD, la puissance de transformation étant $\sqrt{\operatorname{tg}\frac{SC}{2}\operatorname{tg}\frac{SD}{2}}$; soit C' le point de rencontre de CD avec *x'x*, C' est antihomologue de C ; faissons passer (*) par C et C' un cercle auxiliaire coupant *x'x* en E' et le cercle O en E ; EE' coupe CD au point S ; enfin le cercle déterminé par les trois points A, C, C' coupe de nouveau SA en B ; on est donc ramené à décrire une circonférence passant par A et B et tangente à *x'x*.

VII. *Mener, par un point donné, une circonférence tangente à deux cercles donnés*. Solution identique à celle du plan euclidien.

Nous allons résoudre maintenant les questions relatives aux hypercycles, et nous remarquerons, en principe, que tout arc de grand cercle

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

tangent à une telle ligne est renfermé en entier entre l'hypercycle et son axe.

VIII. *Intersection d'un hypercycle et d'un arc de grand cercle* AB. — Il y a sûrement intersection quand AB coupe l'axe $x'x$ sous un angle θ, si l'on peut construire alors un triangle rectangle, connaissant le côté de l'angle droit égal à l'équidistance, et l'angle opposé qui vaut θ; il y a deux solutions de part et d'autre de $x'x$.

Quand AB ne coupe plus $x'x$, et qu'on peut tracer leur perpendiculaire commune MN, on a un quadrilatère trirectangle, connaissant un côté de l'angle obtus qui est l'équidistance, et la perpendiculaire MN égale au côté opposé; deux solutions, une, ou zéro suivant que MN est supérieure, égale ou inférieure à l'équidistance.

IX. *Intersection d'un hypercycle et d'un cercle ou de deux hypercycles.* Les axes radicaux de trois figures, cercles ou hypercycles, passent par le même point; ceci permet de trouver aisément la solution du problème, ramené au précédent.

Soient donnés d'abord un hypercycle et un cercle; il y a d'ailleurs rencontre quand le diamètre du cercle perpendiculaire à l'axe renferme un point de l'hypercycle; il n'y a donc qu'à faire passer par deux points de celui-ci un cercle auxiliaire coupant le cercle donné, et par le centre radical obtenu tirer la perpendiculaire au diamètre. Quand on prend deux hypercycles, l'axe radical passe par le point de rencontre des axes, ou est perpendiculaire à leur normale commune; donc en faisant passer par deux points de l'un des hypercycles, et un point de l'autre un cercle auxiliaire, on détermine un point de l'axe radical cherché.

La polaire d'un point par rapport à un hypercycle se construit à la façon habituelle.

X. *Mener, par un point donné, l'arc tangent à un hypercycle.* D'après ce qu'on a vu plus haut, le point doit être compris entre la courbe et son axe, donc sa distance à l'axe sera inférieure à l'équidistance; un quadrilatère trirectangle évident conduit au résultat. On tracerait de même l'arc tangent perpendiculaire à un arc donné.

XI. *Construire l'hypercycle qui passe par trois points donnés* A,B,C. Il suffit de construire son axe, qui n'est autre que la normale commune aux médiatrices des arcs de grand cercle AB, AC, BC.

XII. *Construire l'hypercycle tangent à trois arcs de grand cercle*

donnés. Il suffit encore de construire son axe, qui est normale commune à deux bissectrices externes du triangle formé par les trois arcs.

XIII. *Construire un arc tangent commun à un cercle et à un hypercycle, ou à deux hypercycles*. Les points S, S′ dont il a été question à propos des arcs tangents communs à deux cercles, ne sont autre chose que les centres d'inversion relative de ces cercles l'un dans l'autre; ils sont situés ou sur la ligne des centres, ou sur la perpendiculaire menée du centre du cercle donné à l'axe de l'hypercycle, ou sur la normale commune aux deux axes; comme quatre points antihomologues sont toujours sur un même cercle, la méthode des axes radicaux fournit toujours le moyen de déterminer ces points; on est ainsi ramené à un des problèmes de tangentes déjà traités.

XIV. *Faire passer par* A *et* B *un hypercycle tangent à l'arc* $x'x$. Si A et B sont séparés par $x'x$, il sera permis de substituer à B son symétrique B′. AB′ ne doit pas couper $x'x$; on construit, comme il a été dit plus haut, les contacts D, D′, et il ne reste plus qu'à faire passer un hypercycle (ou un cercle) par l'un d'eux et par les points A, B.

XV. *Faire passer par un point donné* A *un hypercycle tangent à deux arcs donnés* $x'x$, $y'y$. Nous supposons, puisqu'une partie du problème a été précédemment traitée, que la perpendiculaire commune MN a été construite, ainsi que sa médiatrice, A étant placé hors de la région du plan enfermée par $x'x$ et $y'y$; soient B son symétrique par rapport à la médiatrice, et B′ symétrique de B par rapport à $x'x$; l'hypercycle tangent à $x'x$ et passant par A et B′ satisfait à la question proposée (2 solutions).

Ce qui précède prouve que les questions touchant les hypercycles tangents peuvent se traiter absolument de la même manière que s'il s'agissait de cercles; nous croyons donc inutile de pousser plus loin leur étude; nous ferons simplement remarquer que l'impossibilité de tracer effectivement les hypercycles exige des dessins plus détournés, et partant plus compliqués(*).

(*) Une partie de ce qui précède peut se transposer en géométrie bobatchefskienne, les grands cercles devenant des droites, les hypercycles des équidistantes, etc. (P. M.)

CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS,

à Paris, du 6 au 12 août 1900.

La Société mathématique de France a reçu à Zurich, en 1897, la mission de préparer le prochain Congrès international des mathématiciens, qui doit avoir lieu à Paris en 1900. Elle a constitué à cet effet un Comité d'organisation (rue des Grands-Augustins, 7, Paris), qui s'est lui-même divisé en deux Commissions : *Commission administrative* (président, M. G. Darboux) et *Commission des travaux* (président, M. H. Poincaré).

La date du Congrès est fixée du lundi 6 août au dimanche 12 août 1900; le Congrès durera par conséquent sept jours.

Nous serons rattachés à l'ensemble des Congrès rentrant dans l'organisation de l'Exposition universelle, ce qui, du reste, ne nous empêchera nullement de tenir la plupart de nos séances, et surtout les séances de sections, ailleurs que dans les locaux de l'Exposition. Tout nous fait espérer que la Sorbonne pourra, dans ce but, nous ouvrir très gracieusement ses portes.

Le programme du Congrès comprendra : au moins deux séances générales ; des séances de sections, qui auront lieu surtout le matin; des visites scientifiques ; un banquet, qui réunira les membres du Congrès. Des excursions, facultatives, pourront être organisées et sont dès maintenant à l'étude.

Le prix de la carte du Congrès sera de *trente francs*. Elle donnera droit :

1° A la participation à tous les travaux, à toutes les assemblées, à toutes les visites qui seront organisées ; 2° au banquet; 3° à la réception du compte rendu des travaux du Congrès, aussitôt après la publication.

Lorsqu'un membre du Congrès y viendra accompagné d'une ou plusieurs personnes de sa famille, celles-ci pourront recevoir, sur demande, des cartes spéciales à un prix réduit qui sera ultérieurement fixé.

Nous vous ferons connaître en temps utile quelles seront les conditions spéciales de faveur accordées pour les voyages par les Compagnies de transports, à l'occasion de l'Exposition universelle.

Il est du plus haut intérêt, pour la suite de nos travaux, d'avoir au moins quelque indication sur le nombre probable des membres du Congrès de 1900. En conséquence, nous insistons d'une façon toute particulière pour que vous ayez l'obligeance de nous faire savoir vos intentions probables par une simple carte postale, dans les termes suivants : *il est probable que j'assisterai au Congrès de Paris avec* N *personnes de ma famille*, ou *il n'est pas probable que j'assiste au Congrès de Paris*. Ceci ne vous engagera en rien, à aucun point de vue, dans un sens ou dans l'autre Ce n'est que plus tard que nous aurons à vous demander vos intentions définitives.

Il importerait que votre réponse nous parvînt le plus tôt possible, et dans tous

les cas qu'elle nous fût adressée par vous, dans les huit jours qui suivront la réception de la présente circulaire. LE COMITÉ D'ORGANISATION.

Prière d'adresser toutes les communications à M. le Président de la Société mathématique de France, rue des Grands-Augustins, 7, Paris. C'est lui qui est en même temps président du Comité d'organisation.

SUR UNE CUBIQUE CIRCULAIRE,

par M. V. RETALI.

La cubique étudiée récemment par M. JEŘABEK (*) peut être envisagée comme la transformée du cercle C^2, ayant le centre D (**) et le rayon $DO = \frac{1}{2} r$, par l'inversion quadrique dont R est le pôle et dont la conique fondamentale (conique des points unis) dégénérée est formée par la médiatrice m du segment RO et la droite à l'infini. Nous indiquerons par (I) cette transformation quadratique, rationnelle et involutive, dont les formules, en prenant R pour origine des coordonnées rectangulaires, sont évidemment

$$x : y : 1 = x'(2x' - r) : y'(2x' - r) : -2x'$$
$$x' : y' : 1 = x\ (2x - r) : y\ (2x - r) : -2x.$$

La transformée du cercle

$$C^2 \equiv x^2 + y^2 + rx = 0$$

est, en faisant abstraction de la droite $2x - r = 0$ qui se détache de la quartique correspondante, la cubique

$$C_4^3 \equiv 2x(x^2 + y^2) - r(3x^2 + y^2) = 0,$$

qui est bien celle considérée par M. JEŘABEK, comme on le vérifie sans peine en transportant parallèlement les axes en O.

Cette définition de C_4^3 permet d'en établir aisément les propriétés, soit par l'Analyse, soit par la Géométrie pure, d'en construire la tangente en un point, les tangentes stationnaires, les asymptotes, les intersections avec une droite donnée, etc. C_4^3 passe par les quatre points communs au cercle C^2 et à la conique fondamentale, ce qui revient à dire qu'elle est circulaire et passe par les deux points imaginaires conjugués

---

(*) Voir, *Mathesis*, (2) t. VIII, p. 224.

(**) Nous conservons les notations de M. JEŘABEK.

(C^2, m); elle possède en R un point conjugué ; la droite $| Oy |$, polaire de R par rapport à la conique fondamentale, est asymptote d'inflexion, les deux tangentes au point double sont les droites qui projettent du point R les deux point imaginaires conjugués $(C^2, | Oy |.)$.

En général, la transformée d'un cercle C^2, qui ne passe pas par le pôle d'inversion R, est une quartique rationnelle circulaire ayant un point double en R et un *tacnode* au point à l'infini de $| Oy |$; cette droite est la tangente tacnodale ; les deux tangentes en R passent par les points $(C^2, | Oy |)$; le point symétrique par rapport à R du centre du cercle C^2 est le *foyer singulier* de la quartique. Lorsque C^2 passe par R, la droite $| Oy |$ se détache de la quartique correspondante et la courbe restante est une cubique circulaire avec un point double en R, etc. Si le centre de C^2 est sur la perpendiculaire menée par R à la droite m, la cubique correspondante est une conchoïde de De Sluse(*) ; C_4^3 est donc une conchoïde slusienne particulière, savoir l'inverse de l'ellipse

$$2x = r(3x^2 + y^2)$$

par rapport au sommet R ; le foyer singulier est O.

Par la transformation (I), à une droite h du plan correspond une hyperbole qui passe par R et dont une asymptote est $|Oy|$; la seconde asymptote est la droite h' symétrique de h par rapport à R(**) : la cubique C_4^3 est donc l'enveloppe des hyperboles qui passent par R, ont $|Oy|$ par asymptote, et dont l'autre asymptote est une tangente variable du cercle K^2 symétrique de C^2 par rapport à R. On peut appliquer évidemment cette génération non seulement à toutes les conchoïdes slusiennes, mais aussi aux cubiques circulaires rationnelles qui n'ont pas la droite à l'infini pour tangente stationnaire, et aux quartiques circulaires rationnelles qui ont un tacnode à l'infini, p. ex. à la conchoïde de Nicomède.

Les tangentes à une courbe et à sa transformée en deux points correspondants P et P' se coupent sur la polaire, par rapport à la conique fondamentale, du conjugué de R par rapport à P et P'.

(*) V. *Periodico di Matematica*, de M. G. Lazzeri, t. XIII, p. 200, quest. 428, et p. 225, questions 431 et 432. Voir aussi l'article de M. G. Loria « *Une courbe oubliée* » et la note finale de M. Neuberg (*Mathesis*, (2), VII, p. 1 et suiv.

(**) Voir *P. di M.* ibid, p. 200, quest. 425, et la première note à la p. 223.

Si nous considérons maintenant la strophoïde droite ayant en R le nœud, et la droite $|oy|$ pour asymptote d'inflexion, c'est-à-dire la transformée du cercle K^2, on reconnaît sans peine qu'un rayon arbitraire mené par R coupe les deux cubiques en deux points A, A′ et leur asymptote commune au centre du segment AA′. Donc, en adoptant une dénomination usitée dans le cas particulier de la cissoïde de Dioclès, c'est-à-dire en appelant conjuguées entre elles deux conchoïdes slusiennes qui correspondent par la transformation (I) à deux cercles symétriques par rapport au pôle R, nous pouvons énoncer le théorème suivant : la cubique C_4^3 est la conjuguée de la strophoïde droite qui a même point double et même asymptote d'inflexion.

NOTES MATHÉMATIQUES.

*6. *Calcul approché d'une racine carrée.* Nous résumons ici une note de M. G. Frattini dans le *Periodico di Matematica*.

Soit ω une valeur rationnelle approchée de $\sqrt{D}$, et supposons

$$(\omega+\sqrt{D})^m = P_m + Q_m\sqrt{D}, \quad (\omega-\sqrt{D})^m = P_m - Q_m\sqrt{D},$$

m étant un nombre entier positif quelconque; les égalités donnent

$$\frac{P_m}{Q_m} = \sqrt{D}\,\frac{1+\left(\frac{\omega-\sqrt{D}}{\omega+\sqrt{D}}\right)^m}{1-\left(\frac{\omega-\sqrt{D}}{\omega+\sqrt{D}}\right)^m};$$

donc lorsque m croît indéfiniment,

$$\lim\frac{P_m}{Q_m} = \sqrt{D}.$$

Si $\omega > \sqrt{D}$, $\frac{P_m}{Q_m}$ décroît vers $\sqrt{D}$; si $\omega < \sqrt{D}$, $\frac{P_m}{Q_m}$ oscille autour de $\sqrt{D}$.

Exemples :

$$(4+\sqrt{19})^2 = 35 + 8\sqrt{19},$$
$$(4+\sqrt{19})^3 = 292 + 67\sqrt{19},$$
$$(4+\sqrt{19})^4 = 2441 + 560\sqrt{19},$$
$$(4+\sqrt{19})^5 = 20404 + 4681\sqrt{19}, \text{ etc.}$$

De là on conclut les valeurs de plus en plus approchées de $\sqrt{19}$.

$$\frac{4}{1}, \quad \frac{35}{8}, \quad \frac{292}{67}, \quad \frac{2441}{560}, \ldots.$$

On peut calculer les nombres P_m, Q_m par voie récurrente. Car, en effectuant le produit

$$(P_m + Q_m \sqrt{D})(\omega + \sqrt{D})$$

on voit que

$$P_{m+1} = P_m\omega + Q_m D,\ Q_{m+1} = P_m + Q_m\omega.$$

Si l'on suppose $D = a^2 + k$, $\omega = a$, on trouve pour les valeurs approchées de $\sqrt{a^2+k}$;

$$\frac{a}{2},\ \frac{2a^2+k}{2a},\ \frac{4a^3+3ak}{4a^2+k},\ \frac{8a^4+8a^2k+k^2}{8a^3+4ak},\ \ldots$$

Telles sont aussi les réduites de la fraction continue

$$\sqrt{a^2+k} = a + \frac{k}{2a} + \frac{k}{2a} + \frac{k}{2a} + \cdots$$

×7. *Sur la sphère de douze points* (Voir *Mathesis*, 1898, p. 218) par M. Ripert. Pour éviter des recherches pénibles et qui ne peuvent aboutir, il est utile de démontrer que *La sphère complémentaire (ou de douze points) du tétraèdre général ne peut avoir, dans les plans des faces, d'autres points remarquables que les centres de gravité.*

En effet, en désignant par a, b, c les arêtes BC, CA, AB, par a', b', c' les arêtes DA, DB, DC, l'équation barycentrique de la sphère circonscrite S est :

$$a'^2 X + b'^2 Y + c'^2 Z + \frac{1}{T}(a^2YZ + b^2ZX + c^2XY) = 0.$$

Soit $(\alpha, \beta, \gamma, 0)$ un point de la face ABC. S'il est sur la sphère S' de douze points, son anticomplémentaire est sur S, et l'on a :

$$a'^2(\beta+\gamma-2\alpha) + b'^2(\gamma+\alpha-2\beta) + c'^2(\alpha+\beta-2\gamma) + \frac{\Sigma a^2(\gamma+\alpha-2\beta)(\alpha+\beta-2\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma} = 0.$$

Les coefficients de tous les termes étant irréductibles entre eux, cette équation ne peut être satisfaite par des valeurs *indépendantes de* a', b', c' que si l'on a

$$\beta+\gamma-2\alpha = \gamma+\alpha-2\beta = \alpha+\beta-2\gamma = 0,$$

équations dont la seule solution est $\alpha = \beta = \gamma$.

Donc, sur S'_4 il ne peut y avoir, *dans les plans des faces*, que des points dont les coordonnées sont fonctions des arêtes et n'appartenant pas à ces faces et qui, par conséquent, *ne sont pas remarquables par rapport à ces faces*.

Par contre, si le tétraèdre est *orthocentrique*, non seulement les cercles de S'_4 sur les faces du tétraèdre, passent par les orthocentres, mais ils sont *entièrement remarquables*. On sait que le cercle de la face ABC a alors pour équation :

$$\Sigma (b^2 + c^2 - a^2) X^2 - \Sigma a^2 YZ = 0, \quad T = 0.$$

C'est le cercle décrit sur GH comme diamètre et étudiée par MM. Griffiths, Brocard, Casey, etc., sous le nom de *cercle orthocentroïdal*.

×8. *Une règle à calcul ou abaque par* M. Lambert (*Nivelles*). Soient Ax, Cz deux parallèles quelconques, By la parallèle équidistante ; ces droites sont terminées à une même droite en A, C, B. Si une transversale mobile les coupe en a, c, b, on a constamment $Cc = \frac{1}{2}(Aa + Bb)$.

Supposons que les droites Ax, Cz portent une même graduation logarithmique, de manière que le nombre inscrit à un point de division ait pour logarithme la distance de ce point à l'origine (placée respectivement en A et C). Supposons aussi que la droite By porte une graduation logarithmique, mais que les nombres marqués soient les doubles de ceux que l'on a inscrits sur les droites Ax, Cz à la même distance de l'origine.

Cela posé, pour obtenir le produit de deux nombres donnés α et β, on cherche α sur la règle Ax, β sur la règle Cz, et l'on joint par une droite les points de division correspondants. Cette droite coupera By en un point à côté duquel on peut lire le produit effectué $\alpha\beta$.

9. *Paradoxe concernant l'enveloppe des ellipses homofocales.* 1° Si r et r' sont les rayons vecteurs FM et F'M d'un même point M, et θ l'angle MFF', on a

$$r + r' = 2a, \quad r'^2 = r^2 + 4c^2 - 4rc \cos\theta.$$

En éliminant r', on trouve l'équation polaire

$$a^2 - ar + cr \cos\theta - c^2 = 0;$$

a étant le paramètre variable, l'équation de l'enveloppe est

$$r^2 - 4(rc \cos\theta - c^2) = 0,$$

ou en coordonnées rectilignes

$$(x - 2c)^2 + y^2 = 0;$$

elle représente le foyer F' considéré comme cercle de rayon nul.

2° L'équation générale des ellipses homofocales est

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1;$$

en ordonnant par rapport au paramètre variable λ, on obtient

$$\lambda^2-\lambda(x^2+y^2-a^2-b^2)-(a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2)=0.$$

L'enveloppe de ces courbes est la quartique

$$(x^2+y^2-a^2-b^2)^2+4(a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2)=0,$$

ou

$$[(x-c)^2+y^2][x+c)^2+y^2]=0.$$

On trouve donc maintenant les deux foyers. (E. N. Barisien.)

BIBLIOGRAPHIE.

Cours de problèmes de Géométrie analytique, à l'usage des candidats à l'École Navale, à l'École Centrale et à l'École Polytechnique, par G. de Longchamps, Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Condorcet. Tome troisième : Géométrie à trois dimensions. Paris, Delagrave, 1899 (In-8° de XII-582 pp., avec 51 fig. dans le texte). Prix : 10 francs.

Voici les titres des différents chapitres de cet intéressant et instructif ouvrage, fruit d'une longue et fructueuse carrière :

I. Les généralités (Analogies entre la géométrie à deux dimensions et la géométrie à trois dimensions. Choix des axes coordonnés. Les lieux géométriques et les complexes, etc.). II. Les problèmes élémentaires (Problème de la section plane, problème des cônes, etc.). III. Les tangentes et les plans tangents. IV. Les centres, les pôles et les plans polaires. V. Les problèmes de cordes et de plans sécants. VI. Les normales (cubique gauche des pieds des normales, cônes et cylindres passant par cette courbe, cône de Chasles, développable de la cubique, normalies et normaliennes, etc.). VII. Les génératrices rectilignes (Problèmes sur les génératrices rectilignes des quadriques. Le plan, à la fois, tangent et normal. Le point central. Le quadruple hyperboloïdique. Génératrices rectilignes des cubicoïdes). VIII. Les plans cycliques et les plans hypercycliques, les ombilics. IX. Les problèmes d'axes et de sommets (dans la section plane et dans les quadriques). X. Les surfaces de révolution. Les quadriques de révolution. XI. Discussion des quadriques (La méthode de Plücker. La méthode par l'équation en S. La méthode des plans cycliques et des ombilics. La méthode par la transformation homographique. La méthode par les diamètres conjugués, par le contour apparent, etc.). XII. La surface romaine de Steiner (Coniques tracées sur la surface. Les trois genres de surfaces romaines. Les sommets. Les points doubles. Les tangentes inflexionnelles, etc.).

Comme dans les deux premières parties de ce cours, l'auteur donne, dans chaque chapitre, des indications générales sur les questions qui peuvent se présenter, puis il développe quelques problèmes; enfin, il indique les réponses d'un certain nombre d'exercices originaux.

Le *Cours de problèmes* est un guide extrêmement utile pour les jeunes professeurs(*); pour les élèves, non seulement, il les aidera puissamment dans la préparation de concours parfois difficiles, mais il leur inspirera aussi le goût des recherches personnelles. (J. N.).

Text-Book of Algebra with Exercices for Secondary Schools and Colleges by G. E. FISHER and I. J. SCHWATT, Assistant Professors of Mathematics in the University of Pennsylvania Part I. Philadelphia, FISHER and SCHWATT, 1898 (In-8° de XIII-683 p. in-4°).

Les matières traitées dans cet ouvrage sont : Notations algébriques, nombres négatifs, opérations fondamentales sur les expressions entières ou fractionnaires, décomposition en facteurs, équations du premier et du second degré, irrationnelles, exposants négatifs, fractionnaires ou incommensurables, progressions, binôme de Newton. Les auteurs ont surtout en vue l'initiation de l'élève à la pratique de l'Algèbre; ils s'abstiennent de longs développements théoriques sur les nombres négatifs, imaginaires ou incommensurables De nombreux exercices, la plupart très élémentaires, sont proposés au lecteur. (J. N.).

Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques par M. CH. MÉRAY. professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Dijon. Quatrième partie. Applications géométriques classiques (**). Paris, GAUTHIER VILLARS et fils, 1898 (Gr. in-8° de XI-248 p). Prix : 7 francs.

Ce volume termine les Leçons où M. MÉRAY a développé ses vues sur la théorie des fonctions, considérées comme des séries entières. Il les applique ici aux théo-

---

(*) De bons professeurs de l'enseignement libre, en Belgique, que leurs études antérieures n'avaient pas préparés suffisamment à la tâche si difficile de l'enseignement mathématique en première scientifique, nous ont dit que, pour eux, le *Cours de problèmes* de M. de Longchamps a une valeur inappréciable; il supplée à toutes les lacunes de leur préparation pédagogique. (P. M.).

(**) M. MÉRAY ne s'occupait pas d'applications de la théorie des fonctions à la géométrie dans son *Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale* (Paris, SAVY, 1872; XXIII-310 p. in-8°), qui est une première esquisse des *Leçons nouvelles* publiées de 1894 à 1898. Quand le *Nouveau Précis* a paru, on ignorait partout, en dehors du cercle des disciples de Weierstrass, que ce grand géomètre fondait aussi toute sa théorie des fonctions sur la doctrine des séries entières et celle-ci sur des idées arithmétiques, comme M. MÉRAY. C'est donc à celui-ci que revient l'honneur d'avoir, le premier, *publié* un cours où l'analyse est fondée explicitement sur ses vrais principes, les principes de l'arithmétique. (P. M.)

ries classiques relatives aux courbes et aux surfaces. « L'existence des séries en question, aux points *ordinaires* des figures, délimite, avec une précision inconnue jusqu'ici, les cas où la validité des propositions générales est assurée. L'intervention de la forme spéciale de leurs restes apporte pour la première fois une rigueur aisément affermie aux raisonnements qui conduisent à la mesure des grandeurs géométriques. Au lieu d'être définis par des expédients sans portée ni cohérence, les tangentes, plans tangents, enveloppes, normales et plans normaux, cercles de courbure, etc, sont uniformément rattachés aux contacts de divers ordres, qui sont réalisables entre des figures quelconques et les figures élémentaires. Ces relations de contact, objet dans leur ensemble d'une théorie préliminaire qui rapproche quantité de faits particuliers et réduit à de brèves énonciations les mentions détaillées à en faire ultérieurement, sont introduites par la considération de l'identité qui peut se manifester, plus ou moins loin, entre quelques premiers termes des développements des fonctions remplissant des rôles similaires dans la représentation analytique de deux figures. Quant aux infiniment petits, qui défilent sans merci dans la plupart des traditions classiques, *incapables pourtant de figurer dans une formule appropriée au calcul numérique*, ils ont disparu définitivement, comme les notions auxquelles ils servent de véhicule, restituant aux dérivées, coefficients des séries dont il s'agit, une place qu'ils avaient trop longtemps usurpée ». Voici le sommaire de l'ouvrage :

AVERTISSEMENT. — CHAP. I. *Préliminaires. Rectifications. Quadratures. Cubatures.* Généralités sur la représentation analytique des figures géométriques. Mesure des longueurs (courbes). Mesure des aires. Mesure des volumes. — CHAP. II. *Contacts en général.* Définition et premières propriétés d'un contact entre deux figures. Contact entre deux figures, considéré comme disposition limite de contacts d'ordres moindres en des points infiniment voisins. Figures osculatrices en général. — CHAP. III. *Contacts des surfaces et des lignes avec les figures du premier degré.* Plan tangent, tangentes et droites osculatrices à une surface. Tangente, plans tangents, plan osculateur à une ligne. — CHAP. IV. *Figures enveloppes.* Lignes à un ou deux paramètres. Surfaces à un ou deux paramètres. — CHAP. V. *Contacts du premier ordre entre la sphère, ou le cercle, et des figures données.* Normales et plans normaux. Trajectoires orthogonales. — CHAP. VI. *Propriétés saillantes des surfaces usuelles.* Cylindres et cônes. Autres surfaces développables. Surfaces gauches. Surfaces de révolution. — CHAP. VII. *Contacts d'ordres supérieurs d'une ligne avec le cercle et la sphère.* Cercle osculateur. Courbure. Sphère osculatrice. Torsion. Développées. — CHAP. VIII. *Questions se rattachant aux contacts du second ordre d'une surface avec le cercle et la droite.* Distribution des cercles et droites ayant un contact du second ordre avec une surface, en un même point. Lignes asymptotiques. Trajectoires conjuguées. Lignes de courbure. — ADDITION. *Principales formules en coordonnées polaires.*

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 594.

(Voir *Mathesis* (2), VII, p. 264).

Discuter le système d'équations

$$(1)\qquad A\cos x\cos y + B\sin x\sin y + C(\cos x + \cos y) + D(\sin x + \sin y) + E = 0,$$

$$(2)\qquad A\cos y\cos z + B\sin y\sin z + C(\cos y + \cos z) + D(\sin y + \sin z) + E = 0,$$

$$(3)\qquad A\cos x\cos z + B\sin x\sin z + C(\cos x + \cos z) + D(\sin x + \sin z) + E = 0.$$

(J. Neuberg).

Les trois équations étant les mêmes à la notation près, nous étudions d'abord l'équation (1) en considérant x et y comme des variables. Pour plus de clarté, nous désignons par X, Y, Z les extrémités de trois arcs x, y, z pris sur la circonférence trigonométrique à partir de l'origine des arcs.

L'équation (1) est symétrique en x et y; si l'on pose

$$p = A\cos x + C,\quad q = B\sin x + D,\quad r = C\cos x + D\sin x + E,$$

elle prend la forme

$$(4)\qquad p\cos y + q\sin y + r = 0,$$

ou encore

$$(5)\qquad (p^2+q^2)\cos^2 y + 2pr\cos y + r^2 - q^2 = 0,$$

$$(6)\qquad (p^2+q^2)\sin^2 y + 2qr\sin y + r^2 - p^2 = 0.$$

Donc à un point quelconque X correspondent deux points Y, Y'. Les points Y, Y' coïncident si l'on a

$$(7)\qquad p^2r^2 - (p^2+q^2)(r^2-q^2) = 0,\quad \text{ou}\quad p^2+q^2-r^2 = 0.$$

L'un des points Y, Y' peut se confondre avec X; pour que cela ait lieu, le point X doit satisfaire à l'équation

$$(8)\qquad A\cos^2 x + B\sin^2 x + 2C\cos x + 2D\sin x + E = 0,$$

que l'on obtient en faisant $y = x$ dans (1). Il existe donc quatre positions X_1, X_2, X_3, X_4 de X qui se confondent avec l'un des points correspondants Y, Y'; nous appelons les seconds de ces points respectivement Y_1, Y_2, Y_3, Y_4.

Cela posé, on satisfait d'abord aux équations (1), (2), (3) en prenant

pour le triple XYZ soit l'un des triples $X_1X_1X_1$, $X_2X_2X_2$, $X_3X_3X_3$, $X_4X_4X_4$, soit l'un des triples $X_1X_1Y_1$, $X_2X_2Y_2$, $X_3X_3Y_3$, $X_4X_4Y_4$.

Examinons maintenant si une solution des équations (1), (2), (3) peut se composer de trois arcs inégaux x, y, z. Les valeurs de y et z en fonction de x doivent être les deux solutions de (4); donc si l'on se rapporte aux équations (5) et (6), on a

$$\cos y + \cos z = -\frac{2pr}{p^2+q^2}, \quad \cos y \cos z = \frac{r^2-q^2}{p^2+q^2},$$

$$\sin y + \sin z = -\frac{2qr}{p^2+q^2}, \quad \sin y \sin z = \frac{r^2-p^2}{p^2+q^2}.$$

Ces relations ramènent l'équation (2) à

$$A(r^2-q^2) + B(r^2-p^2) - 2Cpr - 2Dqr + E(p^2+q^2) = 0.$$

En substituant les valeurs de p, q, r, on trouve

$$\{A(AE-AB-C^2)+BC^2\}\cos^2 x + \{B(BE-AB-D^2)+AD^2\}\sin^2 x + 2(AE+BE-AB-C^2-D^2)(C\cos x + D\sin x) + E(AE+BE-C^2-D^2) - BC^2 - AB^2 = 0.$$

Si l'on fait

$$AE+BE-AB-C^2-D^2 = \Delta,$$

et qu'on ajoute aux parenthèses multipliant A, B, E les termes nécessaires pour avoir Δ, la même équation prend la forme

$$(A\Delta + BC^2 + AD^2 - ABE)\cos^2 x + (B\Delta + AD^2 + BC^2 - ABE)\sin^2 x + 2\Delta(C\cos x + D\sin x) + E\Delta - (BC^2 + AD^2 - ABE) = 0,$$

ou simplement

$$(9) \qquad \Delta(A\cos^2 x + B\sin^2 x + 2C\cos x + 2D\sin x + E) = 0.$$

Si l'on égale à zéro la parenthèse, on trouve pour X les points X_1, X_2, X_3, X_4 et pour YZ les couples X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3, X_4Y_4; cette solution a déjà été rencontrée ci-dessus.

Si les coefficients A, B, C, D, E satisfont à l'égalité $\Delta = 0$, la valeur de x est indéterminée; par conséquent, les points Y et Z qui correspondent à un point quelconque X vérifient l'équation (2).

Remarque. La question 594 se rattache à la théorie des polygones de Poncelet. Lorsque le point X parcourt la circonférence trigonométrique, les cordes XY, XY′ enveloppent une conique Σ. Si pour une position de X, la corde YY′ touche cette conique, cela arrive pour une position quelconque de X.

On peut *séparer* les variables dans l'équation (1). En effet, si l'on désigne par X et par Y les dérivées partielles du premier membre de (1), par rapport à x ou à y, on a

$$X dx + Y dy = 0.$$

Mais avec les notations adoptées ci-dessus, on a

$$-r = p \cos y + q \sin y,$$
$$Y = -p \sin y + q \cos y,$$

d'où en faisant la somme des carrés de ces équations,

$$Y = \sqrt{p^2 + q^2 - r^2}.$$

Y est ainsi exprimé en fonction de x seul. Donc si p', q', r' désignent les quantités

$$A \cos y + C, \quad B \sin y + D, \quad C \cos y + D \sin y + E,$$

on a

$$\frac{dx}{\sqrt{p^2 + q^2 - r^2}} + \frac{dy}{\sqrt{p'^2 + q'^2 - r'^2}} = 0. \qquad \text{(J. N.).}$$

Solution partielle par M. Van Dorsten.

×Question 1041.

(Voir *Mathesis*, (2) V, pp. 240 et 264).

Démontrer que l'équation

$$2x = \frac{(x-a)(x-b)}{x-c} + \frac{(x-b)(x-c)}{x-a} + \frac{(x-c)(x-a)}{x-b}$$

a pour racines

$$\tfrac{1}{2}(a+b+c+\sqrt{a^2-(b-c)^2}+\sqrt{b^2-(c-a)^2}+\sqrt{c^2-(a-b)^2}). \quad (1)$$

les radicaux étant pris avec des signes convenables. (J. Neuberg).

Solution par M. Seligmann. Posons

$$x-a=m, \quad x-b=n, \quad x-c=p;$$

l'équation prendra la forme

$$2mnpx = m^2n^2 + n^2p^2 + p^2m^2;$$

d'où, en ajoutant aux deux membres $-2mnp^2 - 2mn^2p + 2m^2np$,

$$2mnp(x+m-n-p) = (mn + mp - np)^2.$$

Or $x+m-n-p=b+c-a$; par suite,

$$mn+mp-np=\sqrt{b+c-a}\sqrt{2mnp}.$$

Posons encore

$$\sqrt{b+c-a}=\alpha,\quad \sqrt{a+c-b}=\beta,\quad \sqrt{a+b-c}=\gamma,$$

où α, β, γ, $\sqrt{2mnp}$ représentent *l'une* des deux déterminations du radical correspondant.

L'équation précédente et les deux analogues prendront la forme

$$mn+mp-np=\alpha\sqrt{2mnp},$$
$$np+nm-mp=\beta\sqrt{2mnp},$$
$$pm+pn-mn=\gamma\sqrt{2mnp},$$

ou, en les combinant deux à deux par addition,

$$2mn=\sqrt{2mnp}\,(\alpha+\beta),\qquad 2np=\sqrt{2mnp}\,(\beta+\gamma),$$
$$2mp=\sqrt{2mnp}\,(\gamma+\alpha);$$

en multipliant ces dernières équations deux à deux, on obtient

$$2n=(\alpha+\beta)(\beta+\gamma),\quad 2p=(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha),\quad 2m=(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta).$$

La dernière égalité donne

$$2(x-a)=\alpha^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b+c-a+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha.$$

Si a, b, c sont les côtés d'un triangle, les quantités α, β, γ sont réelles, et la dernière formule devient (les trois radicaux ou un seul ayant le signe $+$)

$$x=\tfrac{1}{2}(a+b+c+\sqrt{c^2-(a-b)^2}+\sqrt{a^2-(b-c)^2}+\sqrt{b^2-(a-c)^2}).$$

Dans tous les cas, on peut écrire

$$x=\tfrac{1}{2}(a+b+c+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha),$$

pourvu qu'on effectue les produits $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ avec les précautions voulues. Par exemple, si $\alpha=\alpha' i$, $\beta=\beta' i$, $\gamma=\gamma' i$, les quantités α', β', γ' étant des nombres réels et i désignant $\sqrt{-1}$, on a

$$x=\tfrac{1}{2}(a+b+c-\alpha'\beta'-\beta'\gamma'-\gamma'\alpha'),$$

où $\alpha'\beta'=\sqrt{c^2-(a-b)^2}$, etc. En donnant à α', β', γ' tous les signes

possibles, on trouve la formule (1), les trois radicaux ou un seul ayant le signe —.

M. Dépaez a résolu la même question en posant

$$b+c-a=\alpha,\quad a+c-b=\beta,\ a+b-c=\gamma,$$

$$x=\frac{y+a+b+c}{2}=\frac{y+\alpha+\beta+\gamma}{2},\quad x-a=y+\alpha,\text{ etc.},$$

ce qui conduit à une équation du 4e degré en y résoluble par extraction de racine carrée.

La question 1041 nous a été suggérée par la résolution du système classique

$$x^2+(y-z)^2=a,\quad y^2+(x-z)^2=b,\quad z^2+(x-y)^2=c, \qquad (A)$$

que l'on peut ramener à la forme

$$u-a=2yz,\quad u-b=2zx,\quad u-c=2xy,$$

u désignant la somme $x^2+y^2+z^2$. Mais le dernier système donne, si l'on considère pour un instant u comme connu,

$$2x^2=\frac{(u-b)(u-c)}{u-a},\quad 2y^2=\frac{(u-c)(u-b)}{u-b},\quad 2z^2=\frac{(u-a)(u-b)}{u-c};$$

en ajoutant ces équations membre à membre, on trouve l'équation proposée.

D'autre part, on déduit de (A) :

$$a+b-c=(x+y-z)^2,\quad \text{etc.} \qquad (J.\ N.)$$

Question 1156.

(Voir *Mathesis* (2), t. VIII, p. 31).

On considère, dans un cercle de centre O, *un rayon fixe* OA *et un rayon variable* OM :

1° *Le lieu du centre* S *des symédianes du triangle* OAM *est une ellipse*;

2° *Il existe, outre le point* S, *trois autres points du plan du triangle* OAM, *tels que leurs distances aux côtés de ce triangle sont proportionnelles aux longueurs de ces côtés. Le lieu de ces points se compose d'une hyperbole équilatère et de deux lignes droites.* (E. N. Barisien.)

Solution par M. G. Gérard (*Liège*). Cherchons d'abord le lieu des points de la seconde partie de la question ; ce sont les sommets S′, S″, S‴ du triangle formé par les tangentes en O, A, M au cercle circonscrit à OAM. Soit A′ l'autre extrémité du diamètre OA : les sommets S‴, S″ opposés à M, A parcourent évidemment les perpendiculaires élevées sur AA′ au milieu de OA et de OA′, car S‴O = S‴A = S″O.

Ensuite, le triangle OAM étant isoscèle, OS′ est en même temps symédiane et bissectrice de l'angle AOM. Si nous appelons α l'angle de S′AS‴ avec OA, nous aurons : $\alpha + \text{AOS}' = \text{OAM} + \text{AOS}' = 1$ droit. Donc S′ décrit une hyperbole équilatère dont OA est l'axe transverse.

Maintenant, le point S est déterminé par l'intersection des droites OS′, AS″. Mais S″OS‴ étant perpendiculaire à OS′, S est le troisième sommet d'un triangle rectangle variable, S″OS, qui tourne autour du sommet de l'angle droit O, tandis que l'hypoténuse tourne autour d'un point fixe A et que le deuxième sommet glisse sur une droite perpendiculaire à OA. Donc, d'après un théorème connu, le lieu de S est une ellipse de grand axe OA.

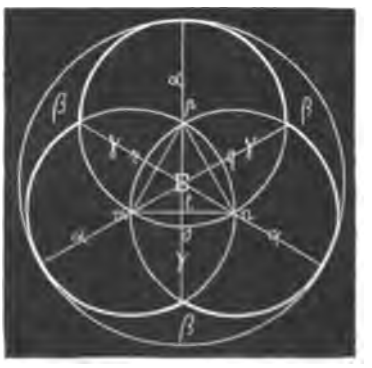
Autres solutions géométriques par M. Droz et Déprez ; solution analytique par M. Soons. M. Déprez trouve que les points de Brocard du triangle OAM décrivent des podaires de coniques.

×Question 1176.

(Voir *Mathesis* (2) VIII, p. 152).

On donne un triangle équilatéral de côté a. Des sommets du triangle comme centres, avec a pour rayon, l'on décrit trois circonférences A. *On trace ensuite la circonférence circonscrite aux trois premières. On détermine ainsi trois groupes de trois figures égales à périmètre curviligne, dont on propose d'évaluer les surfaces.* (H. Brocard).

Solution par C. Vandevelde. Soient α, β, γ, les aires des trois surfaces curvilignes désignées par les mêmes lettres sur la figure : B l'aire du triangle curviligne *pqnsmr*, R le rayon de la circonférence circonscrite aux trois premières. On trouve successivement



$$\alpha + 2\gamma + B = \pi a^2, \qquad (1),$$

$$3(\alpha + \beta + \gamma) + B = \pi R^2, \qquad (2),$$

B = sect. *mpqn* + segm. *mrp* et *mns*

$$= \frac{\pi a}{3}\frac{a}{2} + 2\left(\frac{\pi a}{3} \times \frac{a}{2} - \frac{a}{2} a \cos 30°\right)$$

$$B = \frac{a^2}{2}(\pi - \sqrt{3}) \qquad (3),$$

$B + \gamma = 2$ secteurs *mpqn* + 2 segments *mrp*,

$$B + \gamma = \tfrac{1}{2} a^2 (\tfrac{5}{6}\pi - \sqrt{3}), \qquad (4),$$

$$R = a + \tfrac{2}{3} pt = a + \tfrac{2}{3} a \cos 30°.$$

$$R = a\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right). \qquad (5).$$

Les égalités (3) et (4) donnent

$$\gamma = \text{secteur } mpqn = \tfrac{1}{6}\pi a^2; \qquad (5');$$

des relations (1), (3) et (5'), on tire

$$\alpha = \frac{1}{2} a^2 \left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{3}\right); \qquad (5'');$$

enfin, de (5''), (2), (5'), (3) et (5), on déduit

$$\beta = \frac{1}{2} a^2 \left(\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{\pi}{9} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Remarques. I. L'aire du trilobe tracé est

$$B + 3\alpha + 3\gamma = a^2 (\tfrac{3}{2}\pi + \sqrt{3}).$$

II. Des tracés analogues, en partant du carré, du pentagone, de l'hexagone réguliers, etc., conduisent à 4 groupes de 4 surfaces égales, 5 groupes de 5 surfaces égales..., etc., dont on pourrait obtenir les aires de façon semblable.

Ont résolu la même question MM. Coppiters, Déprez, Barisien, Delahaye et Plakhovo.

Question 1177.

(Voir *Mathesis*, (2) VIII, p. 176).

Soit M *un point variable situé sur une ellipse* E *donnée. Si* Δ *et* Δ' *sont les deux droites symétriques du grand et du petit axe de* E *par rapport à la tangente en* M, *le rapport des aires des courbes enveloppes de chacune des droites* Δ *et* Δ' *est égal au rapport du petit axe au grand axe de* E.

(E. N. Barisien.)

Solution par M. R. Buysens. En faisant varier t de $-\infty$ à 0, la droite représentée par l'équation

$$y - tx = \sqrt{a^2 t^2 + b^2},$$

enveloppe le quart de l'ellipse compris dans l'angle des axes. Si α est

l'angle que cette droite fait avec l'axe des x, la droite Δ fera avec le même axe l'angle $2\alpha - 180°$; son coefficient angulaire sera

$$\operatorname{tg}(2\alpha - 180°) = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2t}{1 - t^2},$$

et elle aura pour équation :

$$(1 - t^2)y - 2tx = 2\sqrt{a^2t^2 + b^2}.$$

Cette équation, jointe à l'équation dérivée :

$$-ty - x = \frac{a^2t}{\sqrt{a^2t^2 + b^2}},$$

fournit les coordonnées du point caractéristique, savoir :

$$y = \frac{-t(a^2t^2 + a^2 + 2b^2)}{(1 + t^2)\sqrt{a^2t^2 + b^2}}, \quad x = \frac{2b^2}{(1 + t^2)\sqrt{a^2t^2 + b^2}}.$$

On a pour l'aire de la courbe (Δ), en posant $\frac{b}{a} = q$,

$$4\int_{t=-\infty}^{t=0} x\,dy = 8b^2 \int_{-\infty}^{0} \frac{t^2(a^2t^2 + a^2 + 2b^2)(3a^2t^2 + a^2 + 2b^2)}{(1 + t^2)^5(a^2t^2 + b^2)^2}\,dt =$$

$$8b^2 \int_{-\infty}^{0} \frac{t^2(t^2 + 1 + 2q^2)(3t^2 + 1 + 2q^2)}{(1 + t^2)^5(t^2 + q^2)^2}\,dt = 2\pi b\,\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}.$$

Il suffit de permuter a et b dans ce résultat, pour trouver l'aire de la courbe (Δ'); le théorème en résulte immédiatement.

Note. Il est intéressant de déterminer *géométriquement* le point de contact de Δ avec son enveloppe. Pour cela, considérons deux tangentes infiniment voisines de l'ellipse; soient T, T′ les points où elles coupent le grand axe, N leur point de rencontre, P le point où se coupent les symétriques du grand axe par rapport aux droites NT, NT′. Le point N est à égale distance des droites TT′, PT, PT′; si l'on passe à la limite, on voit que le point de contact M de TN avec l'ellipse est équidistant de TT′ et du point caractéristique de TN; ce dernier point est donc le symétrique du pied de l'ordonnée de M par rapport à NT. (J. N.)

QUESTIONS D'EXAMEN.

883. On considère tous les triangles ABC qui ont même bissectrice AD et les sommets B, C sur une même droite. Trouver 1° la relation entre les segments variables DB, DC; 2° la relation entre les côtés variables AB, AC.

1° On élimine l'angle variable A entre les égalités

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\sin\left(D + \frac{A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}} = \sin D \cot\frac{A}{2} + \cos D,$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{\sin\left(D - \frac{A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}} = \sin D \cot\frac{A}{2} - \cos D,$$

ce qui donne

$$\frac{1}{BD} - \frac{1}{DC} = 2\frac{\cos D}{AD};$$

relation qui se déduit immédiatement de la division harmonique (BCDD'), où AD' est la bissectrice extérieure.

Si AH est la hauteur et qu'on pose $DB = \beta$, $DC = \gamma$, $DH = \delta$, on peut aussi observer que

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{h^2 + (\beta - \delta)^2}}{\sqrt{h^2 + (\gamma + \delta)^2}}, \text{ etc.}$$

2° Soit $HD = m$ (quantité connue); on a

$$\frac{\sqrt{c^2 - h^2} + m}{\sqrt{b^2 - h^2} + m} = \frac{c}{b}.$$

884. Résoudre l'équation

$$\sqrt{x^2 + ax + b^2} + \sqrt{x^2 - ax + b^2} = m.$$

Quand les racines sont-elles réelles ?

885. Trouver les projections d'un triangle isoscèle dont on donne le sommet A, la grandeur de la hauteur AD, un point K de la base et deux plans parallèles contenant les extrémités de la base. (Soons).

Le pied D de la hauteur se trouve dans le plan P également distant des plans donnés, et dans le plan Q perpendiculaire à AK mené par le point F tel que $AF = \frac{\overline{AD}^2}{AK}$.

On rabat ce dernier plan Q avec l'intersection des plans P et Q. La circonférence décrite du rabattement de A, avec AD comme rayon, coupe l'intersection (P, Q) en un point qui est le rabattement de D. On relève, on joint DK, etc.

886. Déterminer les valeurs de a et de b par la condition que le polynome

$$(a+1)x^4 - (3b-2a-6)x^3 - 17x^2 + (4b-3a-8)x + 15$$

soit divisible par $(x-1)(x-3)$.

887. Trouver, sur une ligne donnée, le point M dont la somme des carrés des distances aux points donnés A, B, C, ... soit un maximum ou un minimum.

La droite joignant M au centre de gravité des points A, B, C, ... doit être normale à la ligne donnée.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1215. Résoudre le système

$$x^2 = ax + by + cz,$$
$$y^2 = ay + bz + cx,$$
$$z^2 = az + bx + cy.$$

Trouver les valeurs des inconnues pour $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$.

(Emmerich).

1216. Étant donnée une ellipse, soient F un de ses foyers, MM' une corde quelconque passant par F, I le milieu de MM', K et K' les foyers de l'ellipse lieu du point I, K étant le foyer le plus rapproché de F. Démontrer les relations

$$MM' + 2IK' = \text{constante}, \quad MM' - 2IK = \text{constante}.$$

(E. N. Barisien).

1217. Calculer la surface d'un triangle sphérique ABC, connaissant le côté $BC = a$, la médiane $AM = \alpha$ et la hauteur $AD = h$.

(Klompers).

1218. On considère les ellipses dont le grand axe $2a$ est constant et telles qu'un foyer F soit fixe, et que le second foyer F' se trouve sur une droite donnée d. Lieux des sommets et des pieds des directrices, enveloppes des deux directrices (Andrien). Chercher l'enveloppe de ces ellipses. (J. N.).

COURBES POLAIRES RÉCIPROQUES DES ÉPICYCLOÏDES ET HYPOCYCLOÏDES;

par V. Jerábek.

On donne une circonférence (O) et deux rayons rectangulaires OX, OY. Après avoir mené deux rayons variables OA, OB tels que l'on ait

$$\textit{angle}\ \mathrm{BOY} = n.\,\mathrm{XOA},$$

n étant une constante, on cherche le point d'intersection M de OA avec la tangente au point B (Dans la figure, $n = \frac{2}{3}$).

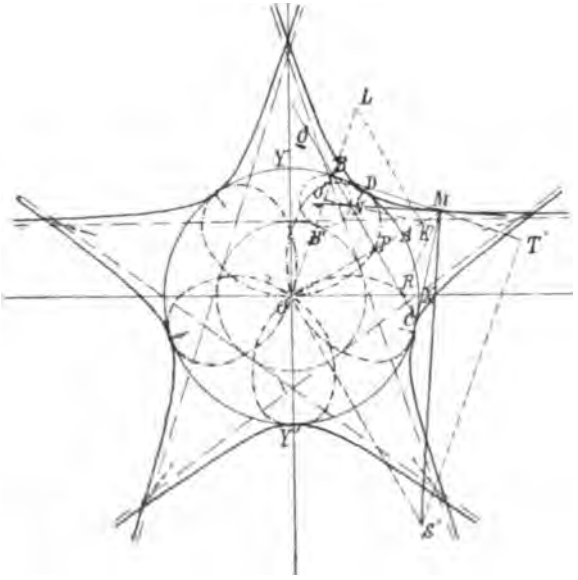


Fig. 1.

1. En posant $\mathrm{OA} = \mathrm{R}$, $\mathrm{OM} = \rho$, *angle* $\mathrm{XOM} = \varphi$, on a : *angle* $\mathrm{BOY} = n\varphi$, *angle* $\mathrm{MOB} = 90^0 - (n+1)\varphi$. Par suite, le triangle rectangle BOM donne l'équation polaire de la courbe (M) :

$$\rho = \frac{\mathrm{R}}{\sin(n+1)\varphi}. \qquad (1)$$

2. La corde polaire de M étant BC et Y′ étant diamétralement opposé à Y, l'angle $\mathrm{Y'OC} = (n+2)\varphi$. Par suite, les points B et C se meuvent

sur la circonférence (O) avec des vitesses qui sont dans le rapport constant $\frac{n}{n+2}$. Il en résulte que *la droite* BC *enveloppe une hypocycloïde ou une épicycloïde suivant que le rapport* $\frac{n}{n+2}$ *est positif ou négatif*. Les rayons du cercle fixe et du cercle roulant sont $(n+1)$ R et $\frac{n}{2}$R, le module est $\frac{2(n+1)}{n}$.

Cette hypo(épi)cycloïde et sa polaire réciproque (M) ont les mêmes axes de symétrie et les mêmes sommets. Les polaires des points de rebroussement de la première courbe sont les asymptotes de la seconde.

3. Cherchons la tangente MN au point M. On sait que le point de contact Q de BC avec son enveloppe divise BC dans le rapport $\frac{n}{n+2}$. La droite MN est la polaire de Q; donc le point N où elle rencontre BC donne la division harmonique (BCQN), d'où

$$\frac{BN}{CN} = -\frac{n}{n+2}.$$

On peut aussi chercher les vitesses de circulation du point M autour des points O et B, et appliquer la règle du quadrilatère des vitesses. Si on fait tourner les vitesses de 90° autour de leur point d'application, on peut représenter la première par MO, la seconde par $MT' = n.BN$; alors la diagonale MS' du quadrilatère OMT'S' rectangle en O et en T' est la normale.

4. D'après l'équation (1), on a $\rho = R$ pour $\varphi = \frac{90^\circ}{n+1}$; donc si l'on construit l'angle $XOD = \frac{90^\circ}{n+1}$, on a un point D de la courbe situé sur la circonférence (O); OD est un axe de symétrie, et D un sommet des deux courbes (M) et (Q). On trouve facilement

$$\textit{angle}\ AOD = \frac{90^\circ}{n+1} - \varphi, \quad \textit{angle}\ DOB = n\left(\frac{90^\circ}{n+1} - \varphi\right);$$

par suite,

$$\frac{\textit{angle}\ DOB}{\textit{angle}\ AOD} = n, \quad \frac{\textit{angle}\ DOB + \textit{angle}\ AOD}{\textit{angle}\ DOB} = \frac{n+1}{n},$$

ou

$$\textit{angle}\ AOB = \frac{n+1}{n} DOB.$$

Partageons le rayon OB au point B′ dans le rapport $\frac{BB'}{B'O} = n$; alors $BB' = \frac{n}{n+1} BO$. Comme on a aussi

$$\frac{BN}{CN} = -\frac{n}{n+2}, \text{ d'où } BN = \frac{n}{2(n+1)} BC = \frac{n}{n+1} BP,$$

B′N est parallèle à OP et, par suite, perpendiculaire à BC. Le cercle BNB′ touche les cercles décrits du centre O avec les rayons OB′ et OB, et l'on a, successivement,

$$\text{arc } BN = BB' \times \text{angle } BB'N = BB' \times \text{angle } BOA = BB' \times \frac{n+1}{n} \text{angle } BOD$$
$$= BO \times \text{angle } BOD = \text{arc } BD.$$

Il résulte de là que le point N décrit une hypo(épi)cycloïde, ayant pour développée la courbe (Q).

5. Le milieu P de la corde BC décrit une courbe inverse de la ligne (M) et représentée par l'équation

$$\rho = R \sin (n+1) \varphi.$$

La tangente en P et la droite MN ont des directions symétriques par rapport au rayon OPM ; donc si R est le symétrique de N par rapport à P, la tangente en P est parallèle à MR.

La courbe (P) *est une hypo(épi)cycloïde allongée, ayant les mêmes axes de symétrie et les mêmes sommets que la courbe* (M). En effet, soit O′ le centre du cercle BNB′ ; le rayon O′N coupe OP en un point K, et la perpendiculaire en K sur OP rencontre OO′ en un point L ; B′N étant parallèle à OP, et O′B′ égal à O′N, on a KO′ = OO′ = O′L. Si donc le cercle BNB′, en roulant sur le cercle fixe (XAB), engendre l'hypo(épi)-cycloïde (N), le point L engendre une hypo(épi)cycloïde allongée, et il en est de même du point K, le rapport $\frac{OP}{OK} = \frac{OB}{OL}$ étant constant.

La courbe (P) est aussi la podaire de l'hypocycloïde (épicycloïde) (N) par rapport au centre O ; donc *cette podaire est une hypocycloïde (épicycloïde) allongée.*

6. Le cercle de courbure de la ligne (M) en M est l'inverse du cercle de courbure de la ligne (P) en P, et les centres de ces cercles sont en ligne droite avec O. L'un de ces centres détermine facilement l'autre.

7. Soit Q′ l'intersection de OQ avec la polaire MN du point Q ; Q′

est la projection de O sur MN, et l'on a : $OQ.OQ' = R^2$. Par conséquent, la *podaire*(Q') *de la courbe* (M) *est la courbe inverse de l'hypo(épi)-cycloïde* (Q). Le centre de courbure en Q' résulte très-simplement de celui de la courbe (Q).

8. Cherchons l'enveloppe de la droite MQ. Puisque MQ est la polaire de N par rapport au cercle (O), son enveloppe est une polaire réciproque de l'hypocycloïde (N). Le point de contact de MQ est sur la perpendiculaire élevée en O sur OM.

9. Examinons maintenant quelques cas particuliers.

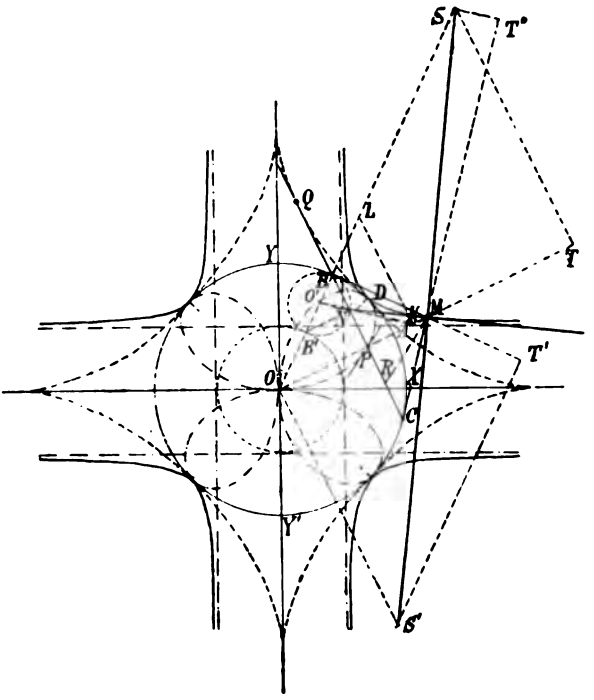


Fig. 2.

1° Si $n = 1$ (fig. 2), les équations des courbes (M) et (P) sont

$$\rho = \frac{R}{\sin 2\varphi}, \quad \rho = R \sin 2\varphi,$$

ou

$$R^2(x^2 + y^2) - 4x^2y^2 = 0, \quad (x^2 + y^2)^2 - 4R^2x^2y^2 = 0.$$

Les deux courbes ont pour axes de symétrie les droites OX, OY et les bissectrices des angles de ces axes. Les asymptotes de la première courbe ont pour équations $x = \pm \frac{1}{2} R$, $y = \pm \frac{1}{2} R$. ; O est un point isolé (point double ombilical). La courbe (P) est la rosace à quatre folioles; les courbes (Q) et (N) sont des hypocycloïdes à quatre rebroussements (astroïdes).

La courbe (M) est aussi le lieu des milieux des segments interceptés sur les tangentes d'un cercle par deux diamètres rectangulaires fixes.

2° Si $n = 2$, les courbes (M) et (P) ont pour équation

$$\rho = \frac{R}{\sin 3\varphi}, \quad \rho = R \sin 3\varphi,$$

ou

$$y(3x^2 - y^2) - R(x^2 + y^2) = 0, \quad (x^2 + y^2)^2 - Ry(3x^2 - y^2) = 0.$$

La première est la trisectrice de M. de Longchamps (*Mathesis*, (I), VIII, p. 5); la seconde est la *rosace trifolium*. Les courbes (Q) et (N) sont des hypocycloïdes à trois rebroussements.

3° Soit $n = \frac{1}{3}$. On a les équations

$$\rho = \frac{R}{\sin \frac{3\varphi}{2}}, \quad \rho = R \sin \frac{3\varphi}{2},$$

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2R^2)^2 - x^2(3y^2 - x^2)^2 = 0,$$
$$(x^2 + y^2)^3 [2(x^2 + y^2) - R^2]^2 - R^4 x^2 (x^2 - 3y^2)^2 = 0.$$

La courbe (M) est donc une *sextique* caractérisée par ces propriétés : 1° Elle a un point isolé (point double ombilical) en O; elle possède six axes de symétrie et six points doubles qui sont des sommets d'un hexagone régulier (de rayon $R\sqrt{2}$); 3° elle a six asymptotes qui sont les côtés d'un hexagone régulier (d'apothème $\frac{2}{3} R$).

L'hypocycloïde allongée (P) est une courbe isotropique du 10e ordre, avec un point sextuple en O et six points doubles qui sont les sommets d'un hexagone régulier.

Les courbes (Q) et (N) sont les hypocycloïdes à 6 rebroussements.

4° $n = -\frac{1}{2}$ (fig. 3). Les équations des courbes (M) et (P) sont

$$(x^2 + y^2)(y^2 - 4R^2) + 4R^4 = 0,$$
$$4(x^2 + y^2)^3 - 4R^2(x^2 + y^2)^2 + R^4 y^2 = 0.$$

La courbe (M) est symétrique par rapport aux axes OX, OY; elle a

deux points doubles $(0, R\sqrt{2})$ et $(0, -R\sqrt{2})$, deux asymptotes $y = +2R$ et $y = -2R$.

L'épicycloïde allongée (P) est une courbe isotropique ayant deux axes de symétrie et deux points doubles; les courbes (Q) et (N) sont des épicycloïdes à deux rebroussements.

La courbe (M) peut encore être définie ainsi :

La tangente en un point B *d'un cercle* (O) *rencontre un diamètre fixe* OX *en* M'. *La courbe* (M) *est le lieu du symétrique* M *de* M' *par rapport à* B.

Cette courbe peut servir de trisectrice; car l'angle $BOY = \frac{1}{3}\,COY'$, ou $MOC = \frac{1}{3}\,BOC$.

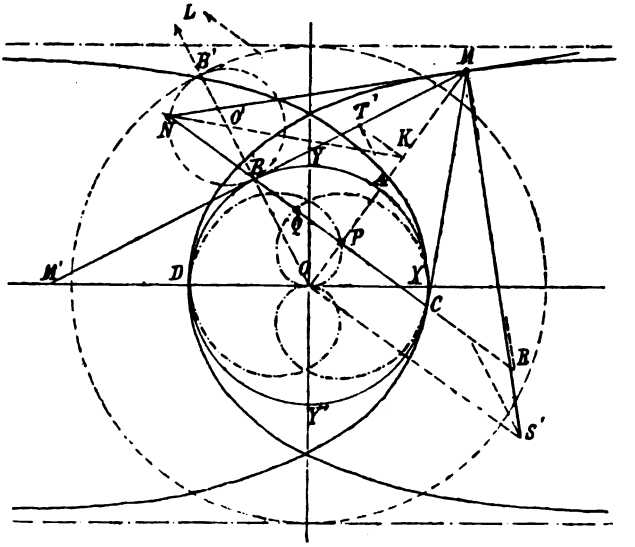


Fig. 3.

5° $n = -\frac{3}{2}$ (fig. 4). Les équations des courbes (M) et (P) sont

$$\rho = \frac{R}{\sin\frac{1}{3}\varphi}, \quad \rho = R\sin\tfrac{1}{3}\varphi,$$

ou

$$(x^2+y^2)\,(y-3R)+4R^3=0,$$
$$4\,(x^2+y^2)^2-3R^2\,(x^2+y^2)+R^3y=0.$$

La courbe (M) est la trisectrice de Maclaurin, avec un point double (0,2R) et une asymptote $y = 3R$. La courbe (P) est une épycycloïde allongée à un point double; les courbes (Q) et (N) sont des cardioïdes.

La courbe (M) admet la définition suivante :

La tangente en un point B *d'une circonférence* (O) *rencontre une tangente fixe en un point* M'. *La courbe* (M) *est le lieu du symétrique* M *de* M' *par rapport à* B.

On peut aussi la considérer comme une cissoïdale du point F par rap-

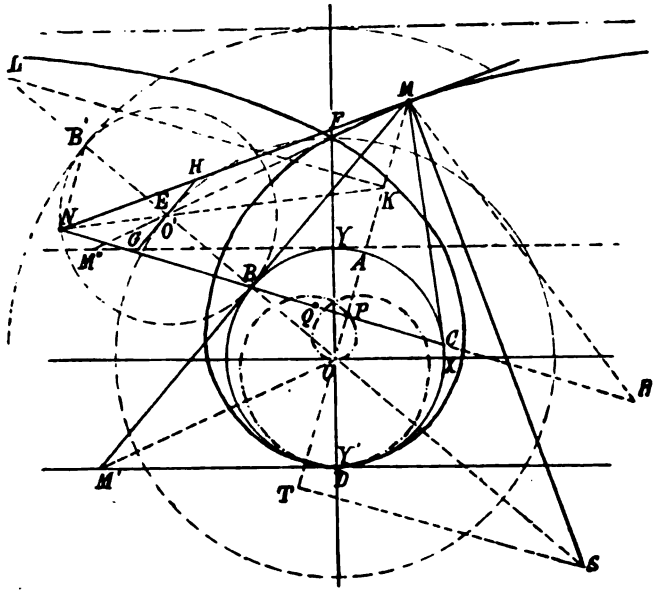


Fig. 4.

port au cercle de centre O et de rayon OF, et à la perpendiculaire élevée au milieu de la distance OF.

5° $n = \frac{2}{5}$ (fig. 1). On trouve les équations

$$\rho = \frac{R}{\sin\frac{5\varphi}{3}}, \quad \rho = R\sin\frac{5\varphi}{3},$$

$$(x^2+y^2)^2(5y-3R)+4(x^2+y^2)(R^2-5y^2)+16y^5=0,$$

$$(x^2+y^2)^3[3R^2-4(x^2+y^2)]-R^2(x^2+y^2)[5y(x^2+y^2)-20y^3]+16R^2y^5=0.$$

La courbe (M) est une quintique qui a un point double ombilical en O, cinq points doubles situés sur une circonférence de rayon 2R et formant un pentagone régulier.

APPLICATIONS DE L'INVERSION,

par M. L. ORLANDO, élève de l'Académie militaire de Turin (Italie).

Quand on applique l'inversion à des constructions connues, on obtient quelquefois des propositions bien peu évidentes, de la même manière qu'en appliquant la dualité, on est souvent amené à établir simplement des vérités curieuses, imprévues.

Considérons une hyperbole équilatère. On sait que la podaire du centre est une lemniscate de Bernoulli, et que cette lemniscate est aussi l'inverse de l'hyperbole proposée, relativement au cercle tangent aux sommets (Voir E. CESÀRO, *Géométrie intrinsèque*, Chap. III). Il en résulte que les circonférences, ayant pour diamètres les rayons vecteurs qui vont du centre aux points d'une hyperbole équilatère, sont enveloppées par une lemniscate de Bernoulli. En effet, les lignes droites qui déterminent la podaire ont pour inverses ces circonférences et leurs diamètres ; des relations angulaires bien connues (CESARO, l. c.) achèvent la démonstration.

On sait que la cardioïde (*épicycloïde proprement dite, monocuspidale*) est l'inverse d'une parabole relativement à un cercle d'inversion dont le centre est le foyer ; le rayon est le demi-paramètre (CESÀRO, loc. cit.). Or, la parabole est l'enveloppe d'un côté d'un angle droit dont le sommet se meut sur une droite fixe, pendant que l'autre côté passe par le foyer ; en invertissant ces constructions, on voit que les circonférences, dont les diamètres sont les rayons vecteurs qui vont d'un point de la circonférence d'un cercle aux autres points, sont enveloppées par une cardioïde. En effet, leurs inverses sont enveloppées par une parabole.

Soit maintenant la spirale logarithmique (*phoenix perpetuo resurgens*). On sait que la podaire est une spirale logarithmique, et l'inverse de même, si l'on prend comme point principal le pôle. La figure polaire réciproque est encore une spirale logarithmique : on peut le démontrer en cherchant l'enveloppe des polaires des points de la courbe, la conique fondamentale étant le cercle même d'inversion. En effet, si

$$r = ke^{m\varphi}$$

est l'équation de la spirale, la polaire du point (r, φ) aura pour équation

$$r_1 \cos(\varphi_1 - \varphi) = \frac{R^2}{ke^{m\varphi}} \quad \text{ou} \quad ke^{m\varphi} r_1 \cos(\varphi_1 - \varphi) = R^2.$$

Éliminant φ entre cette équation et la suivante

$$r_1 mke^{m\varphi} \cos(\varphi_1 - \varphi) + ke^{m\varphi} r_1 \sin(\varphi_1 - \varphi) = 0,$$

on trouve

$$r_1 = k_1 e^{m_1 \varphi_1}.$$

Transformons maintenant cette proposition : La podaire d'une spirale logarithmique relativement au pôle est une spirale logarithmique. Les circonférences qui ont pour diamètres les rayons vecteurs seront enveloppées par une spirale logarithmique ; et, appliquant la polarité relative au cercle d'inversion, si l'on considère des paraboles, dont les axes passent par un point fixe, tangentes à une spirale logarithmique ayant ce point fixe pour pôle, l'on verra que l'enveloppe des tangentes aux sommets de ces paraboles est une spirale logarithmique. On voit de même que l'enveloppe des paraboles (dont les tangentes aux sommets sont les tangentes à une spirale logarithmique, et dont les axes passent au pôle de cette spirale) est une spirale logarithmique.

NOTES MATHÉMATIQUES.

10. *Sur la question* 1171. (*Mathesis*, (2) IX, p. 52). D étant un point quelconque de la base BC d'un triangle sphérique ABC, si l'on désigne par d l'arc de grand cercle AD et par α, α' les angles BAD, CAD, la formule des deux cotangentes appliquée aux triangles ABD et ACD donne

$$\cot c \sin d - \cot \mathrm{ADB} \sin \alpha = \cos d \cos \alpha$$
$$\cot b \sin d - \cot \mathrm{ADC} \sin \alpha' = \cos d \cos \alpha';$$

d'où, en éliminant $\cot \mathrm{ADB} = -\cot \mathrm{ADC}$:

$$\sin d (\cot c \sin \alpha' + \cot b \sin \alpha) = \cos d \sin \mathrm{A}$$

ou

$$\cot c \sin \alpha' + \cot b \sin \alpha = \cot d \sin \mathrm{A}.$$

Cette relation est connue ; si l'on y fait $\mathrm{A} = 120^\circ$ et $\alpha = \alpha' = 60^\circ$, on trouve la formule de la question 1171. (Déprez).

11. *Sur les coniques homothétiques passant par deux points fixes.* On donne deux points M, N et une ellipse ε ayant pour sommets α, β, α', β', pour centre ω, pour foyers φ, φ'. Considérons une ellipse quelconque E homothétique à ε et passant par M et N ; soient A, B, A′, B′, O, F, F′ les sommets, le centre et les foyers de E.

Le lieu de O est évidemment la droite menée par le milieu P de MN parallèlement au diamètre de ε conjugué avec la direction MN.

Si x, x' sont les abscisses de M, N par rapport aux axes OA, OB, les rayons FM, FN ont pour expression

$$a - \frac{cx}{a}, a - \frac{cx'}{a}; \quad \text{d'où} \quad FM - FN = \frac{c}{a}(x' - x).$$

Or le rapport $\frac{c}{a}$ et la différence $x' - x$ sont des quantités constantes ; donc les foyers F, F' de l'ellipse variable E se meuvent sur une hyperbole η qui a pour foyers les points M, N.

Prenons pour axes coordonnés la droite OP décrite par le centre O et une parallèle quelconque à l'axe OA. Les points F et A ayant même abscisse et des ordonnées OF, OA dont le rapport est constant, le point A décrit une hyperbole.

Plus généralement, si λ et L sont deux points homologues des plans ε et E, le triangle OLF est semblable à ωλφ; on passe donc de F à L en faisant tourner l'ordonnée OF d'un angle constant et en le modifiant dans le rapport Oλ : Oφ. Cette transformation change l'hyperbole η en une autre hyperbole.

Les considérations qui précèdent, s'appliquent aux hyperboles passant par deux points fixes M, N et ayant leurs asymptotes parallèles à deux directions données. (J. Déprez).

BIBLIOGRAPHIE.

Notions complémentaires sur les courbes usuelles, par P. Barbarin, Professeur de Mathématiques élémentaires supérieures au lycée de Bordeaux. Paris, Nony, 1899 (In-8° de 48p., avec 24 fig.). Prix : fr. 0.75.

Cet opuscule, reproduction agrandie de trois articles sur les *Courbes usuelles* insérés au *Journal de Mathématiques élémentaires*, 1894, forme un complément intéressant des notions sommaires que l'on trouve sur les coniques dans le Livre VIII des manuels français de géométrie. Nous en recommandons la lecture aux élèves de nos établissements : un grand nombre de propositions qu'ils établissent par le calcul, sont ici démontrées d'une manière élégante par la géométrie. (J. N.)

Jacob Steiners Lebensjahre in Berlin 1821-1863. Nach seinen Personalakten dargestellt von Professor Dr. Lange. Berlin, Gaertners Verlagsbuchhandlung, 1899 (70 pages in-4°, avec un portrait de Steiner).

Cette brochure a été écrite à l'occasion du 75e anniversaire de la *Friedrichs-Werderschen Oberrealschule*, qui, fondée en 1824 sous le nom de *Gewerbeschule* (école professionnelle), compte Steiner parmi ses professeurs de la première heure (1835-1834). Elle donne sur la carrière du grand géomètre une foule de détails inédits, puisés la plupart dans des actes officiels et offrant un très grand intérêt; sur plusieurs points elle rectifie les biographies antérieures.

Calcul de généralisation, par G. Oltramare, Doyen de la Faculté des Sciences de l'université de Genève. Paris, Hermann, 1899 (VIII — 191 p. gr. in 8e). Prix : 6 francs.

Si l'on convient de traiter l'expression $e^{a\frac{d}{dx}}$ comme une expression dont la puissance n^e, multipliée par $\varphi(x)$, donne pour produit $a^n \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n}$, le théorème de Taylor, ainsi que Lagrange l'a fait remarquer, peut s'écrire ainsi

$$\varphi(x+a) = e^{a\frac{d}{dx}} \varphi(x);$$

cette notation peut même être étendue à une fonction d'un nombre quelconque de variables.

Reprenant la même idée sous une forme un peu différente et avec d'autres notations, l'auteur considère les fonctions uniformes sous une expression symbolique permettant d'effectuer sur elles les principales opérations à l'aide d'un calcul algébrique très simple à effectuer. Les principes de ce *calcul de généralisation* font dépendre l'intégration des équations aux différences et différentielles partielles, soit isolées, soit simultanées, de la simple résolution d'équations algébriques; ils donnent le moyen de reconnaître, d'une manière générale, une limite supérieure du nombre de fonctions arbitraires que peut renfermer l'intégrale complète d'une équation et, dans quelques cas particuliers, le nombre exact de ces fonctions arbitraires. Parmi les autres questions auxquelles M. d'Oltramare a appliqué avec succès sa méthode, nous citons la détermination de certaines intégrales définies que Cauchy a trouvées au moyen de son calcul des résidus, la différentiation et l'intégration à indices fractionnaires, la transformation des séries en intégrales définies, etc.

Encyclopadie der mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen, herausgegeben van Dr Heinr. Burkhardt, o. Professor der Mathematik an der Universität Zurich, und Dr W. Franz Meyer, o. Professor der Mathematik an der Universität Königsberg i. Pr. Leipzig, Teubner, 1898, 1899. Erstes und zweites Heft, 1899 (pages 1-226). Prix de chaque cahier : 3,40 marcs = 4,25 francs.

Nous avons fait connaître (*Mathesis*, pp. 20-21) le plan général de l'Encyclopédie mathématique de MM. Burkhardt et Fr. Meyer. Nous allons analyser sommairement les deux premières livraisons qui ont paru à quelques mois d'intervalle.

Elles renferment six chapitres assez étendus, groupés sous le titre *Arithmétique ;* il faut prendre ce mot, bien entendu, dans un sens assez différent de celui qu'on lui attribue de ce côté du Rhin.

1. *Principes de l'Arithmétique*, par H. SCHUBERT, Professeur à Hambourg (pp. 1-27). L'idée du nombre ; les quatre opérations, le zéro et la loi de permanence : introduction des nombres négatifs et des fractions ; les opérations du troisième ordre (élévation aux puissances, extraction des racines, détermination de l'exposant) au point de vue formel.

En maint endroit, on se trouve ici sur les confins de la philosophie et des mathématiques, particulièrement dans la riche bibliographie que l'on rencontre à chaque page. Nous notons en passant quelques lacunes ou inexactitudes. S. Stevin n'est pas cité à propos des fractions décimales, non plus que Neper sur la virgule ou le point décimal (p. 21) ; Jean de Gmunden (1380-1442) a employé les fractions décimales dans l'extraction de la racine carrée, longtemps avant le XVII^e^ siècle. Ce n'est pas Briggs seul, mais Neper et Briggs qui ont imaginé les logarithmes à base 10 (p. 22). Il est étrange de voir citer Bürgi avant Neper comme inventeur des logarithmes.

Il nous semble que, dans leurs notes historiques, les auteurs de l'Encyclopédie devront se mettre en garde contre la tentation de trop attribuer à l'Allemagne dans le développement des mathématiques. Nulle science n'est plus l'œuvre commune, tant dans ses grandes lignes que dans ses détails, de toutes les nations civilisées, particulièrement de la Grèce ancienne, de l'Italie, de la France, de l'Angleterre et de l'Allemagne.

2. *Théorie des combinaisons, permutations, arrangements : binôme ; théorie des déterminants* ; par N. NETTO, Professeur à l'Université de Giessen (pp. 28-46). Exposé très condensé, en général très complet, de ces diverses théories, avec des indications bibliographiques vraiment précieuses. A la liste des monographies sur les Déterminants, il faut ajouter le *Treatise* de Muir (1882), le meilleur de tous avec celui de Baltzer, puis celui de Suarez et Gasco ; enfin biffer celui de Leboulleux, qui est insignifiant. Les permutations et arrangements sans rencontre (ou discordants) auraient pu recevoir plus de développements (voir *Mathesis*, t. I, p. 27 et III, p. 216).

3. *Nombres irrationnels ; limites ; séries ; produits, fractions continues et déterminants infinis*, par A. PRINGSHEIM, Professeur à l'Université de Munich (pp. 47-146). Le résumé substantiel contenu dans les cent pages consacrées à ces quatre sujets étroitement apparentés équivaut pour les analystes à un vrai Traité sur la matière. M. Pringsheim est, avec M. Cesàro, le géomètre qui, aujourd'hui, connaît le mieux l'histoire et la théorie des séries et, comme tel, on ne pouvait trouver personne plus à même que lui d'exposer l'état actuel de la science sur les nombres irrationnels, l'idée de limite, les produits infinis, les fractions continues illimitées et les déterminants à un nombre infini de lignes et de colonnes. Dans la première partie de cette monographie condensée, il étudie, avec assez de détails, les idées fondamentales de nombre incommensurable et de limite qui ont amené

les géomètres à *arithmétiser* la science mathématique tout entière. Dans la seconde partie, consacrée aux séries et autres *processus* indéfinis, il classe un nombre très grand de notions et de propositions (dont bon nombre lui appartiennent) relatives à la convergence, à la divergence de ces expressions, à leur transformation, à leur calcul approché, etc., etc. Il y a peu de géomètres, croyons-nous, qui ne trouveront pas quelque chose à apprendre dans ce remarquable chapitre de l'Encyclopédie.

Qu'il nous soit permis d'indiquer ici, selon nous, les termes français qui traduisent le mieux les désignations relatives aux séries employées par M. Pringsheim. 1° *Konvergent* = convergent. 2° *Eigentlich divergent* = divergent, dans le sens de Catalan, comme pour la série harmonique. 3° *Uneigentlich divergent* = indéterminé à oscillation finie (1 − 1 + 1 − 1 + etc.) ou infinie (1 − 2 + 3 − 4 + etc.). 4° *Unbedingt convergent* = absolument convergent. 5° *Bedingt convergent* = semi-convergent, dans le sens de Jordan. Cette expression n'est pas parfaite, grammaticalement parlant, mais elle est courte et *conditionnellement convergent* est trop long; elle ne doit pas être confondue avec l'expression *demi-convergent* de Legendre (*Pringsheim*, n°s 31 et 38), qui, selon nous, devrait être abandonnée. 6° *Halbkonvergent* (demi convergent de Legendre) devrait être remplacé par *pseudo-convergent* en français et en allemand. 7° *Gleichmässig konvergent* = équiconvergent, désignation heureuse due à Gilbert, courte et suffisamment expressive.

On sait que Pringsheim a rectifié sur plusieurs points essentiels les données courantes relatives à l'histoire de la théorie des séries; ses notes bibliographiques sont donc importantes à ce point de vue et d'une grande exactitude (la démonstration de Jensen, citée au n° 34, et publiée dans la *Nouvelle Correspondance mathématique*, est extraite du JOURNAL DE MATHÉMATIQUES danois de Zeuthen).

4. *Théories des quantités complexes ordinaires ou supérieures*, par E. STUDY, Professeur à l'Université de Greifswald (pp. 147-183). Ce chapitre est consacré à la théorie des quantités imaginaires, des quaternions et des autres systèmes de quantités complexes analogues. L'auteur indique les relations de cette théorie avec celle des formes bilinéaires et des groupes de transformations. La partie bibliographique nous semble moins riche et moins complète que dans les autres chapitres, soit au point de vue élémentaire, soit au point de vue scientifique pur. N'aurait-il pas fallu citer, par exemple, les clefs algébriques de Cauchy et les *Lezioni di analisi infinitesimali* de Peano?

5. *Théorie des ensembles*, par SCHÖNFLIES, Professeur à l'Université de Goettingue (pp 184-207). 1° Historique. 2° Ensembles transfinis. 3° Ensembles de points. 4° Calcul infinitaire; systèmes les plus généraux de grandeurs. — Résumé des travaux de Georg Cantor et de son école pour faire l'analyse complète de l'idée du continu. Parmi les ouvrages cités, outre celui de Borel, on aurait pu signaler, au moins dans une note, le gros livre de Couturat sur l'infini mathématique.

6. *Groupes finis discrets*, par H. BURKHARDT, Professeur à l'Université de Zurich (pp. 208-226). Résumé de la théorie des substitutions. Si nous ne nous trompons, on trouvera ici pour la première fois, une indication précise et systématique

des résultats auxquels était arrivé Ruffini dans ce domaine, dès la fin du siècle passé ou le commencement de celui-ci (p. 209, l. 5, lire Garbieri).

Comme on le voit, par le rapide aperçu qui précède, les deux premières livraisons de l'Encyclopédie peuvent nous faire bien augurer de l'ouvrage entier. Dans ces six chapitres, consacrés au fond à l'étude des notions de nombre et de grandeur sous toutes les formes, on trouve une science solide, une érudition étendue et sûre, une exposition systématique et aussi claire que le permet la difficulté des sujets abordés. En particulier, la monographie de M. Pringsheim est digne de tout éloge.

Selon nous, l'Encyclopédie a sa place marquée dans la bibliothèque de tous les mathématiciens(*). (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(**).

Question 1042.

(Voir *Mathesis* (2), V, p. 240).

Quand deux paraboles sont inscrites dans un triangle, par les six points de contact on peut faire passer une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes des deux paraboles (Chasles).

Solution par M. V. Retali. Les 8 points où deux coniques sont touchées par leurs 4 tangentes communes, sont placés sur une troisième conique, qui est le lieu des points tels que les tangentes menées aux deux premières coniques forment un faisceau harmonique : si une des 4 tangentes communes est la droite à l'infini, nous avons le théorème proposé.

Remarque. Ce théorème et celui dont il est le corollaire appartiennent à von Staudt et forment les deux derniers énoncés du premier travail de ce géomètre « *Uber die Kurven II Ordnung* ; » Einladungsschrift zu der Feierlichen Preisevertheilung in der K. Studienanstalt zu Nürnberg am 30 August 1831. Druck der Campschen Officin (page 25).

Même solution par MM. Buyssens, Buisseret, Gob, Droz-Farny.

Solution géométrique par M. Gob. Soient α, β, γ et α', β', γ' les points de contact des côtés BC, CA, AB du triangle ABC avec deux paraboles inscrites P, P', et soit A'B'C' le triangle formé par les parallèles menées à BC, CA, AB par A, B, C. D'après des théorèmes connus : 1° les cordes $\beta\gamma$ et $\beta'\gamma'$ passent par A', les cordes $\gamma\alpha$ et $\gamma'\alpha'$ concourent en B', les droites $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ se coupent en C' ; 2° les droites $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ sont parallèles à l'axe de P, et les droites $A'\alpha'$, $B'\beta'$, $C'\gamma'$ sont des diamètres de P'. Appelons m, m' les points à l'infini sur les axes des deux paraboles.

(*) Extrait de la *Revue des questions scientifiques*, avril 1899, 2e série, t. XV, pp. 593-596.

(**) M. Rose a résolu les questions 1156 et 1176.

Cela posé, les points γ', γ, β, α, α', m sont les sommets d'un hexagone de PASCAL; en effet, les côtés opposés $\gamma'\gamma$ et $\alpha\alpha'$, $\gamma\beta$ et $\alpha' m$, $\beta\alpha$ et $m\gamma'$ se coupent aux points B, A', C' qui sont en ligne droite. Donc γ', γ, β, α, α', m sont six points d'une même hyperbole. Par analogie, les hexagones $\gamma\gamma'\beta'\alpha'\alpha m'$, et $\beta'\beta\alpha\gamma\gamma' m$ sont inscriptibles à des coniques. On voit facilement que les trois coniques se confondent.

Solution analytique par MM. A. C., DÉPREZ, MANDART et BUYSENS. Soient, en coordonnées barycentriques,

$$l^2x^2 + m^2y^2 + n^2z^2 - 2lmxy - 2mnyz - 2lnxz = 0, \qquad (1)$$

$$l'^2x^2 + m'^2y^2 + n'^2z^2 - 2l'm'xy - 2m'n'yz - 2l'n'xz = 0 \qquad (2)$$

les équations des deux paraboles. La droite de l'infini, $x + y + z = 0$, rencontre la première courbe en deux points vérifiant l'équation

$$(l+n)^2x^2 + (m+n)^2y^2 + 2(n^2 - lm + mn + nl)\,yz = 0. \qquad (3)$$

Celle-ci doit admettre deux racines égales; ce qui exige que

$$n^2 - lm + mn + nl = \pm (l+n)(m+n):$$

En écartant le signe + qui n'est pas admissible, on trouve

$$l + m + n = 0, \qquad (4)$$

et l'équation (3), qui se ramène à

$$(l+n)x - (m+n)y = 0, \quad \text{ou} \quad mx - ly = 0 \qquad (5)$$

représente le diamètre mené par C.

Par analogie, la seconde courbe donne

$$l' + m' + n' = 0 \quad (4'); \quad m'x - l'y = 0. \qquad (5')$$

Les points de contact des courbes (1) et (2) avec BC, CA, AB ayant pour coordonnées $\left(0, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{l}, 0, \frac{1}{n}\right)$, etc., on trouve par un calcul facile qu'ils appartiennent à la conique

$$ll'x^2 + mm'y^2 + nn'z^2 - (lm' + l'm)\,xy \ldots = 0. \qquad (6)$$

Remplaçant encore z par $-(x+y)$ on obtient

$$(l+n)(l'+n')x^2 + (m+n)(m'+n')y^2$$
$$[2nn' - (lm' + l'm) + (ln' + l'n) + (mn' + m'n)]\,xy = 0;$$

simplifions au moyen des relations (4) et (4') :

$$mm'x^2 + ll'y^2 - (lm' + l'm)\,xy = 0,$$

ou

$$(mx - ly)(m'x - l'y) = 0. \qquad (7)$$

L'équation (7) représente les parallèles menées aux asymptotes de la courbe (6) par le sommet C; ces parallèles, d'après les équations (5) et (5') sont des diamètres des paraboles (1) et (2). Donc...

Autres solutions analytiques par MM. VANDEUREN et BUYSENS.

×Question 1099.

(Voir *Mathesis*, (2) VI, p. 280).

Discuter le système

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= a(x-y)(x-z),\\ y^2 &= b(y-x)(y-z),\\ z^2 &= c(z-x)(z-y). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Solution par M. SINTSOF (Kazan). Nous négligeons la solution évidente $x=y=z=0$. En retranchant la 2e équation de la 1re, et divisant le résultat par le facteur non nul $x-y$, on trouve

$$(a-1)x+(b-1)y-(a+b)z=0. \qquad (2)$$

Par analogie,

$$\left.\begin{aligned} -(b+c)x+(b-1)y+(c-1)z&=0,\\ (a-1)x-(a+c)y+(c+1)z&=0). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Pour que ces nouvelles équations soient compatibles, on doit avoir

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & -a-b \\ -b-c & b-1 & c-1 \\ a-1 & -a-c & c-1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad a+b+c=1. \qquad (4)$$

Cette condition réduit les équations (2) et (3) à une seule

$$(a-1)x+(b-1)y+(c-1)z=0. \qquad (5)$$

Si deux des nombres a, b, c, par exemple a et b, sont égaux à l'unité, on déduit de (5), $z=0$; les équations (1) donnent ensuite $x=0$, $y=0$.

Si un seul, par exemple a, est égal à l'unité, la première des équations (1) et l'équation (5) se réduisent à

$$x(y+z)=yz, \quad (b-1)y+(c-1)z=0,$$

d'où

$$y(b-1)=-z(c-1)=(b-c)x.$$

Supposons a, b, c différents de l'unité. En substituant dans la première des équations (1) la valeur de x tirée de (5) et en simplifiant au moyen de la relation (4) on trouve :

$$(1-b)cy^2+2bcyz+b(1-c)z^2=0,$$

$$\frac{y}{z} = \frac{-bc \pm \sqrt{-abc}}{(1-b)c}, \quad \frac{x}{z} = \frac{-ac \pm \sqrt{-abc}}{(1-a)c}.$$

Question 1102.

(Voir *Mathesis*, (2) VII, p. 31).

Le plan polaire d'un point quelconque M *de la cubique aux pieds des normales menées d'un point* P *à une quadrique rencontre la cubique en trois points formant, avec le point* M(*), *un tétraèdre qui est* 1° *orthocentrique*; 2° *conjugué à la quadrique. De plus l'orthocentre commun de tous ces tétraèdres est le point* P. (A. Cazamian).

Solution par M. Stuyvaert. Etablissons d'abord deux lemmes.

I. Si les extrémités d'un diamètre MP d'une quadrique sont prises comme centres de deux gerbes réciproques engendrant la surface, ces gerbes déterminent, sur un plan μ conjugué au diamètre MP, deux systèmes plans réciproques, dans lesquels la droite de l'infini et la trace O de la droite MP se correspondent doublement. La correspondance des deux gerbes peut être établie d'une infinité de manières; en particulier, on peut faire correspondre aux rayons tangents de la gerbe M les plans diamétraux conjugués dans la gerbe P, et inversement. Alors les deux systèmes plans réciproques de μ sont involutifs, car les points à l'infini et les rayons du faisceau O se correspondent doublement.

II. Nous avons fait voir (**) que la cubique aux pieds des normales menées d'un point P à une quadrique Σ est le lieu des points tels que leurs plans polaires sont perpendiculaires aux rayons qui les joignent au point P.

Soient M un point de cette cubique, μ son plan polaire, n une droite quelconque du plan μ.

Le pôle du plan (Mn) par rapport à Σ est sur μ, par exemple en N; N et n se correspondent dans un système polaire dont la directrice est la conique, réelle ou imaginaire, intersection de μ et de Σ.

Le rayon mené de P et perpendiculaire au plan (Mn) perce Σ en un

---

(*) L'énoncé portait, par erreur, P au lieu de M.

(**) *Mathesis* (2) VIII, p. 105.

point N_1. Mais la droite PN_1 et le plan (Mπ) décrivent deux gerbes réciproques qui engendrent une sphère de diamètre PM. En vertu du lemme II, μ est perpendiculaire à PM; donc il se trouve, par rapport à la sphère et aux gerbes qui l'engendrent, dans le cas du lemme I, c'est-à-dire que N_1 et π se correspondent dans un système polaire, dont la directrice est le cercle, réel ou imaginaire, intersection de la sphère PN et du plan μ.

Les points ayant même polaire dans ces deux systèmes involutifs sont, d'après le lemme II, sur la cubique aux pieds des normales. Or deux systèmes polaires superposés ont un seul triangle autopolaire commun et, si A,B,C sont les points où μ coupe la cubique, ABC est conjugué par rapport à Σ. Comme d'ailleurs M est le pôle du plan ABC, le tétraèdre MABC est également conjugué.

En vertu du lemme II, la droite PA est perpendiculaire à MBC, et de même PB à MAC, PC à MAB, PM à ABC. Donc P est l'orthocentre du tétraèdre MABC.

Question 1181.

(Voir *Mathesis* (2), t. VIII, p. 215).

On considère toutes les paraboles qui touchent une droite donnée OA *en un point fixe* A, *et une droite* OB *au point* B; *la droite* OB *est supposée tourner autour de* O *et la distance* OB *est égale à une longueur connue b. Trouver le lieu des points d'intersection de l'une de ces paraboles avec la bissectrice de l'angle correspondant* AOB. (Chaikevitsch).

Solution par M. H. Lorent. Soient a la distance OA et OC la bissectrice de l'angle AOB. Prenant OB comme axe des x et OA comme axe des y, l'équation de la parabole sera

$$a^2x^2 + b^2y^2 - 2abxy - 2a^2bx - 2ab^2y + a^2b^2 = 0.$$

L'équation de la droite OC étant $y = x$, les coordonnées des points P_1 et P_2 où la droite OC rencontre la parabole sont respectivement, toutes simplifications effectuées,

$$x_1 = y_1 = \frac{ab}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}, \quad x_2 = y_2 = \frac{ab}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}.$$

Les valeurs de x_1 et x_2 sont indépendantes de l'angle AOB. Il en résulte que lorsque la tangente OB tourne autour du point O, b restant

constant, les parallèles à OB menées par les points P_1 et P_2 coupent OA en deux points fixes M_1 et M_2; et comme les distances M_1P_1, M_2P_2 sont constantes et égales respectivement à OM_1 et OM_2,

Le lieu géométrique demandé se compose de deux circonférences passant par le point O, *ayant leurs centres sur la droite* OA *et ayant pour rayons respectivement*

$$\frac{ab}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} \quad \text{et} \quad \frac{ab}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}.$$

Remarques. I. Si b tend vers a, lim. $x_1 = \infty$, et lim. $x_2 = \frac{1}{4}a$. Si $b = a$, la bissectrice OC est l'axe de la parabole; le lieu des points P_1 est la droite de l'infini; le lieu des points P_2, sommets des paraboles considérées, est une circonférence passant par le point O, ayant son centre sur OA et ayant pour rayon $\frac{1}{4}a$.

II. Les coordonnées x_3, y_3 du point Q_1 où AB rencontre la bissectrice OC sont

$$x_3 = y_3 = \frac{ab}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}\sqrt{x_1x_2}.$$

Le lieu des points Q_1 est aussi une circonférence passant par l'origine et ayant son centre sur OA; son rayon est $\frac{ab}{a+b}$. Ce rayon tend vers $\frac{1}{2}a$ si b tend vers a.

III. La corde AB rencontre la bissectrice du supplément de l'angle AOB en un point Q_2 dont les coordonnées sont

$$x_4 = -y_4 = \frac{ab}{a-b} = \sqrt{x_1x_2}$$

Le lieu des points Q_2 est une quatrième circonférence.

Généralisation. I. Soit une conique quelconque, tangente à OA au point A et à OB au point B. Par rapport aux mêmes axes coordonnés, l'équation de cette conique est

$$abxy - \lambda(ax + by - ab)^2 = 0, \qquad (1)$$

λ étant un paramètre arbitraire, égal à $\frac{1}{4}$ dans le cas d'une parabole.

Pour les points P_1 et P_2 où la bissectrice OC rencontre la conique, on trouve

$$x_1 = y_1 = \frac{ab\,[\lambda(a+b) + \sqrt{\lambda ab}]}{\lambda(a+b)^2 - ab}, \quad x_2 = y_2 = \frac{ab\,[\lambda(a+b) - \sqrt{\lambda ab}]}{\lambda(a+b)^2 - ab}.$$

Les points sont réels si $\lambda > 0$; pour $\lambda < 0$, la bissectrice du supplément de l'angle AOB donnerait des points d'intersection réels.

Le lieu des points P_1 et P_2 se compose encore de deux circonférences passant par O et ayant leur centre sur OA, si λ conserve la même valeur quand l'angle AOB varie dans les conditions de la question 1181. Le paramètre λ restera constant, si la conique considérée est assujettie à une nouvelle condition géométrique qui s'exprime par une relation indépendante de l'angle AOB.

Le cas où $\lambda = 1$, rend $x = b$, $y = a$, solution de l'équation (1); celle-ci représente alors des ellipses passant par le sommet opposé à O dans un parallélogramme dont AB est une diagonale.

Le cas où $\lambda = -1$, rend $x = b$, $y = -a$ et $x = -b$, $y = a$ solutions de l'équation (1); celle-ci représente, dans ce cas, des hyperboles dont une corde, double de AB et parallèle à AB, a le point O pour milieu.

Le paramètre λ restera encore constant si les coniques considérées doivent être tangentes à une troisième droite qui déterminera sur OA et OB des segments de longueur constante.

On énoncera aisément les théorèmes qui correspondent à ces cas particuliers; par exemple, celui où $\lambda = -1$:

On considère l'hyperbole tangente à la droite OA *au point fixe* A, *à la droite* OB *au point* B *et dont une corde, double de* AB *et parallèle à* AB, *a pour milieu le point* O. *Si la droite* OB *tourne autour du point* O, *la longueur* OB *restant constante, le lieu géométrique des points d'intersection de cette hyperbole avec la bissectrice du supplément de l'angle* AOB, *se compose de deux circonférences passant par le point* O *et ayant leurs centres sur* OA.

II. Si nous considérons l'intersection des coniques représentées par l'équation (1) avec une droite menée par le point O et par le point qui détermine sur AB (ou sur son prolongement) des segments dont le rapport soit constant, les coordonnées des points d'intersection conserveront la même valeur lorsque OB tournera autour du point B, b étant constant. Le lieu des points d'intersection se composera donc encore de deux circonférences ayant leurs centres sur OA.

En particulier, faisons $\lambda < 0$ et posons $\lambda = -\lambda'$. Nous trouverons, pour coordonnées des points d'intersection de la conique (1) avec la parallèle AB menée par le point O (parallèle qui a pour équation $ax + by = 0$).

$$x = \pm b\sqrt{\lambda'},\quad y = \mp a\sqrt{\lambda'}.$$

Si λ' est supposé constant, les centres des circonférences, lieux géométriques de ces points d'intersection, ne changent pas quand b prend une autre valeur constante, a conservant la même ; les rayons de ces circonférences, au contraire, ne changent pas quand a prend une autre valeur constante, b conservant la même.

III. Enfin, on arriverait à des résultats analogues pour les points d'intersection des coniques (1) avec une droite quelconque déterminant sur OA et OB des segments de longueur invariable.

En particulier, si la conique (1) est tangente à une troisième droite qui détermine sur OA et OB des segments de longueur invariable, le point de contact décrit, dans les conditions de la question 1181, une circonférence qui a son centre sur OA.

Ont résolu la même question MM. Barisien, Lemoine, Déprez et G. Gérard.

Les remarques suivantes sont dues à M. G. Gérard.

I. Construisons le foyer F; les triangles OFA, BFO étant semblables en vertu du théorème de Poncelet, on a

$$\frac{FA}{FO} = \frac{OA}{OB} = \frac{a}{b}.$$

Donc le lieu de F est un cercle.

II. Menons FD perpendiculaire sur AF en F et rencontrant O A en D. Si nous construisons le triangle AF'D symétrique de AFD par rapport à la droite OA, F'D est la directrice ; et comme l'angle AF'D est droit et que F' appartient au cercle lieu de F, cette directrice enveloppe une conique dont A est l'un des foyers.

×Question 1199.

(Voir *Mathesis*, (2) VIII, p. 280, et (2) IX, p. 32).

Dans tout triangle ABC, *la différence des cotangentes des angles que la médiane* AM *fait avec les côtés adjacents est égale à la différence des cotangentes des angles adjacents au troisième côté.* (E. N. Barisien).

Solution par MM. N. Plakhowo et Déprez. On sait que

$$\cot B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4S},\quad \cot C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S};$$

d'où

$$\cot B - \cot C = \frac{c^2 - b^2}{2S}.$$

Ensuite, on a

$$\cot MAB = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AM}^2 - \overline{MB}^2}{2S}.$$

Mais $AB = c$, $\overline{AM}^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2$, $\overline{MB}^2 = \frac{1}{4}a^2$. Portant ces valeurs dans l'équation, nous aurons

$$\cot MAB = \frac{b^2 + 3c^2 - a^2}{4S}.$$

De la même manière,

$$\cot MAC = \frac{3b^2 + c^2 - a^2}{4S}.$$

On en conclut

$$\cot MAB - \cot MAC = \frac{c^2 - b^2}{2S}.$$

En comparant les valeurs des deux différences, nous voyons que

$$\cot MAB - \cot MAC = \cot B - \cot C.$$

Remarque. M. Barisien a proposé lui-même une question dans le *Bulletin de Mathématiques élémentaires*, d'après laquelle

$$\cot MAB = 2\cot A + \cot B, \quad \cot MAC = 2\cot A + \cot C.$$

Faisant la différence, on trouve la relation annoncée. (Plakhovo).

Solution par M. G. Gerard (Liége). Soient N le point de rencontre de AM avec le circonférence ABC, BB′ et CC′ les perpendiculaires abaissées de B et C sur AN. On a

$$AN = BB'(\cot BAM + \cot ANB) = CC'(\cot CAN + \cot ANC);$$

mais

$$BB' = CC', \quad \textit{angle}\ ANB = ACB, \quad \textit{angle}\ ANC = ABC, \text{ etc.}$$

Solution par MM. Emmerich et Soons. Soient λ, μ les angles MAB et MAC. On a successivement

$$\frac{\sin\lambda}{\sin\mu} = \frac{\sin B}{\sin C}, \quad \frac{\sin\mu}{\sin\lambda} = \frac{\sin C}{\sin B},$$

$$\frac{\sin\lambda}{\sin\mu} - \frac{\sin\mu}{\sin\lambda} = \frac{\sin B}{\sin C} - \frac{\sin C}{\sin B},$$

$$\frac{\sin^2\lambda - \sin^2\mu}{\sin\lambda\sin\mu} = \frac{\sin^2 B - \sin^2 C}{\sin B \sin C},$$

$$\sin(\lambda+\mu).\frac{\sin(\lambda-\mu)}{\sin\lambda\sin\mu} = \sin(B+C).\frac{\sin(B-C)}{\sin B\sin C},$$

$$\cot\mu - \cot\lambda = \cot C - \cot B.$$

Ont résolu la même question : MM. Van Dorsten, Sintsof, Delahaye, Rose et François. La démonstration la plus simple est peut-être la suivante : Prolongeons la médiane AM de MA′ = AM et désignons par h la hauteur AD, par M l'angle AMB; les triangles ABM, ACM donnent

$$AM = h(\cot B + \cot M), \quad MB = h(\cot C - \cot M),$$

d'où

$$\cot B - \cot M = \cot C - \cot M, \quad 2\cot M = \cot C - \cot B.$$

Appliquons aussi cette relation au triangle AA′B dont BM est une médiane, etc.

M. Déprez signale la relation correspondante dans le triangle sphérique :

$$\frac{\cot\lambda - \cot B}{\cos^2\frac{1}{2}c} = \frac{\cot\mu - \cot C}{\cos^2\frac{1}{2}b}.$$

Les calculs de MM. Emmerich et Soons sont encore applicables et donnent

$$\frac{\cot\mu - \cot\lambda}{\cot C - \cot B} = \frac{\sin(B+C)}{\sin A}.$$

---

*QUESTIONS D'EXAMEN

888. Trouver les limites vers lesquelles tendent les racines de l'équation

$$(a-3)x^2 - (5a+1)x + 6a = 0,$$

lorsque a croît indéfiniment.

Diviser l'équation par a, etc.

889. Soient SABC, SA′B′C′ deux trièdres supplémentaires; démontrer que les trois plans SAA′, SBB′, SCC′ passent par une même droite.

890. Par les extrémités A et B d'une corde de longueur constante d'un cercle, on mène des droites parallèles à deux directions fixes, qui se rencontrent en M. Chercher le lieu du point M.

Coordonnées des points A et B : $R\cos(\varphi-\delta)$, $R\sin(\varphi-\delta)$ et $R\cos(\varphi+\delta)$, $R\sin(\varphi+\delta)$, où φ est variable et δ constant. Si les axes coordonnés sont parallèles aux bissectrices des angles des directions données, les équations des droites AM, BM sont :

$$y - R\sin(\varphi-\delta) = m[x - R\cos(\varphi-\delta)],$$
$$y - R\sin(\varphi+\delta) = -m[x - R\cos(\varphi+\delta)].$$

Il reste à éliminer φ.

891. Trouver sur une circonférence donnée Δ un point M dont la somme des carrés des distances à deux points donnés A et B soit maximum ou minimum.

Les points cherchés sont les extrémités du diamètre de Δ passant par le milieu C de AB (ou par la projection de C sur le plan de Δ si C n'est pas dans ce plan).

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1219.** Eliminer x, y, z entre les équations

$$bx^2 + axy + cyz = 0,$$
$$cy^2 + byz + azx = 0,$$
$$az^2 + czx + bxy = 0.$$ (EMMERICH).

1220. Démontrer que, si

$$\lim_{n=\infty} n! \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{1} + \frac{a_{n-2}}{1.2} + \frac{a_{n-3}}{1.2.3} + \cdots \right) = l,$$

la série $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ est convergente quel que soit x, et que sa somme tend vers l lorsque x croît indéfiniment. (E. CESARO).

×**1221.** Ramener l'une à l'autre les équations suivantes entre trois arcs x, y, z :

(1) $$\Sigma \sin(y+z)\sin(x-y)\sin(x-z) = 0,$$

(2) $$\Sigma \sin 2x \sin^2(y-z) = 0,$$

(3) $$\Sigma \sin 2x - \Sigma \sin(2y + 2z - 2x) = 0,$$

(4) $$\sin(y+z)\sin(z+x)\sin(x+y) = \sin 2x \sin 2y \sin 2z,$$

(5) $$\Sigma \frac{\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z}{\operatorname{tg} x} = 6.$$ (J. NEUBERG.)

1222. Appelons l, m, n les projections d'une longueur MM' sur les trois côtés BC, CA, AB d'un triangle.

1° Quelle orientation faut-il donner à MM' pour que $l + m + n$ soit maximum?

2° Quelle orientation faut-il donner à MM' pour que $-l + m + n$ soit maximum?

3° Quelle orientation faut-il donner à MM' pour que $l^2 + m^2 + n^2$ soit maximum ou minimum? (E. LEMOINE).

CONTINUITÉ AU SENS ANALYTIQUE ET CONTINUITÉ AU SENS VULGAIRE.

I. Désignons, suivant l'usage, par $E(x)$ le nombre entier positif ou négatif immédiatement inférieur à x, ou égal à x, si x est entier, de manière que, par exemple,

$$E(5\tfrac{4}{6}) = 5, \quad E(5) = 5, \quad E(-5\tfrac{4}{6}) = -6, \quad E(-5) = -5.$$

L'expression

$$\varphi(x) = E\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

est toujours nulle, sauf pour $x = 0$, auquel cas $\varphi(x) = 1$.

La suivante

$$\psi(x) = E\left[\frac{1}{1+E(x^2)}\right],$$

est égale à l'unité, depuis $x = -1$ exclusivement, jusque $x = +1$, exclusivement, nulle pour toutes les autres valeurs de x.

L'expression

$$\chi(x) = 1 - \psi(x)$$

est, au contraire, toujours égale à 1, sauf entre $x = -1$ et $x = 1$, intervalle où elle est nulle.

II. Considérons l'expression suivante

$$F(x) = x\chi(x) + \psi(x)\sin\frac{\pi}{2x+\varphi(x)}.$$

1° *De* $-\infty$ *à* -1 *et de* $+1$ *à* $+\infty$, $\chi(x) = 1, \psi(x) = 0$; donc $F(x)$ est égal à x. En particulier, pour $x = -1$, $F(x) = -1$, pour $x = 1$, $F(x) = 1$.

2° Pour $x = 0$, $\chi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$, $\varphi(x) = 1$; par suite, $F(x) = \sin\pi = 0$.

3° Entre $x = -1$ et $x = 1$, on a $\chi(x) = 0, \psi(x) = 1, \varphi(x) = 0$; par suite, sauf pour $x = 0$,

$$F(x) = \sin\frac{\pi}{2x}.$$

En particulier, pour

$$x = \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{9}, \text{ etc.}$$

$F(x)$ prend les valeurs

$$0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \text{ etc.}$$

en variant d'une manière continue et passant par toutes les valeurs intermédiaires.

Pour des valeurs négatives de x, $\sin(\pi : 2x)$ prend des valeurs égales et de signes contraires à celles dont il vient d'être question.

Si x tend vers $+1$, $\sin(\pi : 2x)$ tend d'ailleurs vers la valeur $+1$ de la fonction $F(x)$ correspondant à $x = 1$; de même, si x tend vers -1, $\sin(\pi : 2x)$ tend vers $-1 = F(-1)$.

III. La fonction $F(x)$ étant égale à x ou à $\sin(\pi : 2x)$, sauf quand $x = 0$, est continue pour toute valeur de x différente de zéro ; mais pour $x = 0$, elle n'est pas continue. En effet, la différence

$$F\left(\frac{1}{4n+1}\right) - F(0) = \sin\left(\frac{4n+1}{2}\right)\pi - 0 = 1,$$

ne tend pas vers zéro, lorsque n croissant indéfiniment, $x = \dfrac{1}{4n+1}$ tend vers 0(*). La différence $F(x) - F(0)$ n'a donc pas zéro pour limite, pour *toute* valeur de x qui a zéro pour limite. La fonction $F(x) = 0$ n'est donc pas continue pour $x = 0$.

IV. Mais cette fonction discontinue en $x = 0$ passe par toutes les valeurs intermédiaires entre deux quelconques de ses valeurs(**). Ainsi, quand x varie de -2 à 3, la fonction $F(x)$ passe de la valeur -2 à la valeur 3, en passant par toutes les valeurs intermédiaires. En effet, quand x varie -2 à -1. $F(x)$ est égal à x, et prend toutes les valeurs de -2 à -1 ; quand x est intermédiaire entre -1 et $+1$, $F(x)$ est égal à $\sin(\pi : 2x)$, (sauf que $F(x) = 0$, si $x = 0$) et, par suite, passe une infinité de fois de la valeur -1 à la valeur 1 et inversement en prenant toutes les valeurs intermédiaires ; enfin, quand x varie de 1 à 3, $F(x)$ est égal à x et prend toutes les valeurs de 1 à 3.

V. Cauchy a démontré rigoureusement, en 1821, le théorème trouvé par induction par Stevin deux siècles auparavant : *Une fonction d'une variable, continue entre deux de ses valeurs, passe par toutes les valeurs intermédiaires.*

M. Darboux a montré en 1875, sur un exemple très curieux, mais

---

(*) Par définition, une fonction $F(x)$ est dite *continue, au sens analytique,* pour une valeur a de la variable, si $F(x) - F(a)$ a zéro pour limite en même temps que $x - a$.

(**) Autrement dit, elle est *continue dans le sens vulgaire* de ce mot.

assez compliqué, que la réciproque de ce théorème n'est pas vraie ; autrement dit, *une fonction qui passe par toutes les valeurs intermédiaires entre deux de ses valeurs peut n'être pas continue.*

L'exemple élémentaire précédent prouve la même chose. Il est emprunté en substance au *Cours d'analyse* (*Calcul différentiel*) par F. DE HEUSCH (Bruxelles, Castaigne, 1898), n° 21, page 17.

VI. On peut énoncer le théorème de Stevin et Cauchy et la remarque de M. Darboux sous la forme abrégée suivante :

Une fonction continue AU SENS ANALYTIQUE *est continue* AU SENS VULGAIRE ; *mais une fonction continue* AU SENS VULGAIRE *peut n'être pas continue* AU SENS ANALYTIQUE. (P. M.)

GÉNÉRALISATION D'UN PROBLÈME DE MINIMUM CLASSIQUE;

par M. G. LORIA, professeur à la Faculté de Sciences de Gênes.

HISTORIQUE. Pour réduire au silence les adversaires de sa méthode de détermination les *maxima* et les *minima*, FERMAT leur proposa, comme défi, le problème suivant : « Étant donnés trois points, en déterminer un quatrième tel que la somme de ses distances aux points donnés soit un *minimum* ». La pièce où l'on trouve l'énoncé de cette question n'a été publiée qu'en 1880(*); mais la question même doit avoir été généralement connue bien auparavant, car E. TORRICELLI (qui est mort en 1647), dans son *Racconto d'alcune proposizioni proposte e passate scambievolmente tra i matematici di Francia e me dall' anno* 1640 *in poi* (**), en parle comme d'une invention de FERMAT en avouant qu'il n'est pas en mesure de le résoudre(***). FRENET se trompe donc lorsqu'il dit que « ce problème fut proposé par TORRICELLI à FERMAT qui en donna peu après trois solutions » (****). Le problème dont il s'agit, par son élégance et par

---

(*) Comp. *Œuvres de Fermat*, éd. TANNERY et HENRY, T. I (Paris, 1891), p. 147-158.

(**) Publié par FABRONI dans le T. I (Pisis, MDCCLXXVIII, p. 376-399) de ses *Vitae Italorum doctrina excellentium* etc.

(***) Après avoir écrit ces lignes, le grand géomètre a réussi à résoudre la question pour le triangle, comme on le voit dans deux lettres adressées au P. V. RENIERI, le 1er et le 8 décembre 1646, et que M. GHINASSI a publiées : *Lettere fin qui inedite di E. Torricelli*, etc. (Faenza, 1864, pp. 26-34).

(****) *Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal* (III éd., Paris, 1873) p. 143.

l'autorité de celui qui le proposa, devint bientôt classique et reçut plusieurs solutions. Je me borne à en citer deux géométriques(*), desquelles il résulte que, si les angles du triangle donné sont tous plus petits que 120°, de tout point satisfaisant à la question, les trois côtés sont vus sous des angles égaux : d'où le nom de « point isogonal » qu'il porte dans la géométrie du triangle. Le cas où un des angles du triangle donné est supérieur à 120°, a été imparfaitement traité dans un article publié dans le T. I des *Annales de Mathématiques*, ce qui a fourni à M. BERTRAND(**) l'occasion de donner du problème qui nous occupe la solution généralement connue(***). Cette solution s'appuie sur un choix particulier d'axes coordonnés et est peu susceptible de généralisation à l'espace ordinaire. C'est pourquoi que je ne crois pas tout à-fait inutile d'en exposer une, qui peut servir au problème analogue à celui de FERMAT pour un espace linéaire euclidien à un nombre quelconque de dimensions.

PRÉLIMINAIRES. Il est nécessaire d'exposer avant tout les observations suivantes.

Dans un espace linéaire euclidien S_n à n dimensions, soit donné un système d'axes X_1, X_2,..., X_n deux à deux orthogonaux, partant du même point O (origine). La distance entre deux points

$$P'(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) \text{ et } P''(x''_1, x''_2, \cdots, x''_n)$$

de S_n est donnée par

$$P'P'' = \sqrt{(x'_1 - x''_1)^2 + (x'_2 - x''_2)^2 + \cdots + (x'_n - x''_n)^2},$$

tandis que le volume V du $(n+1)$èdre déterminé par P, $P^{(1)}$, ..., $P^{(n)}$ est exprimé comme il suit :

$$(1) \qquad V = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 1 \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_n^{(1)} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \cdots & x_n^{(n)} & 1 \end{vmatrix}$$

(*) *Institutiones analyticae a* V. RICCATO et H. SALADINO. (Bononiae MDCCLVII). — P. FRISI, *De problematibus quibusdam maximorum et minimorum* (Atti di Siena, T. V, 1774).

(**) Voir le mémoire *Sur la théorie des maxima et minima des fonctions à plusieurs variables* (Journ. de Liouville, T. VIII, 1843).

(***) Voir FRENET l. c.

Or, si on appelle $l_1, l_2, \ldots, l_n$ les longueurs des arêtes $\overline{PP^{(1)}}$, $\overline{PP^{(2)}}$, ... $\overline{PP^{(n)}}$, on peut écrire :

$$V = \frac{l_1 l_2 \ldots l_n}{n!} \begin{vmatrix} \frac{x_1 - x_1^{(1)}}{l_1}, & \frac{x_2 - x_2^{(1)}}{l_1}, & \ldots, & \frac{x_n - x_n^{(1)}}{l_1} \\ \frac{x_1 - x_1^{(2)}}{l_2}, & \frac{x_2 - x_2^{(2)}}{l_2}, & \ldots, & \frac{x_n - x_n^{(2)}}{l_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{x_1 - x_1^{(n)}}{l_n}, & \frac{x_2 - x_2^{(n)}}{l_n}, & \ldots, & \frac{x_n - x_n^{(n)}}{l_n} \end{vmatrix};$$

mais, en indiquant par $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les demi-droites $PP^{(1)}$, $PP^{(2)}$, ..., $PP^{(n)}$, on a, en général,

$$\frac{x_i - x_i^{(k)}}{l_i} = \cos(r_k X_i);$$

par conséquent,

$$(2) \qquad V = \frac{l_1 l_2 \ldots l_n}{n!} \begin{vmatrix} \cos(r_1 X_1), & \cos(r_1 X_2), & \ldots, & \cos(r_1 X_n) \\ \cos(r_2 X_1), & \cos(r_2 X_2), & \ldots, & \cos(r_2 X_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos(r_n X_1), & \cos(r_n X_2), & \ldots, & \cos(r_n X_n) \end{vmatrix}$$

Il faut à présent examiner le déterminant qui se présente dans le second membre de (2); pour en déterminer la signification géométrique, on peut employer les considérations suivantes :

Dans un espace linéaire non euclidien à n dimensions Σ_n, soit

$$a_{xx} = 0$$

l'équation (en coordonnées homogènes) de la quadrique absolue (*the absolute* de CAYLEY), et soit Δ le déterminant de son premier membre. Alors, si $n = 3$ et si on indique généralement par $(A, \overline{BC})$ la distance entre le point A et la droite BC, en considérant trois points $P'(x'_1, x'_2, x'_3)$ $P''(x''_1, x''_2, x''_3)$ et $P'''(x'''_1, x'''_2, x'''_3)$ on trouve (*)

$$\sin(P', \overline{P''P'''}) \cdot \sin(P''P''') = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{a_{x'x'}\, a_{x''x''}\, a_{x'''x'''}}} \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 \end{vmatrix};$$

(*) Les calculs seulement indiqués ici sont développés dans ma note *Sul concetto di volume in uno spazio lineare qualunque* (Giornale di Matematiche, T. XXVI, 1888).

il est clair que la valeur absolue de cette fonction des coordonnées est une fonction symétrique des trois points P, P', P''' ; c'est la généralisation de l'*aire* du triangle P'P''P''' ; nous appellerons cette fonction le *sinus de la contenance* du triangle P'P''P''' ; en l'indiquant par l'abréviation sin (P'P''P''') on aura évidemment :

$$\sin(P'P''P''') = \sin(P''P'''P') = \sin(P'''P'P'')$$
$$= -\sin(P'P'''P'') = -\sin(P''P'P''') = -\sin(P'''P''P').$$

D'une manière analogue, lorsque $n = 4$, si l'on indique en général par $(A, \overline{BCD})$ la distance entre le point A et le plan $\overline{BCD}$, en considérant quatre points P', P'', P''', P^{IV} on trouve, en appliquant ce qui précède,

$$\sin(P', \overline{P''P'''P^{IV}}) \sin(P''P'''P^{IV})$$
$$= \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{a_{x'x'}\, a_{x''x''}\, a_{x'''x'''}\, a_{x^{IV}x^{IV}}}} \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 & x''_4 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 & x'''_4 \\ x^{IV}_1 & x^{IV}_2 & x^{IV}_3 & x^{IV}_4 \end{vmatrix};$$

la valeur absolue de cette fonction des coordonnées est évidemment une fonction symétrique des quatre points P', P'', P''', P^{IV} ; c'est la généralisation du *volume* du tétraèdre P'P''P'''P^{IV} ; nous appellerons cette fonction le *sinus de la contenance* du tétraèdre P'P''P'''P^{IV}.

En continuant de la même manière on arrive à la notion de *sinus de la contenance* du $(n+1)$èdre $P^{(1)}P^{(2)}\ldots P^{(n+1)}$ de Σ_n et à la formule

$$\sin(P^{(1)}P^{(2)}\ldots P^{(n+1)})$$
$$= \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{a_{x^{(1)}x^{(1)}}\, a_{x^{(2)}x^{(2)}} \cdots a_{x^{(n+1)}x^{(n+1)}}}} \begin{vmatrix} x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & \cdots, & x_{n+1}^{(1)} \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & \cdots, & x_{n+1}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x^{(n+1)}_1, & x^{(n+1)}_2, & \cdots, & x^{(n+1)}_{n+1} \end{vmatrix}$$

Tout cela trouve une application immédiate à l'espace euclidien S_n. En effet, toutes les demi-droites de cet espace partant du point P forment un espace elliptique à $n-1$ dimensions. Comme coordonnées homogènes d'un de ses éléments r on peut prendre des nombres proportionnels aux quantités

$$\cos(rx_1), \cos(rx_2), \cdots, \cos(rx_n);$$

mais il est préférable de prendre ces quantités mêmes comme coordonnées. Elles sont liées par la relation

$$\cos^2(rX_1) + \cos^2(rX_2) + \cdots + \cos^2(rX_n) = 1;$$

l'équation de l'absolu est, dans ce cas,

$$\cos^2(rX_1) + \cos^2(rX_2) + \cdots + \cos^2(rX_n) = 0,$$

et on a $\Delta = 1$. Par conséquent, en considérant n droites quelconques $r_1, r_2, \cdots, r_n$, on aura, en appliquant l'équation précédente :

$$\sin(r_1 r_2 \cdots r_n) = \begin{vmatrix} \cos(r_1X_1), & \cos(r_1X_2), & \cdots, & \cos(r_1X_n) \\ \cos(r_2X_1), & \cos(r_2X_2), & \cdots, & \cos(r_2X_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos(r_nX_1), & \cos(r_nX_2), & \cdots, & \cos(r_nX_n) \end{vmatrix}.$$

D'où il suit que l'équation (2) est équivalente à celle-ci :

$$V = \frac{l_1 l_2 \cdots l_n}{n!} \sin(r_1 r_2 \cdots r_n). \tag{3}$$

Si $n = 2$, la quantité angulaire n'est que le sinus de l'angle compris entre les droites r_1 et r_2; si $n = 3$, c'est le sinus du trièdre compris entre les droites r_1, r_2, r_3. En décrivant un cercle ou une sphère dont P soit le centre et 1 le rayon, cette quantité mesure alors le sinus d'un arc circulaire ou le sinus de l'aire d'un triangle sphérique. En général en décrivant une hypersphère dont P soit le centre et 1 le rayon, et en appellant $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \cdots Q^{(n)}$ les points où elle est coupée par les droites $PP^{(1)}, PP^{(2)}, \cdots PP^{(n)}$, la quantité dont il s'agit mesure le sinus de la contenance du $n$èdre $Q^{(1)}Q^{(2)} \cdots Q^{(n)}$.

Énoncé et solution du problème général. « Étant donnés, dans un espace euclidien à n dimensions S_n, $n+1$ points $A_0 A_1 \cdots A_n$, en trouver un autre X tel que la somme de ses distances aux points donnés soit un *minimum* ».

En appellant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées cartésiennes du point inconnu, $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)}$ celles de A_i ($i = 0, 1, \ldots n$), $r_0, r_1, \ldots, r_n$ les demi-droites $XA_0, XA_1, \ldots, XA_n$ et $d_0, d_1 \ldots, d_n$ les distances du point inconnu aux points donnés, la fonction qu'il faut rendre *minimum* est

$$d_0 + d_1 + \cdots + d_n.$$

La règle ordinaire donne pour cela les n conditions suivantes :

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{x_k - a_k^{(i)}}{d_i} = 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

On peut résoudre ces équations par rapport aux rapports mutuels des quantités $\frac{1}{d_0}, \frac{1}{d_1}, \ldots, \frac{1}{d_n}$. Si ρ est un facteur de proportionnalité, on trouve de la sorte :

$$\frac{\rho}{d_i} = \begin{vmatrix} x_1 - a_1^{(i+1)}, \ldots, x_1 - a_1^{(n)}, x_1 - a_1^{(0)}, \ldots, x_1 - a_1^{(i-1)} \\ x_2 - a_2^{(i+1)}, \ldots, x_2 - a_2^{(n)}, x_2 - a_2^{(0)}, \ldots, x_2 - a_2^{(i-1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n - a_n^{(i+1)}, \ldots, x_n - a_n^{(n)}, x_n - a_n^{(0)}, \ldots, x_n - a_n^{(i-1)} \end{vmatrix}$$

$$= n!(-1)^n \mathrm{Vol.}(A_{i+1} \ldots A_n A_0 \ldots A_{i-1} X) = n! \,\mathrm{Vol.}(X A_{i+1} \ldots A_n A_0 \ldots A_{i-1})$$

En appliquant au second membre la formule (3), on peut transformer cette relation dans la suivante :

$$\frac{\rho}{d_i} = n!\, d_{i+1} \ldots d_n d_0 \ldots d_{i-1} \sin(r_{i+1} \ldots r_n r_0 \ldots r_{i-1})$$

On en tire

$$\sin(r_{i+1} \cdots r_n r_0 \cdots r_{i-1}) = \frac{\rho}{n!\, d_0 d_1 \cdots d_n}$$

Le second membre ne dépend pas de la valeur de l'indice i; donc

$$\sin(r_1 r_2 \cdots r_{n-1} r_n) = \sin(r_2 r_3 \cdots r_n r_0) = \cdots = \sin(r_0 r_1 \cdots r_{n-2} r_{n-1})$$

Ces égalités font voir que, pour n quelconque, par analogie avec ce qui arrive pour $n = 2$, un point X qui satisfait à la question, en général, est tel que les demi-droites XA_0, XA_1...., XA_n divisent l'espace autour du même point X en $n+1$ parties égales. Lorsque, p. ex., $n=3$, si on décrit une sphère dont X soit le centre et qu'on détermine ses intersections $B_0B_1B_2B_3$ avec les demi-droites XA_0, XA_1, XA_2, XA_3, on obtient quatre triangles sphériques $B_1B_2B_3$, $B_2B_3B_0$, $B_3B_0B_1$, $B_0B_1B_2$ ayant la même surface; par conséquent X peut s'appeler « point isogonal » par rapport au tétraèdre $A_0A_1A_2A_3$. La même dénomination peut s'employer dans l'espace S_n.

SUR LE POINT DE FRÉGIER(*),

par M. GUSTAVE GÉRARD, élève ingénieur.

Si par un point M d'une conique Σ on mène deux cordes rectangulaires quelconques ML, MN, la corde LN passera constamment par un même point P de la normale en M. Ce point P est appelé le *point de*

(*) M. GÉRARD a déjà fait paraître un premier article sur le point de Frégier dans le *Bulletin scientifique* que publie depuis le commencement de cette année l'Association des Élèves des Écoles spéciales de Liége. Pour faciliter la lecture des nouvelles notes de M. Gérard que nous insérons aujourd'hui, nous les faisons précéder de quelques emprunts faits au premier article. Voir aussi plus bas, la solution de la question 1174, relative au point de FRÉGIER. (J. N.)

Frégier relatif à M ; il jouit d'un grand nombre de propriétés remarquables.

1. Rappelons d'abord la démonstration analytique qu'on donne généralement du théorème fondamental (*). La conique Σ, rapportée à la tangente MT et à la normale MM′ a pour équation

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy = 0. \qquad (1)$$

Le système des cordes ML, MN est représenté par

$$(y - mx)\left(y + \frac{x}{m}\right) = 0,$$

ou

$$y^2 - x^2 + \left(\frac{1}{m} - m\right)yx = 0. \qquad (2)$$

Ajoutons les équations (1) et (2) après avoir multiplié la seconde par C. L'équation résultante

$$(A + C)y^2 + \left(B + \frac{m}{C} - Cm\right)yx + Dy = 0$$

représente un lieu passant par les points communs à Σ et au système des droites ML, MN. Ce lieu se compose de la tangente MT ($y = 0$) et d'une seconde droite qui est nécessairement la corde LN. Celle-ci a donc pour équation

$$(A + C)y + \left(B + \frac{C}{m} - Cm\right)x + D = 0;$$

on voit qu'elle rencontre la normale MM′ en un point dont l'ordonnée $-\frac{D}{A + C}$ est indépendante de m.

2. En faisant coïncider l'angle mobile LMN avec M′MT, on voit que P doit se trouver sur la normale.

Prenons pour ML, MN les cordes ML′, MN′ respectivement parallèles au grand axe OA et au petit axe de Σ, que nous supposons être une ellipse ; le diamètre L′N′ devant passer par P, nous voyons que *le point*

(*) En général, si les cordes ML, MN se correspondent dans une *involution*, la corde LN passe par un point fixe de la corde qui, dans cette involution, est l'homologue de la tangente menée en M. (J. N.)

***de Frégier relatif au point* M *est situé sur le diamètre symétrique de* OM *par rapport à un axe de la courbe*(*).**

Soient I, K les points où la normale MM′ rencontre les axes OA, OB; OI et OK étant les bissectrices de l'angle MOP, on a

$$\frac{OP}{OM} = \frac{PI}{IM}.$$

Mais la division harmonique (MPIK) et un théorème connu donnent

$$\frac{MK}{MI} = \frac{PK}{IP} = \frac{a^2}{b^2},$$

d'où

$$\frac{MK - MI}{MI} = \frac{a^2 - b^2}{b^2}, \quad \frac{PK + IP}{IP} = \frac{a^2 + b^2}{b^2}.$$

Ces proportions ayant les mêmes extrêmes, on en déduit

$$\frac{IP}{MI} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2};$$

donc

$$\frac{OP}{OM} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Il résulte de là que *les points* M *et* P *se correspondent dans deux figures symétriquement semblables* : O *est le centre de similitude, les axes de* Σ *sont les droites doubles.*

Le lieu de P *est donc une ellipse homothétique à l'ellipse proposée.*

3. La circonférence décrite sur la corde normale MM′ comme diamètre coupe l'ellipse Σ en un dernier point l; si l'on mène, dans l'ellipse, la corde Mn perpendiculaire à Ml, la corde ln devra passer par le point de Frégier P. Les droites MT, M′l sont un système de sécantes communes aux deux courbes; par suite, leurs directions sont symétriques par rapport à OA, et la droite Mn, parallèle à M′l est la corde commune à Σ et au cercle de courbure en M. Appelons ω le centre du cercle de courbure, M″ celui du cercle MlM′; les bases des triangles isoscèles M″M′l, ωMn′

(*) On arrive un peu moins simplement à la même conclusion en menant par P la corde L″N″ qui a son milieu en P : l'angle L″MN′ étant droit, la circonférence de diamètre L″N″ touche Σ en M; donc les droites MT, L″N″ qui représentent un système de sécantes communes à cette circonférence et à l'ellipse Σ ont des directions symétriques par rapport à OA, et il en est de même de OM et OP. (J. N.)

étant parallèles, les rayons M''l, ωn des deux cercles sont parallèles; donc ln passe par le centre de similitude. Ainsi (Comp. BB (3), XIX, 536):

Le point de Frégier est un centre de similitude du cercle de courbure et du cercle décrit sur la corde normale comme diamètre.

4. On a trouvé ci-dessus

$$\frac{OP}{OM} = \frac{c^2}{a^2 + b^2}.$$

Soit μ l'inverse du point M par rapport au cercle de Monge (circonscrit aux rectangle des axes); on aura

$$O\mu . OM = a^2 + b^2.$$

De ces deux relations on conclut

$$OP . O\mu = c^2.$$

Par suite : *L'inverse d'un point M d'une ellipse par rapport au cercle de Monge, et le symétrique du point de Frégier de M par rapport à l'axe focal sont eux-mêmes deux points inverses par rapport au cercle décrit sur la distance des foyers F, F' comme diamètre.*

Les points liés par une telle relation(*) jouissent de plusieurs propriétés dont l'étude fait l'objet de la question 1119 de *Mathesis*, (2) VIII, pp. 139-143. L'une de ces propriétés est que le quadrilatère $\mu FPF'$ est harmonique.

5. Soient Q, R les points de contact des tangentes menées de μ à l'ellipse. Il est facile de voir que *le quadrilatère* μQPR *est harmonique*. D'abord, il est inscriptible dans un cercle; ensuite, les angles $F\mu F'$, $Q\mu R$ ayant même bissectrice et μO passant par le milieu T de QR, μP est encore la symédiane du triangle μQR.

Appelons S le pôle de QR par rapport au cercle μQPR. Le faisceau T(μQPS) étant harmonique, la normale MP qui est perpendiculaire à la corde QR conjuguée avec le diamètre OM et par suite parallèle à TS, est divisée en deux parties égales par les trois autres rayons TM, TQ, TP. Donc *la polaire de* μ *est perpendiculaire au milieu de la distance* MP.

Joignons TP. En vertu de propriétés connues du quadrilatère harmonique, et parce que TP = TM, on a

$$\overline{TQ}^2 = \overline{TR}^2 = T\mu . TP = T\mu . TM.$$

(*) Les points P et μ sont *symétriquement inverses* par rapport au point O et à la droite OA, ou par rapport au cercle de diamètre FF'. (J. N.).

Par conséquent, *les circonférences qui passent par* μ *et touchent la droite* QR *soit en* Q, *soit en* R, *se coupent en* M.

Les propriétés précédentes sont applicables à l'hyperbole. Le point de Frégier relatif à M est alors le pôle de la tangente en M par rapport au cercle circonscrit au triangle que forme la tangente avec les asymptotes; car OP est une symédiane de ce triangle, etc.

6. Les propriétés suivantes se rattachent à la question 1174 proposée par M. Boutin (*Mathesis*, (2) VIII, p. 152) et résolue plus bas p. 143.

Soit ABC un triangle d'aire maximum inscrit à l'ellipse Σ; appelons A_1, B_1, C_1 les points de Frégier relatifs à A, B, C, et H_0 le réciproque de l'orthocentre H.

Le centre O de l'ellipse est le centre de gravité de ABC, et les hauteurs AH, BH, CH sont normales à l'ellipse. H est donc un centre d'homologie de ABC, $A_1B_1C_1$.

D'après le § 2, les triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont symétriquement semblables; O en est le centre de similitude, et les axes de l'ellipse en sont les droites doubles.

Le triangle $A_1B_1C_1$ *est trihomologique avec* ABC. En effet, les coordonnées barycentriques de H étant tg A, tg B, tg C, celles de H_0 sont cot A, cot B, cot C; celles de A_1 peuvent être représentées par λ, tg B, tg C, où l'on trouve λ en écrivant que H_0A_1 est parallèle à BC (ou que H_0 et A_1 ont la même coordonnée absolue par rapport à BC). On voit ainsi que les points A_1, B_1, C_1 ont pour coordonnées cot A, cot C, cot B; cot C, cot B, cot A; cot B, cot A, cot C.

Il en résulte que les droites BA_1, CB_1, AC_1 concourent au point (tg B, tg C, tg A), et les droites CA_1, AB_1, BC_1 au point (tg C, tg A, tg B)(*).

On peut encore remarquer que le *triangle* $A_1B_1C_1$ *est trihomologique avec le triangle anticomplémentaire de* ABC; car il est l'anticomplémentaire du triangle de Brocard de ABC.

Le point de Steiner R *du triangle* ABC *a pour point de* Frégier *son homologue du triangle* $A_1B_1C_1$, c'est-à-dire *le point* H_0 (voir question 1174); la droite RH_0 est donc normale à l'ellipse et d'après un théorème connu, elle passe par le symétrique de H par rapport au centre de l'ellipse.

(*) Les points A_1, B_1, C_1 sont les semi-réciproques de H; les centres d'homologie de $A_1B_1C_1$ avec BCA ou avec CAB sont les isobariques de H. (J. N.).

VARIÉTÉS.

Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse. Sujet du prix de mathématiques à décerner en 1901.

Recherche et étude des familles de surfaces possédant cette propriété que toutes leurs trajectoires orthogonales soient des courbes planes, en se plaçant particulièrement à l'un des points de vue suivants :

1° Pour que toutes les surfaces définies en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation :

$$\rho = f(x, y, z)$$

où ρ est un paramètre variant d'une surface de la famille à l'autre, admettent des trajectoires orthogonales planes, il faut que f vérifie une équation aux dérivées partielles du 3e ordre dont on propose l'étude.

2° On pourra utiliser aussi la méthode périmorphique en s'inspirant du « Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes (*Journal de mathématiques pures et appliquées*) » de Ribaucour et en particulier du chapitre XIII, intitulé : « Recherches des trajectoires orthogonales planes des surfaces ».

La valeur du prix est de 500 francs. Les Mémoires doivent être écrits en français ou en latin et adressés, avant le 1er janvier 1901, au Secrétariat de l'Académie. Ils doivent porter sur la première page une sentence ou devise qui sera répétée sur un billet séparé et cacheté, renfermant le nom de l'Auteur.

BIBLIOGRAPHIE.

Résolution pratique des problèmes de mathématiques financières relatives à l'émission et à conversion d'un emprunt à primes. (Exemple numérique : Emprunt de 70.000.000 fr. contracté par la ville de Gand en 1896), par Cl. Thiry, Professeur de Comptabilité et de Mathématiques commerciales à l'école de Commerce de Gand. Gand, Hoste, 1898. (In-8° de 32 p.) Prix : Un franc.

Cet opuscule dont le titre indique suffisamment l'objet, répond parfaitement au but poursuivi par l'auteur. Nous osons dire que ceux qui étudieront cette brochure reconnaîtront que la plupart des emprunts à prime tels qu'on les contracte de nos jours le sont à un taux de beaucoup supérieur à celui que l'on croit.

E Fourrey. **Récréations arithmétiques.** Paris, Librairie Nony, 1899. In-8° de VIII — 263 p. in-8°) Prix : 5 fr.

Ouvrage intéressant, dont l'auteur fait connaître l'objet en ces termes :

« Il n'existe à l'heure actuelle, à notre connaissance, sur les Récréations Arithmétiques, que des ouvrages ou trop anciens ou trop savants pour être à la portée de tout le monde. Le présent volume a pour objet de combler cette lacune. Sans rien sacrifier à la rigueur, nous avons seulement supposé chez nos lecteurs la connaissance des opérations et règles pratiques de l'Arithmétique. Nous rappelons, d'ailleurs, dans une Introduction, les quelques notions théoriques nécessaires.

Parmi les questions traitées, un grand nombre sont inédites ou peu connues ; nous avons cherché pour les autres à en simplifier autant que possible l'exposé en vue du programme que nous nous sommes proposé ».

Voici la table des matières; elle donne une idée du genre des questions traitées.

Première partie. Les nombres abstraits. I. Curieuses particularités des nombres. II. Les Opérations arithmétiques. III. Les Progressions. IV. Les Nombres polygonaux. V. Les Carrés. VI. Les Cubes. VII. Les Diviseurs. VIII. Problèmes divers sur les nombres.

Deuxième partie. Les Applications : IX. Le Jour de la semaine. X. Les Nombres pensés. XI. Problèmes anciens. XII. Problèmes curieux ou amusants.

Troisième partie. Les Carrés magiques. XIII. Formation des Carrés magiques. XIV. Formes diverses des Carrés magiques. § 1. A enceintes, à croix, à chassis et à compartiments. § 2. Diaboliques et hypermagiques. XV. Transformations des Carrés magiques. § 1 Carrés magiques à progression géométrique. § 2. Rectangles magiques. § 3. Cercles magiques. § 4. Cubes magiques.

L'exécution typographique de l'ouvrage est irréprochable (*).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1129.

(Voir *Mathesis*, (2) VII, p 175).

Par un point P *situé dans le plan d'un triangle* ABC, *on mène trois droites* α, β, γ *faisant des angles égaux et de même sens avec les côtés* BC, CA, AB; α *rencontre* AC *en* B_α *et* AB *en* C_α; β *rencontre* BC *en* A_β *et* AB *en* C_β; γ *rencontre* BC *en* A_γ *et* AC *en* B_γ. *Soient* α', β', γ' *les points situés à l'infini sur les droites* α, β, γ.

1° *Les coniques* $\beta'\gamma' AB_\gamma C_\beta$, $\alpha'\gamma' BC_\alpha A_\gamma$, $\alpha'\beta' CB_\alpha A_\beta$ *et le cercle* ABC *sont circonscrits à un même triangle* A'B'C'.

2° *Lorsque* P *se déplace de manière que* B'C' *ait une longueur constante, le lieu de* P *est une hypotrochoïde, qui se réduit à une hypocycloïde de Steiner lorsque* B'C' *est nul, et à un cercle lorsque* B'C' *est égal au diamètre du cercle* ABC. (A. Gob.)

Solution par M. A. Droz-Farny. Soit P un point quelconque dans le plan du triangle ABC; une transversale variable menée par P coupe les côtés AB, AC respectivement en c, b. Menons par ces points deux droites faisant avec les côtés AB et AC et dans un sens determiné le même angle φ. Quel est le lieu du point d'intersection π de ces droites lorsque

---

(*) Nous devons faire des réserves sur les renseignements historiques que l'on rencontre ça et là dans l'ouvrage. Il y en a qui sont manifestement erronés ou superficiels. (P. M.)

bc tourne autour du point P? Les rayons $b\pi$ déterminent un faisceau de centre β' homographique à la ponctuelle b; de même les droites $c\pi$ déterminent un faisceau de centre γ' perspectif à la ponctuelle c; or les deux ponctuelles b et c étant perspectives, les faisceaux sont homographiques et les éléments homologues déterminent par leur intersection une hyperbole H_A passant par β' et γ' et par A qui est un point commun des deux ponctuelles considérées. Lorsque bc forme avec l'un des côtés AB, AC l'angle donné φ, π coïncide avec l'un des points B_γ ou C_β.

L'hyperbole H_A coupe la circonférence circonscrite au point A et en trois autres points A', B', C'.

D'après un théorème bien connu, si, d'un de ces points, on mène les trois droites qui forment avec les côtés du triangle des angles égaux à φ et de même orientation, leurs trois pieds sont en ligne droite (ligne de Simson généralisée d'angle φ); il en résulte que les points A', B', C' appartiennent aussi aux hyperboles H_B et H_C.

Les trois transversales abcP correspondant aux points A', B', C' étant des lignes de Simson généralisées, les énoncés du 2° sont la conséquence directe des théorèmes connus :

1° Si un point se meut sur la circonférence circonscrite au triangle ABC, sa ligne de Simson d'angle φ enveloppe une hypocycloïde de Steiner.

2° Les droites de Simson d'angle φ correspondantes à deux points diamétralement opposés sur la circonférence ABC se coupent à angle droit sur une circonférence déterminée.

3° Les lignes de Simson correspondantes à deux points, extrémités d'une corde de longueur constante du cercle ABC, se coupent sous un angle constant, et le lieu de leur intersection est une hypotrochoïde.

Question 1174.

(Voir *Mathesis* (2), t. VIII, p. 152).

Soient E *l'ellipse maximum circonscrite au triangle* ABC; A_1, B_1, C_1, *les points de Frégier de* A, B, C (*points de concours des hypoténuses des triangles rectangles inscrits dans* E *et ayant respectivement leurs sommets en* A, B, C). *Démontrer que*

1° *La circonférence circonscrite au triangle* $A_1B_1C_1$ *a pour diamètre* HH_0 (H_0 *réciproque de l'orthocentre* H);

2° *Les triangles* ABC *et* $A_1B_1C_1$ *sont semblables et ont même centre de gravité*;

3° *Les points* H_0 *et* H *sont respectivement les points de Steiner et de Tarry du triangle* $A_1B_1C_1$. (A. Boutin).

Solution par M. G. Gerard. Pour démontrer géométriquement la question proposée, nous *définissons* les points A_1, B_1, C_1 comme étant les projections de H_0 sur les hauteurs (ce qui est le 1° de l'énoncé), et nous faisons voir ensuite qu'ils sont les points de Frégier de E relatifs à A, B, C.

On sait que H_0 et H sont les anticomplémentaires respectivement du point de Lemoine K et du centre du cercle circonscrit O. Or, le triangle $A_1B_1C_1$ se déduit de H_0 et H, comme le premier triangle de Brocard, que nous désignons ici par $A_2B_2C_2$, se déduit de K et O; donc $A_1B_1C_1$ *est l'anticomplémentaire de* $A_2B_2C_2$.

Soit R le point de Steiner de ABC; les droites AR, BR, CR sont respectivement parallèles aux côtés du triangle de Brocard (Voir J. M. S. 1886, *Sur le point de Steiner* par M. J. Neuberg); donc elles sont parallèles aussi aux côtés du triangle $A_1B_1C_1$.

Cela posé, *les triangles* ABC, $A_1B_1C_1$ *sont symétriquement semblables*. En effet, on a les égalités d'angles :

$$B_1A_1C_1 = B_1H_0C_1 = A, \text{ etc.}$$

Ils ont même centre de gravité G. En effet, d'après un théorème de M. Brocard, G est le centre de gravité de $A_2B_2C_2$; or $A_1B_1C_1$ est le triangle qui se déduit de $A_2B_2C_2$ en menant par les sommets des parallèles aux côtés opposés; il a donc même centre de gravité.

On a, dans les figures semblables ABC, $A_1B_1C_1$, et en vertu de ce qui a été dit :

Angle $CAR = C_1B_1H_0$ (à cause des côtés parallèles) $= C_1A_1H_0$.

Ainsi, AR et A_1H_0 sont des lignes homologues, et H_0 *est le point de Steiner de* $A_1B_1C_1$. H, diamétralement opposé sur le cercle $A_1B_1C_1$, est le point de Tarry.

Démontrons maintenant que A_1, par exemple, est le point de Frégier de E relatif à A.

Or, le point de Frégier en A se trouve l'intersection de la normale en A avec le diamètre conjugué de la corde d'osculation en A. Mais, E a pour centre G et pour tangentes en A,B,C les parallèles à BC, CA, AB.

Donc, AH est la normale, AR la corde d'osculation, et il suffit de montrer que A_1G est le diamètre conjugué de AR.

Effectivement, dans les figures semblables ABC et $A_1B_1C_1$, AR et A_1H_0, AG et A_1G sont évidemment des lignes homologues. Soient S, S_1 les milieux de AR, A_1H_0. H et H_0 étant deux points réciproques du triangle ABC, et A_1H_0 étant parallèle à BC, AG passe en S_1; donc, dans l'ellipse $A_1B_1C_1H_0$, les droites AG, A_1H_0 sont conjuguées. Il en est donc de même, dans l'ellipse semblable ABCR, des droites homologues A_1G, AR.

La même question a été résolue analytiquement par M. Deprez. Notre zélé correspondant signale aussi les propriétés suivantes qui, si nous ne nous trompons, peuvent se déduire de propriétés connues du triangle de Brocard :

Les parallèles aux côtés BC, CA, AB *menées respectivement des milieux de* B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, *concourent au point de Lemoine de* ABC.

La droite d'Euler du triangle $A_1B_1C_1$ *passe par le point de Tarry du triangle* ABC *et par le foyer de la parabole inscrite dans le triangle* ABC *et ayant la droite d'Euler de ce triangle pour directrice.*

Question 1180.

(Voir *Mathesis* (2), VIII, p. 176).

Soient M, N *les points de contact des tangentes d'un point* P *à une ellipse donnée. Trouver le lieu du point* P *tel que la droite d'Euler du triangle* PMN *soit parallèle à un axe de symétrie de l'ellipse.* (Déprez.)

Solution par MM. V. Cristesco (Cernavoda, Roumanie) et Barisien. Soient $\alpha, \beta)$, (x_N, y_N), (x_0, y_0) les coordonnées du point P, de l'orthocentre H et du centre O du cercle circonscrit du triangle PMN. On sait que

$$\left.\begin{aligned} x_N &= \frac{\alpha(a^2b^2 + b^4 + c^2\beta^2)}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}, & y_N &= \frac{\beta(a^4 + a^2b^2 - c^2\alpha^2)}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}. \\ x_0 &= \frac{b^2\alpha(\alpha^2 + \beta^2 + c^2)}{2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)}, & y_0 &= \frac{a^2\beta(\alpha^2 + \beta^2 - c^2)}{2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Le cœfficient angulaire de la droite d'Euler HO du triangle PMN étant $\frac{y_N - y_0}{x_N - x_0}$, cette droite sera parallèle à l'axe Cx ou Cy (C étant le centre de l'ellipse), si l'on a respectivement

$$y_N - y_0 = 0, \quad \text{ou} \quad x_N - x_0 = 0. \quad (2)$$

Si l'on tient compte des relations (1), les conditions (2) donnent respectivement :

$$\beta[(3a^2 - 2b^2)\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2(3a^2 + b^2)] = 0,$$
$$\alpha[b^2\alpha^2 + (3b^2 - 2a^2)\beta^2 - b^2(a^2 + 3b^2)] = 0.$$

Le premier lieu comprend le petit axe de l'ellipse proposée et une ellipse; le second, le grand axe et une conique qui est une ellipse, une hyperbole ou un système de deux parallèles au petit axe suivant que a est inférieur, supérieur ou égal à $b\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Remarque. Lorsque le point P se meut sur le cercle de Monge

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2,$$

la droite HO coïncide avec CP (C étant le centre de l'ellipse).

M. Barisien fait encore la remarque suivante : si Q est le point de concours des normales en M et N, le lieu des points P tels que les droites d'Euler des triangles OMN et QMN soient parallèles à un axe de l'ellipse, se compose de cet axe et d'une conique.

Question 1191.

(Voir *Mathesis*, (2), VIII, p. 240).

Etant donnés une ellipse E *et le point de rencontre* Q *des tangentes menées aux sommets* A *et* B, *soit p la polaire d'un point* P *par rapport à* E *et soit q la polaire de* Q *par rapport au cercle* Σ *passant par le centre* O *de* E *et par les points de rencontre de p avec* E. *On demande le lieu de* P *et celui du centre de* Σ, *lorsque p et q sont parallèles ou perpendiculaires.*

(Davidoglou).

Solution par MM. R. Buysens, Barisien et Déprez. Si α, β sont les coordonnées de P, l'équation de p est

$$b^2\alpha x + a^2\beta y - a^2b^2 = 0.$$

Celle de la seconde corde d'intersection de E et de Σ est de la forme :

$$b^2\alpha x - a^2\beta y + \mu = 0;$$

et l'équation de Σ s'écrit

$$\lambda(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) + (b^2\alpha x + a^2\beta y - a^2b^2)(b^2\alpha x - a^2\beta y + \mu) = 0,$$

λ et μ étant à déterminer par les conditions que la conique est un cercle et passe par O. On trouve

$$\lambda = -\mu = \frac{b^4\alpha^2 + a^4\beta^2}{c^2}.$$

Dès lors, l'équation du cercle est

$$a^2b^2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)(x^2 + y^2) - b^2\alpha(b^4\alpha^2 + a^4\beta^2 + a^2b^2c^2)x - a^2\beta(b^4\alpha^2 + a^4\beta^2 - a^2b^2c^2)y = 0.$$

On obtient, pour le coefficient de direction de q, l'expression

$$m = \frac{2a^3b^3(b^2x^2 + a^2\beta^2) - b^3\alpha(b^4\alpha^2 + a^4\beta^2 + a^2b^2c^2)}{2a^2b^3(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2) - a^2\beta(b^4\alpha^2 + a^4\beta^2 - a^2b^2c^2)}.$$

En exprimant que p et q sont parallèles ou perpendiculaires, on obtient les équations des lieux du point P :

$$m = -\frac{b^3\alpha}{a^3\beta}; \qquad m = \frac{a^3\beta}{b^3\alpha}. \qquad (1)\ (2)$$

Ces équations peuvent s'écrire

$$(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)(b^3\alpha - a^3\beta) + a^2b^2c^2\alpha\beta = 0, \qquad (1')$$

$$(b^4\alpha^2 + a^4\beta^2)^2 - 2a^3b^3(b\alpha + a\beta)(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2) - a^2b^2c^2(b^4\alpha^2 - a^4\beta^2) = 0 \qquad (2')$$

Pour trouver les lieux du centre de Σ, il faut éliminer α, β entre (1') ou (2') et les égalités

$$x = \frac{b^3\alpha(b^4\alpha^2 + a^4\beta^2 + a^2b^2c^2)}{2a^2b^3(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)}, \quad y = \frac{a^2\beta(b^4\alpha^2 + a^4\beta^2 - a^2b^2c^2)}{2a^2b^3(b^2\alpha^2 + ba^2\beta^2)} \qquad (3)$$

qui expriment les coordonnées de ce centre. Des égalités (3) on tirera des expressions pour

$$b^3\alpha(b^4\alpha^2 + a^4\beta^2 + a^2b^2c^2) \quad \text{et} \quad a^2\beta(b^4\alpha^2 + a^4\beta^2 - a^2b^2c^2)$$

qui, étant substituées dans (1), transforment cette égalité en la suivante :

$$(4) \qquad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a^2(a-x)}{b^2(b-y)} = \frac{a^2}{b^2}\gamma \qquad \text{en posant} \qquad \frac{a-x}{b-y} = \gamma.$$

Divisons les égalités (3) membre à membre ; il vient, en utilisant (4),

$$\beta^2 = \frac{b^2c^2(x + \gamma y)}{a^2(1 + \gamma^2)(x - \gamma y)}$$

Une transformation de termes et une élévation au carré permet de tirer de (1') la relation

$$\beta^2\left(b^2\frac{\alpha^2}{\beta^2} + a^2\right)^2\left(b^3\frac{\alpha}{\beta} - a^3\right)^2 = a^4b^4c^4\frac{\alpha^2}{\beta^2};$$

en y remplaçant β^2 et $\frac{\alpha}{\beta}$ par leurs valeurs, on trouve pour l'équation du premier lieu du centre, l'origine étant en Q :

$$a^2b^2c^2x^2y^2(x^2 + y^2) + (bx - ay)(2xy + bx + ay)(a^2x^2 + b^2y^2)^2 = 0.$$

On établit, d'une façon analogue, le second lieu du centre :

$$a^2b^2c^2(x^2 + y^2)[x^2(x + a) - y^2(y + b)]^2 = (ay - bx)^2(a^2y^2 + b^2x^2)^2 [x^2(x + a)^2 - y^2(y + b)^2].$$

Question 1196.

(Voir *Mathesis* (2), t. VIII, p. 264).

Etant donnés, sur une droite, trois points A, B, C *et une origine* O, *si l'on calcule les quatrièmes proportionnelles, d'abord aux segments* OA, OB, OC, *puis aux segments* OB, OC, OA, *enfin à* OC, OA, OB, *la somme des droites obtenues n'est jamais égale à* OA + OB + OC, *quand les points* A, B, C *sont tous réels, mais la propriété peut exister si deux de ces points sont imaginaires conjugués.*

Par tout point O *du plan d'une cubique (non situé sur la courbe) on peut mener deux droites rencontrent la cubique en des points* A, B, C *qui, avec le point* O *jouissent de la propriété ci-dessus; ou l'on n'en peut mener aucune.* (M. Stuyvaert.)

Solution par M. V. Retali (Milan). Si les points A, B, C sont fixes et si O parcourt la droite, les deux centres harmoniques du deuxième degré, du triple (ABC). par rapport au pôle O, forment une involution quadratique dont les points doubles sont donnés par le covariant hessien de la binaire cubique (ABC) : en écrivant la condition.

$$(1) \qquad \Sigma \frac{OA \cdot OB}{OC} = \Sigma OA$$

sous la forme

$$(2) \qquad \Sigma^2 (OA \cdot OB) - 3OA \cdot OB \cdot OC \Sigma OA = 0,$$

puisque les distances des centres harmoniques du deuxième degré de (ABC) par rapport à O, au point O sont les racines de

$$(3) \qquad x^2 \Sigma OA - 2x \Sigma OA \cdot OB + 3OA \cdot OB \cdot OC = 0,$$

et que le premier membre de (2) est le discriminant de (3), *la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (1) *soit satisfaite, est que l'origine* O *soit un élément du covariant hessien de* (ABC); et comme les éléments de ce covariant sont réels seulement lorsque deux des points A, B, C sont imaginaires conjugués, la première partie du théorème est démontrée. Pour la deuxième partie, il suffit d'observer que *les deux droites de l'énoncé sont les tangentes menées par* O *à la conique polaire de* O *par rapport à la cubique.* Ces deux droites, appellées *indicatrices* du point O par rapport à la cubique, jouissent de propriétés fort intéressantes, découvertes par Clebsch et Cremona (*Curve piane*, n° 90, n° 112 et suiv. — *Crelle*, t. 58, p. 280-285).

×Question 1200.

(Voir *Mathesis*, (2) VIII, p. 280).

Dans un triangle ABC, *on mène les tangentes au cercle inscrit parallèles respectivement à* BC, CA, AB. *Soient* l, m, n *leurs longueurs comprises entre les deux autres côtés. Calculer les côtés* a, b, c.

(E. Lemoine).

Solution par MM. Deguelbre et Sintzof (Kazan). Soient A′, B′, C′ les points de contact des côtés de ABC avec le cercle inscrit, et soient L,L′, M,M′, N,N′ les extrémités des longueurs l, m, n.

Le périmètre du triangle ALL′ est égal à $2AB' = 2(p-a)$, et les périmètres des triangles semblables ALL′, ABC sont entre eux comme les côtés homologues l, a. On en conclut

$$\frac{p-a}{p}=\frac{l}{a},\quad \frac{p-b}{p}=\frac{m}{b},\quad \frac{p-c}{p}=\frac{n}{c}. \tag{1}$$

En ajoutant ces trois égalités on trouve

$$1=\frac{l}{a}+\frac{m}{b}+\frac{n}{c}. \tag{2}$$

En ajoutant les deux premières on obtient

$$\frac{2p-a-b}{p}=\frac{l}{a}+\frac{m}{b},\quad \text{ou}\quad \frac{c}{p}=\frac{l}{a}+\frac{m}{b};$$

donc

$$\left.\begin{aligned} am+bl &= \frac{abc}{p}=4Rr,\\ bn+cm &= 4Rr\\ cl+an &= 4Rr, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Résolvons les dernières équations par rapport à a, b, c comme si $4Rr$ était connu ; nous aurons

$$\left.\begin{aligned} a=\frac{4Rr}{mn}(m+n-l),\quad b&=\frac{4Rr}{nl}(n+l-m),\\ c&=\frac{4Rr}{lm}(l+m-n). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Portons ces valeurs dans l'équation (2) ; il vient

$$\frac{4Rr}{lmn}=\Sigma\frac{1}{m+n-l}=\frac{2\Sigma mn-\Sigma l^2}{(m+n-l)(n+l-m)(l+m-n)},$$

et les formules (4) donnent maintenant

$$a = \frac{l(2\Sigma mn - \Sigma l^2)}{(n+l-m)(l+m-n)}, \ldots.$$

MM. Van Dorsten, Soons, Emmerich et Barisien résolvent les équations (1) par rapport aux lettres a, b, c, ce qui donne

$$a = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - lp}, \quad b = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - mp}, \ldots; \tag{5}$$

l'addition de ces valeurs conduit à l'équation

$$\sqrt{p} = \pm\sqrt{p-4l} \pm \sqrt{p-4m} \pm \sqrt{p-4n},$$

d'où l'on tire

$$p = \frac{(\Sigma l^2 - 2\Sigma mn)^2}{(-l+m+n)(l-m+n)(l+m-n)},$$

valeur qu'il faut substituer dans les formules (5). On voit que cette méthode exigerait une discussion.

Autre solution par M. Delahaye (Roye).

En égalant deux à deux les premiers membres des relations (3), on trouve

$$\frac{a-b}{c} = \frac{m-l}{n}, \quad \frac{b-c}{a} = \frac{n-m}{l}, \quad \frac{a-c}{b} = \frac{n-l}{m}. \tag{6}$$

Appliquons à ces proportions une transformation connue; il vient

$$\frac{a-b \pm c}{c} = \frac{m-l \pm n}{n} \text{ etc.,}$$

ou, en posant $l+m+n = 2s$,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{p-a}{c} = \frac{s-m}{n}, \quad \frac{p-b}{c} = \frac{s-l}{n} \\ &\frac{p-b}{a} = \frac{s-n}{l}, \quad \frac{p-c}{a} = \frac{s-m}{l} \\ &\frac{p-c}{b} = \frac{s-l}{m}, \quad \frac{p-a}{b} = \frac{s-n}{l}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$(p-a)(s-l) = (p-b)(s-m) = (p-c)(s-n). \tag{8}$$

Si l'on égale à k les produits (8), on peut écrire

$$p-a = \frac{k}{s-l}, \quad p-b = \frac{k}{s-m}, \quad p-c = \frac{k}{s-n}.$$

En ajoutant ses égalités deux à deux on trouve

$$c = k\left(\frac{1}{s-l} + \frac{1}{s-m}\right) = \frac{nk}{(s-l)(s-m)}, \quad a = \frac{lk}{(s-m)(s-n)}, \ldots.;$$

l'inconnue auxiliaire k s'obtient en substituant ces valeurs de a, b, c dans l'égalité (2).

Les relations (6), (7) et d'autres se rencontrent dans la solution de M. Delahaye.

Si l', m', n' sont les tangentes parallèles à BC, CA, AB, menées respectivement aux cercles exinscrits I', I'', I''' et limitées aux côtés des angles A, B, C, on a les égalités

$$\frac{a}{l'}=\frac{p-a}{p},\quad \frac{b}{m'}=\frac{p-b}{p},\quad \frac{c}{n'}=\frac{p-c}{p}$$

$$\frac{a}{l'}+\frac{b}{m'}+\frac{c}{n'}=1,$$

et p est donné par une équation du troisième degré.

QUESTIONS D'EXAMEN.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS. — CONCOURS D'ADMISSION EN 1899.

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (6 juin 1899).

1° Indiquer comment sont situées par rapport au système $Oxyz$ des axes de coordonnées rectangulaires les droites A et B qui ont pour équations

$$\text{A}\begin{cases} z=2 \\ y+x=0 \end{cases} \qquad \text{B}\begin{cases} z=-2. \\ y-x=0. \end{cases}$$

Chercher le lieu des centres S des sphères tangentes à la fois aux droites A et B.

Ce lieu est une surface S. La reconnaître et donner ses génératrices rectilignes.

2° Constater sur l'équation de S que Ox, Oy, Oz sont des axes de symétrie de cette surface et montrer que ce résultat pouvait être prévu, par la seule connaissance des données du problème.

3° De chaque point x, y, z de S on déduit un point M en diminuant l'ordonnée y de $\frac{27}{(2x+1)^2}$. Ecrire l'équation de la surface M ainsi déduite de S, et trouver les droites de la surface.

4° Etudier la forme et les transformées successives des sections de la surface M par des plans perpendiculaires à Oz, et, en particulier, les sections faites par les plans $z=0$ et $z=1$, cette dernière aussi complètement que possible.

1292. Eliminer x, y entre les équations

$$x+\frac{1}{x}=a,\quad y+\frac{1}{y}=b,\quad xy+\frac{1}{xy}=c.$$

(*J. de Vuibert.*)

Réponse : $a^2+b^2+c^2-abc=4$.

1293. Décomposer en facteurs l'expression

$$P=(x^3-y^3+6x^2y+3xy^2)^3+(y^3-x^3+6y^2x+3yx^2)^3.$$

(*J. de Vuibert.*)

Soient α^3, β^3 les deux cubes ; on a

$$P=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=9xy(x+y)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2),$$
$$\alpha=(x-y)^3+9x^2y,\quad \beta=-(x^2-y)^3+9xy^2,$$
$$\alpha^2+\beta^2=2(x-y)^6+18xy(x-y)^4+81x^2y^2(x^2+y^2),$$
$$\alpha\beta=-(x-y)^6-9xy(x-y)^4+81x^2y^3,$$
$$\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta=3\left\{(x-y)^6+9xy(x-y)^4+27x^2y^2[(x-y)^2+2xy]-27x^3y^3\right\}$$
$$=3\left\{x-y)^2+3xy\right\}^3=3(x^2+xy+y^2)^3$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1292.** Éliminer x, y, z entre les équations

$$(x-y)(x-z)=a(x-y-z)^2,$$
$$(y-z)(y-x)=b(y-z-x)^2,$$
$$(z-x)(z-y)=c(z-x-y)^2.$$ (Emmerich.)

×**1294.** Calculer le rayon du cercle inscrit à un triangle ABC, en fonction des distances α, β, γ de son centre aux trois sommets.

1295. On considère le lieu des points doubles Q d'une famille de courbes C, parallèles. Démontrer *analytiquement :* 1° que la ligne (Q) est également inclinée sur les deux branches de la courbe C, qui se croisent au point Q; 2° que les centres de courbure de ces branches sont les foyers d'une conique, ayant un contact du second ordre, au point Q, avec la ligne (Q). (E. Cesàro.)

1296. Une circonférence variable passe par un point fixe et touche constamment un cercle fixe; trouver l'enveloppe de l'axe radical de cette circonférence variable et d'une autre circonférence donnée.

(M. Stuyvaert).

SUR LA SPIRALE LOGARITHMIQUE;

par M. G. Pirondini, à Parme.

1. Une ligne plane L(*) peut être définie par une relation

$$r = f(s) \qquad (1)$$

entre le rayon vecteur r allant d'un point fixe O (pôle) à un point quelconque M de L, et l'arc s de L compris entre un point fixe A et le point M.

Soit v l'angle de la tangente en M avec le rayon OM. Donnons à s un accroissement infiniment petit $MM' = \Delta s$ et menons Mm perpendiculaire à OM'. Le triangle rectangle $MM'm$ donne

$$\cos OM'M = \frac{M'm}{MM'}.$$

En passant à la limite, l'angle OM'M devient v et on peut remplacer $M'm$, MM' par les différentielles dr, ds; donc

$$\cos v = \frac{dr}{ds} = f'(s). \qquad (2)$$

L'élimination de s entre (1) et (2) conduit à une équation

$$\cos v = F(r),$$

qui peut servir à une *construction approchée* de L. A cet effet, imaginons par O une suite de rayons dont deux consécutifs font un angle très petit. Prenons sur le premier rayon une longueur arbitraire OA et traçons par A une droite inclinée sur OA de l'angle défini par $\cos v = F(OA)$. Par le point B où cette droite rencontre le second rayon, menons une droite faisant avec OB l'angle donné par l'égalité $\cos v = F(OB)$; elle coupe le troisième rayon en un point C. Et ainsi de suite. Une courbe tracée par les points A, B, C... satisfait *sensiblement* à l'équation (1).

Soient r, θ les coordonnées polaires de M. Le triangle rectangle $MM'm$ donne

$$ds^2 = dr^2 + (rd\theta)^2;$$

mais $dr = f'(s)\,ds$. En éliminant ds entre ces deux égalités on obtient l'équation

$$rf'(s)\,d\theta = \sqrt{1 - f'^2(s)}\,dr; \qquad (3)$$

si l'on y substitue à s sa valeur tirée de (1), on aura l'équation différentielle de L en coordonnées polaires.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

2. Nous allons considérer l'équation la plus simple de la forme (1) ou $r = as$, a étant une constante plus petite que l'unité.

La formule (2) donne $\cos v = a$; donc *la ligne* L *coupe les rayons issus de* O *sous un angle constant* v.

L'égalité (3) donne successivement

$$\frac{dr}{r} = \cot v \,.\, d\theta,$$

$$lr = \theta \cot v + lc, \quad r = ce^{\theta \cot v}, \tag{4}$$

c étant une constante, et la lettre l indiquant un logarithme népérien. La courbe que nous étudions est donc *la spirale logarithmique.*

3. L'origine des arcs est le pôle O; car d'après l'équation

$$r = as = s \cos v, \tag{5}$$

on a $r = 0$ pour $s = 0$. Bien que la spirale tourne autour du pôle un nombre infini de fois, la longueur de l'arc compris entre ce point et un point quelconque M de la courbe est toujours finie. Si la tangente en M rencontre en T la perpendiculaire élevée par O sur OM, on a : OM = MT cos OMT, ou r = MT cos v; donc *l'arc compté à partir du pôle est égal à la longueur de la tangente* MT.

Soient A et B deux points de la spirale, r et r_1 les rayons OA et OB, s et s_1 les valeurs correspondantes de l'arc. La formule (5) donne

$$\text{arc AB} = s_1 - s = \frac{r_1 - r}{\cos v}.$$

Si donc on prend sur OA une longueur OB′ = OB, la perpendiculaire élevée en B′ sur OA rencontre la tangente menée en A en un point A′ tel que AA′ = arc AB. D'après cela, pour diviser l'arc AB dans le rapport $m : n$, il suffit de diviser la droite AB′ dans ce rapport en un point C′, et de chercher sur la spirale le point dont le rayon vecteur est égal à OC′. On voit de même comment on arriverait à diviser l'arc AB en parties harmoniques ou en moyenne et extrême raison, ou à porter sur la spirale à partir de A une longueur donnée.

On peut diviser l'arc AB dans le rapport OA : OB en cherchant le conjugué harmonique C′ de O par rapport à AB′; le rayon vecteur du point cherché sera égal à OC′.

Il existe des secteurs OAB satisfaisant à la relation

$$\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + (\text{arc AB})^2;$$

car celle-ci donne

$$r_1^2 = r^2 + \frac{(r_1 - r)^2}{\cos^2 v}, \quad \text{d'où} \quad r_1 = \frac{1 + \cos^2 v}{\sin^2 v}\, r.$$

De même la condition

$$(\text{arc } \overline{AB})^2 = \overline{OA}^2 + OB^2$$

se ramène à

$$r_1 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \sin^4 v}}{\sin^2 v}\, r.$$

4. Il est facile de *mener par un point donné* P *une droite inclinée sur la spirale d'un angle donné* α. Les points de la courbe où aboutissent ces droites, sont situés sur l'arc du segment capable de l'angle $180° - (v + \alpha)$, construit sur la droite OP. La question admet une infinité de solutions dans le voisinage du pôle.

En particulier, on peut trouver les tangentes ou les normales issues de P.

5. D'après l'équation (4), une spirale est déterminée par son pôle et par deux points A, B (*); car les constantes c et v résultent des égalités

$$lr = \theta \cot v + lc, \quad lr_1 = \theta_1 \cot v + lc. \tag{6}$$

On peut obtenir autant de points de la courbe qu'on veut, en observant que le rayon vecteur croît en progression géométrique lorsque l'angle polaire croît en progression arithmétique. On divisera donc l'angle AOB en n parties égales (prendre $n = 2^k$), et on portera sur les rayons de division des longueurs égales aux n moyens géométriques insérés entre OA et OB; on peut prolonger les deux progressions en dehors de l'angle AOB. Les extrémités de ces nouveaux rayons vecteurs appartiennent à la spirale.

Si l'on construit une suite de triangles BOC, COD, DOE... semblables à AOB, les points C, D, E... font partie de la courbe.

Supposons que la droite OA rencontre les spires suivantes en A_1, A_2, A_3, ...; ces points correspondent à l'angle polaire $\theta + 2\pi$, $\theta_1 + 4\pi$, $\theta + 6\pi$, ...; par suite les rayons OA, OA_1, OA_2, OA_3... sont en progression géométrique.

6. Désignons par S l'*aire balayée* par le rayon vecteur de la spirale depuis une position initiale OA jusqu'à une position quelconque OM. Le

(*) Il est sous-entendu qu'on indique le nombre de spires comprises entre A et B.

triangle infinitésimal OMM' (n°1) ayant pour surface $\frac{1}{2}$ OM.MM' sin OMM', on trouve facilement

$$dS = \tfrac{1}{2} r \sin v . ds ; \qquad (7)$$

comme $r = s \cos v$, on a

$$dS = \tfrac{1}{2} s \sin v \cos v . ds, \quad S = \tfrac{1}{4} (s_1^2 - s^2) \sin v \cos v = \tfrac{1}{4} (r_1^2 - r^2) \operatorname{tg} v,$$

où r, s, r_1, s_1 sont les valeurs des quantités r, s aux points extrêmes A et M.

Si le secteur est compté à partir du pôle ($r = 0$), il comprend une infinité de bandes superposées; cependant l'aire est finie et a pour expression $\frac{1}{4} r_1^2 \operatorname{tg} v$. Elle est égale à la moitié du triangle OMT formé par le rayon OM, la tangente en M et la perpendiculaire en O sur OM. Par conséquent, pour avoir l'aire d'un secteur OMN, il suffit de prendre sur OM une longueur OM' = OM et de tirer par M' une parallèle M''T' à MT jusqu'à la rencontre avec OT : le secteur OMN est équivalent au trapèze MM'T'T. Il est encore facile de diviser le secteur OMN par un rayon OP dans un rapport donné $m : n$; le rayon OP a pour expression

$$OP = \sqrt{\frac{m.\overline{ON}^2 + n.\overline{OM}^2}{m+n}}.$$

La condition OMP : OPN = OM : ON se traduit par $OP = \sqrt{OM.ON}$.

Signalons encore un théorème de cinématique qui résulte de la formule (7). Si un mobile parcourt la spirale avec la vitesse (variable) $V = \frac{ds}{dt}$, l'égalité (7) donne

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r V \sin v,$$

de sorte que $\frac{dS}{dt}$ se réduit à la constante $\frac{1}{2} m \sin v$ si $V = \frac{m}{r}$. Donc : ***Pour qu'un mobile parcoure une spirale en obéissant au principe des aires, sa vitesse doit être à chaque instant inversement proportionnelle au rayon vecteur.***

7. Soient r, θ, r_1, θ_1 les coordonnées de deux points A, B appartenant à une même spire de la spirale; cherchons l'aire comprise entre la corde AB et l'arc AB. On a

$$\text{secteur OAB} = \tfrac{1}{4} (r_1^2 - r^2) \operatorname{tg} v, \quad \text{triangle OAB} = \tfrac{1}{2} r r_1 \sin \lambda,$$

λ désignant l'angle AOB. Or, de

$$lr = \theta \cot v + lc, \quad lr_1 = \theta_1 \cot v + lc$$

on déduit, par soustraction,

$$lr_1 - lr = \lambda \cot v. \tag{8}$$

L'aire considérée a donc pour expression

$$\frac{1}{4}\frac{(r_1^2 - r^2)\,\lambda}{lr_1 - lr} - \frac{1}{2} r r_1 \sin \lambda.$$

Considérons maintenant des secteurs AOB, BOC, COD,.. ayant le même angle au centre; ils ont pour aire

$$\tfrac{1}{4}(\overline{OB}^2 - \overline{OA}^2)\,\mathrm{tg}\,v, \quad \tfrac{1}{4}(\overline{OC}^2 - \overline{OB}^2)\,\mathrm{tg}\,v, \cdots$$

Les rayons OA, OB, OC ··· étant en progression géométrique, les aires de ces secteurs sont également en progression géométrique.

Soient A_1, B_1, C_1 ··· les points où les rayons OA, OB, OC rencontrent la spire suivante. On a

$$OA_1 = ce^{(\theta + 2\pi)\cot v} = OA \cdot e^{2\pi \cot v}, \quad OB_1 = OB \cdot e^{2\pi \cot v};$$

par conséquent,

$$\text{aire } AA_1B_1B = \text{sect. } OA_1B_1 - \text{sect. } OAB = \tfrac{1}{4}(r_1^2 - r^2)(e^{4\pi \cot v} - 1)\,\mathrm{tg}\,v.$$

Cette formule montre que les aires AA_1B_1B, BB_1C_1C, ... sont en progression géométrique.

Soit F l'aire engendrée par un rayon vecteur OX de la courbe tournant de 2π autour de O; si OX_1 est la position finale, on a

$$F = \tfrac{1}{4}(OX_1^2 - OX^2)\,\mathrm{tg}\,v = \tfrac{1}{4}\varpi^2(e^{4\pi \cot v} - 1)\,\mathrm{tg}\,v.$$

On fait $\varpi^2 = r_1^2 - r^2$; r, r_1, ϖ sont alors les côtés d'un triangle rectangle.

Cherchons encore l'aire comprise entre trois arcs AB, BC, CA appartenant à trois spirales de même pôle O; chacun de ces arcs est supposé moindre qu'une spire. Si (r, θ), (r_1, θ_1), (r_2, θ_2) sont les coordonnées polaires des points A, B, C par rapport à un axe polaire quelconque, on a, en *grandeur et en signe*,

$$\text{aire } ABC = OAB + OBC + OCA,$$

$$OAB = \tfrac{1}{4}(r_1^2 - r^2)\frac{\theta_1 - \theta}{lr_1 - lr}, \quad OBC = \tfrac{1}{4}(r_2^2 - r_1^2)\frac{\theta_2 - \theta_1}{lr_2 - lr_1},$$

$$OCA = \tfrac{1}{4}(r^2 - r_2^2)\frac{\theta - \theta_2}{lr - lr_2}.$$

8. Il existe un grand nombre de *transformations* qui changent une

spirale logarithmique en une courbe égale. Cette propriété remarquable a déjà été signalée en 1682 par Jacques Bernoulli.

Observons d'abord que deux spirales qui ont le même angle caractéristique v peuvent coïncider; car on peut trouver sur ces courbes deux rayons vecteurs de même longueur, et on ne peut construire qu'une seule spirale sur un rayon donné OA, avec un angle donné v.

Il suit de là qu'une transformation par similitude reproduit la spirale, puisque l'angle v est conservé. Les conséquences de cette remarque sont nombreuses. Ainsi, en divisant le rayon vecteur dans un rapport constant, en construisant sur ce rayon des triangles de forme donnée, en portant sur la tangente ou sur la normale une longueur proportionnelle au rayon vecteur, en projetant le pôle sous un angle donné α sur la tangente ou sur la normale, le point ainsi obtenu engendre une spirale égale à la première.

Par inversion par rapport à un cercle de centre O, une spirale se transforme en une spirale inversement égale à la première.

Une spirale est sa propre transformée par homothétie si l'on prend pour centre de similitude le pôle O et pour rapport de similitude le rapport entre les rayons vecteurs de deux points de la courbe, situés sur une même droite issue de O.

9. Soient M un point de la spirale, MT la tangente, MN la normale, qui rencontre en N la perpendiculaire élevée en O sur OM, enfin MP une droite faisant avec OM (ou avec MP) un angle donné. Lorsque M se meut sur la courbe en entraînant les droites MO, MN, MT, MP (qui forment une figure invariable), de manière que MT reste tangente à la spirale, le centre instantané de rotation est le point N. Par suite, le point de contact de MP avec son enveloppe est la projection P de N sur MP. Mais le quadrilatère ONPM étant inscriptible, l'angle $OPM = ONM = v$; cette enveloppe est donc encore une courbe égale à la spirale proposée.

Le point de contact de la normale MN avec son enveloppe, c'est-à-dire le centre de courbure de la spirale en M, est évidemment le point N, et la développée est encore une spirale égale à la courbe primitive. La caustique par réflexion ou par réfraction du pôle d'une spirale est encore égale à cette courbe; car le rayon réfléchi ou réfracté fait un angle constant avec la tangente.

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE D'UNE PROPRIÉTÉ DES LIGNES ASYMPTOTIQUES D'UNE SURFACE RÉGLÉE;

par M. A. DEMOULIN, chargé de cours à l'Université de Gand.

Sur toute surface réglée (Σ), ***quatre lignes asymptotiques curvilignes rencontrent une génératrice rectiligne variable*** g ***en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.***

Cette propriété, bien connue, se démontre ordinairement par l'analyse; elle peut être établie par la géométrie de la manière suivante :

Soient (A_1), (A_2), (A_3) trois lignes asymptotiques de la surface (Σ). La génératrice g les rencontre aux points r_1, r_2, r_3. Prenons sur g un point r tel que

$$(r_1\, r_2\, r_3\, r) = c^{te}.$$

Je dis que la courbe (C), lieu du point r, est une asymptotique de (Σ).

Fixons la génératrice g dans une de ses positions. Une génératrice voisine g' rencontre les courbes (A_1), (A_2), (A_3), (C) aux points r'_1, r'_2, r'_3, r'. A cause de l'égalité

$$(r_1\, r_2\, r_3\, r) = (r'_1\, r'_2\, r'_3\, r'),$$

les droites $r_1r'_1$, $r_2r'_2$, $r_3r'_3$, rr' appartiennent à une demi-quadrique (Q)(*). Faisons tendre g' vers g et soit (Q_0) la limite de (Q). La demi-quadrique (Q_0) renferme les limites des droites $r_1r'_1$, $r_2r'_2$, $r_3r'_3$, c'est-à-dire trois tangentes asymptotiques de (Σ); elle est donc complémentaire de la demi-quadrique osculatrice de (Σ) suivant g, et la limite de rr', qui appartient également à (Q_0), est une tangente asymptotique de (Σ). Le point r ayant été pris arbitrairement sur la courbe (C), celle-ci est bien une asymptotique de (Σ).

(*) A l'exemple de M. Koenigs (*La Géométrie réglée et ses applications*), nous appelons ***demi-quadrique*** l'ensemble des génératrices d'une quadrique qui appartiennent à un même mode de génération. Sur toute quadrique doublement réglée, on peut distinguer deux demi-quadriques : celles-ci sont dites ***complémentaires***. — Une demi-quadrique est appelée aussi ***système réglé***.

*SUR LE CERCLE TANGENT A TROIS CERCLES DONNÉE, (*)

par M. L. Orlando, à Turin.

J'applique la transformation par rayons vecteurs réciproques au problème suivant : décrire un cercle ω tangent à trois cercles donnés α, β, γ, de rayons a, b, c.

I. Supposons d'abord que les circonférences α, β se coupent en un point M, et transformons la figure par inversion en prenant pour cercle d'inversion un cercle quelconque de centre M. Les circonférences α, β, γ se changent en deux droites α', β' et une circonférence γ'; la circonférence ω, en une circonférence ω' tangente aux lignes α', β', γ'.

Appelons ω'' une circonférence de même centre que ω' et passant par le centre C de γ' ; elle sera tangente à deux droites α'', β'' menées parallèlement à α', β' à une distance égale au rayon de γ'.

Pour tracer la circonférence ω'', désignons par C' le symétrique de C par rapport à la bissectrice de celui des angles formés par α'' et β'' qui renferme le point C. Nous aurons à tracer une circonférence passant par les points C, C' et touchant la droite α''. Ce problème est très connu ; il admet deux solutions. Mais chacune des droites α'', β'' a deux positions possibles; par suite il y a à examiner huit cas. Connaissant ω'', on passe facilement à ω', puis à ω.

II. Supposons maintenant que les circonférences α, β, γ n'aient pas de point commun deux à deux, et pour fixer les idées, admettons que ω touche α et β extérieurement, γ intérieurement. Menons trois rayons quelconques AA', BB', CC' des cercles donnés, dont A, B, C sont les centres, et portons sur ces rayons à partir de leurs extrémités, soit dans le sens AA', BB', C'C, soit dans le sens opposé, trois longueurs égales $A'A'' = B'B'' = C'C'' = l$. Les circonférences $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ décrites des centres A, B, C avec les rayons respectifs AA'', BB'', CC'' admettent une circonférence ω_1, qui les touche toutes trois et a même centre que ω. En choisissant convenablement l on peut faire en sorte que deux des circon-

---

(*) Cette solution d'un problème classique est probablement connue. Quoi qu'il en soit, il est utile d'attirer l'attention des élèves sur les ressources que présente l'inversion pour la résolution de certaines questions. (*La Rédaction*).

férences $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ se rencontrent (ou se touchent; ce qui simplifie les constructions ultérieures). Le problème est ainsi ramené au cas précédent.

Nous supprimons la discussion, qui est un peu longue.

NOTES MATHÉMATIQUES.

12. ***Sur la détermination de certaines intégrales***; par M. E. N. Barisien. Si l'intégrale que l'on recherche, représente l'aire d'une courbe connue, on peut en écrire presque immédiatement la valeur.

Cette remarque, qui paraît être une *naïveté*, a son utilité, car il y a des cas où la courbe dont l'aire représente l'intégrale donnée, n'est pas immédiatement en évidence.

Soit par exemple à rechercher l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta d\theta}{(1+k\cos^2\theta)^2}.$$

Posons

$$r = \frac{\cos\theta}{1+k\cos^2\theta};$$

cette courbe en coordonnées polaires, devient en coordonnées cartésiennes l'ellipse

$$x^2(1+k)+y^2-x=0,$$

qui a pour demi-axes $\frac{1}{2(1+k)}$ et $\frac{1}{2\sqrt{1+k}}$, de sorte que son aire est

$$U = \frac{\pi}{4(1+k)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il en résulte que

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 d\theta = U = \frac{\pi}{4(1+k)^{\frac{3}{2}}}.$$

On trouve, par le même procédé,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta d\theta}{(1+k\cos^2\theta)^2} = \frac{\pi}{4(1+k)^{\frac{1}{2}}}.$$

En ajoutant les deux intégrales, on a aussi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1+k\cos^2\theta)^2} = \frac{\pi(2+k)}{4(1+k)^{\frac{3}{2}}}.$$

×**13.** *Démonstration nouvelle du théorème : l'angle extérieur d'un triangle* ABC *est plus grand que chacun des angles intérieurs opposés.* Soient BE le prolongement de AB, CD le prolongement de AC; $y =$ ABC, $z =$ ACB, $x =$ BCD, $t =$ EBC. Il faut démontrer que $x > y$. Si $x = y$, il s'ensuivrait (par le théorème des angles adjacents) $z = t$. Donc EBCD peut être posé sur le triangle ABC de manière qu'ils coïncident parfaitement; par suite, les deux droites BE et CD devraient se rencontrer en un point O, et entre deux points A et O on pourrait tracer deux lignes droites, ce qui est impossible.

2) Si $x < y$, il s'ensuivrait (selon le théorème des angles adjacents) $t < z$. Donc, si l'on place EBCD sur le triangle ABC de manière que le côté BC tombe sur son égal CB, la droite BE tombera dans l'angle z, la droite CD dans l'angle y; par suite, les deux droites BE et CD devraient encore se rencontrer en un point O, ce qui est impossible. Donc $x > y$.

VOLKOF, professeur à l'École reale de St-Pétersbourg.

5 Fév. 1899.

×**14.** *Sur un théorème de M. Droz Farny.* M. Droz Farny a proposé récemment, dans l'*Educational Times*, la question suivante (n° 14111) : *Deux transversales rectangulaires* Δ, Δ′ *menées par l'orthocentre* H *d'un triangle* ABC *déterminent sur les côtés trois segments* A′A″, B′B″, C′C″ *dont les milieux* α, β, γ *sont en ligne droite.* Une démonstration élémentaire de ce théorème a paru dans le n° de mai 1899 du journal anglais; en voici une autre.

Considérons deux transversales quelconques A′B′C′, A″B″C″ telles que les points α, β, γ soient sur une même droite Δ″. Puisque βγ divise dans le même rapport les segments B′B″ et C′C″, Δ″ est une tangente de la parabole déterminée par les quatre tangentes AC, AB, Δ, Δ′. En raisonnant de même sur γα et αβ on voit que les transversales Δ, Δ′ doivent toucher une même parabole inscrite au triangle ABC. Si l'on fait passer Δ et Δ′ par l'orthocentre H, qui appartient à la directrice d'une parabole quelconque inscrite à ABC, elles sont nécessairement rectangulaires. (J. N.)

×**15**. ***Sur les triangles sphériques.*** Soient α, β, γ les arcs qui joignent les milieux A', B', C' des côtés d'un triangle sphérique. Si l'on élimine A entre les égalités

$$\cos\alpha = \cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\cos A,$$

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A,$$

on trouve les relations connues

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{a}{2}} = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}} = \frac{\cos\beta}{\cos\frac{b}{2}} = \frac{\cos\gamma}{\cos\frac{c}{2}} = \cos E,$$

2 E désignant l'excès sphérique A + B + C — 2. Il résulte de là que si l'un des arcs α, β, γ est égal à un quadrant, les deux autres valent également un quadrant ; les côtés vérifient la relation $\Sigma\cos a = -1$, équivalente à $\Sigma\cos^2\frac{1}{2}a = 1$, et la surface du triangle ABC est égale à deux triangles trirectangles ou à un quart de la sphère. (Comparer ***Educational Times***, mai 1899, p. 236). (J. N.).

16. ***Sur l'hyperbole équilatère***(*). Quand un triangle rectangle est inscrit dans une hyperbole équilatère, la hauteur aboutissant à l'hypoténuse est tangente à l'hyperbole.

En effet, soit A le sommet de l'angle droit du triangle ABC. On sait que *l'orthocentre H d'un triangle quelconque ABC inscrit dans une hyperbole équilatère est situé sur la courbe.*

Or, si ABC est rectangle en A, H et A se confondent, et HA devient tangente en A.

On sait aussi, par le théorème de Frégier, que *pour tous les triangles ABC rectangles en A et inscrits dans une conique, la droite BC passe par un point fixe de la normale en A*. Dans le cas de l'hyperbole équilatère, ce point fixe est rejeté à l'infini ; car le côté BC a une direction fixe, qui, d'après les propriétés énoncées, est parallèle à la normale en A.

(E. N. Barisien.)

×**17**. ***Théorème sur les nombres.*** Dans le t. I de ***Mathesis*** (1881), p. 88, on lit : *p étant un nombre premier, supérieur à* 3, $4p^2 + 1$ *est la somme de* 3 *carrés*, théorème de M. Delacuvellerie, signalé par M. Proth.

(*) Ces remarques ne sont pas nouvelles. Nous croyons cependant qu'elles intéresseront nos jeunes lecteurs. (J. N.)

J'énonce, comme il suit, un théorème analogue : *p étant premier, supérieur à* 5, p^2+1 *est la somme de* 3 *et de* 4 *carrés*. En effet

$$(6n\pm1)^2+1=(2n\pm1)^2+(4n)^2+(4n\pm1)^2$$
$$=n^2+(n\pm1)^2+(3n)^2+(5n\pm1)^2.$$

(G. DE ROCQUIGNY-ADANSON.)

BIBLIOGRAPHIE.

Notes de Bibliographie des courbes géométriques (Partie complémentaire) par H. BROCARD, Bar-le-Duc, Comte-Jacquet (Autographie de 243 pages, in-8°, 1899).

Cet ouvrage est un supplément aux Notes que nous avons annoncées à nos lecteurs dans *Mathesis*, 1898, p. 32.

Personne plus que M. Brocard n'est à même de réaliser le désir exprimé à plusieurs reprises dans les journaux mathématiques d'avoir un répertoire complet des courbes remarquables, avec indication des principaux articles qui se rapportent à chacune d'elles. Dans les deux séries de Notes publiées en autographie, notre zélé collaborateur a déjà réuni assez de matériaux pour en faire un ouvrage qui rendrait de grands services aux géomètres; il lui suffirait de rapprocher les paragraphes relatifs à une même courbe, de faire quelques rectifications et enfin d'ajouter au recueil les nouveaux renseignements, dont l'auteur dispose déjà maintenant ou qui lui seraient fournis par ses nombreux correspondants, dès qu'il ferait connaître son intention de publier définitivement ses Notes en librairie.

Het onderlinge Verband der regelmatige Lichamen en twee der half regelmatige Lichamen, door F. J. Vaes, Werktuigkundig Ingenieur, Leeraar te Rotterdam. Leiden, Sijthoff (VIII-57 pages, in-8° et 45 figures).

L'objet principal de cet ouvrage est une propriété importante que l'auteur a découverte il y a près d'un an et qui, paraît-il, ne se trouve signalée nulle part(*). Cette propriété consiste en ce que l'on peut inscrire à un cube les autres polyèdres réguliers, de telle sorte que les arêtes ou les sommets se placent d'une manière symétrique sur les faces du cube. Elle donne un moyen de tailler hors d'un cube solide les autres polyèdres réguliers convexes, les polyèdres réguliers étoilés, le dodécaèdre rhomboïdal et le triacontaèdre rhomboïdal. De là on déduit aussi des relations très curieuses entre ces divers solides. (J. N.)

(*) Pour le tétraèdre et l'octaèdre la propriété est connue depuis longtemps.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 1185.

(*Mathesis*, (2), VIII, p. 216).

Étant donné un tétraèdre quelconque ABCD, ***on considère une aire quelconque*** S_α ***située dans le plan*** BCD. ***Soit*** S_β ***la projection de*** S_α ***sur le plan*** ACD, ***les projetantes étant parallèles à l'arête*** AB; ***soient*** S_γ, S_δ ***les projections analogues de*** S_α ***sur les plans*** ABD, ABC. ***Appelons*** V_β, V_γ, V_δ ***les volumes des cônes qui ont pour sommet commun un point quelconque*** M ***du plan*** BCD, ***et pour bases respectives*** S_β, S_γ, S_δ. ***Démontrer que la somme algébrique de ces volumes est égale au volume du cône de sommet*** A ***et de base*** S_α. (J. N.)

Solution par MM. Emmerich, Buysens, Déprez, Merlin *et* Droz Farny. Le théorème est évident lorsque l'aire S_α est précisément le triangle BCD; car les aires S_β, S_γ, S_δ se confondent alors avec les faces ACD, ABD, ABC.

Donc en désignant par V'_α, V'_β, V'_γ, V'_δ les volumes ABCD, MACD, MABD, MABC on a l'égalité

$$V'_\alpha = V'_\beta + V'_\beta + V'_\delta. \tag{1}$$

D'autre part, si l'on projette sur un plan parallèlement à une même direction, différentes aires situées dans un même plan, toutes ces aires seront modifiées dans un même rapport (*Mathesis*, (2), VIII, p. 193). On peut donc écrire en appelant a, b, c, d les faces du tétraèdre ABCD :

$$\frac{S_\alpha}{a} = \frac{S_\beta}{b} = \frac{S_\gamma}{c} = \frac{S_\delta}{d}.$$

On a aussi :

$$\frac{V_\alpha}{V'_\alpha} = \frac{S_\alpha}{a}, \quad \frac{V_\beta}{V'_\beta} = \frac{S_\beta}{b}, \ldots;$$

donc

$$\frac{V_\alpha}{V'_\alpha} = \frac{V_\beta}{V'_\beta} = \frac{V_\gamma}{V'_\gamma} = \frac{V_\delta}{V'_\delta}. \tag{2}$$

De (1) et (2) on tire aisément

$$V_\alpha = V_\beta + V_\gamma + V_\delta.$$

×Question 1187.

(Voir *Mathesis*, (2), VIII, p. 216).

Etant données quatre droites a, b, c, d et un point P *dans un même plan, on mène par le point de rencontre* S *des droites a et b une sécante variable m, qui coupe c en* C *et d en* D. *La droite* PC *rencontre a en* A, *b en* B; *la droite* PD *rencontre a en* A', *b en* B'. *Démontrer que les droites* A'B *et* AB' *pivotent chacune autour d'un point fixe et que leur point d'intersection décrit une droite.* (Davidoglou.)

Solution par M. R. Buysens, Degueldre, Droz Farny *et* Merlin. Soient I le point d'intersection de AB' et A'B, T celui des droites *c* et *d*. On voit immédiatement que SI est la polaire du point P par rapport au système de droites *a*, *b*. D'autre part, les ponctuelles (A) et (B) sont perspectives à la ponctuelle (C), et les ponctuelles (A') et (B') le sont à la ponctuelle (D); les séries (C) et (D) étant perspectives, les séries (A), (B), (A'), (B') sont projectives entre elles; elles sont de plus perspectives, car lorsque la sécante *m* coïncide avec SP, les quatre points A, B, A', B' sont confondus en S; lorsque la sécante coïncide avec ST, les droites AB' et A'B se confondent avec PT. AB' et A'B pivotent donc autour de deux points de la droite PT et comme le faisceau I (AA'SP) est harmonique, ces points sont conjugués par rapport au système de la droite SI et du point P.

Solution par M. Rose. Prenons pour axes coordonnés les droites *a* et *b*. Les équations des droites *c*, *d*, *m* étant

$$\frac{y}{b}+\frac{x}{a}=1, \quad \frac{y}{b'}+\frac{x}{a'}=1, \quad y=mx,$$

les points C et D ont pour coordonnées, respectivement :

$$\frac{ab}{am+b} \text{ et } \frac{mab}{am+b}; \quad \frac{a'b'}{a'm+b'} \text{ et } \frac{ma'b'}{a'm+b'}.$$

Appelons (x_0, y_0) les coordonnées du point P; les droites PC et PD ont respectivement pour équations

$$y-y_0=\frac{mab-y_0(a+mb)}{ab-x_0(a+mb)}(x-x_0),$$

$$y-y_0=\frac{ma'b'-y_0(a'+mb')}{a'b'-x_0(a'+mb')}(x-x_0).$$

On trouve facilement les coordonnées des points A et B, A′ et B′, où elles coupent les axes :

$$\frac{ab(y_0 - mx_0)}{ab - (a + mb)x_0}, \quad \frac{ab(y_0 - mx_0)}{mab - (a + mb)x_0},$$
$$\frac{a'b'}{ab - (a + mb)x_0}, \quad \frac{a'b'(x_0 - mx_0)}{ma'b' - (a' + mb')x_0}.$$

Les équations de AB′ et A′B sont donc

$$\frac{y[ab - (a + mb)x_0]}{ab(y_0 - mx_0)} + \frac{x[ma'b' - (a' + mb')x_0]}{a'b'(y_0 - mx_0)} = 1, \qquad (1)$$
$$\frac{y[a'b' - (a' + mb')x_0]}{a'b'(y_0 - mx_0)} + \frac{x[mab - (a + mb)x_0]}{ab(y_0 - mx_0)} = 1. \qquad (2)$$

L'équation (1) peut se mettre sous la forme :

$$[aa'b'(b - x_0)y - aa'bx_0x - aa'bb'y_0] -$$
$$m[a'bb'yx_0 - abb'(a' - x_0)x - aa'bb'x_0] = 0.$$

On voit que AB′ passe par un point fixe, quelle que soit la valeur de m. On prouverait de la même manière que A′B passe par un point fixe.

En soustrayant (1) et (2) membre à membre, on a :

$$[ab(a' + mb') - a'b'(a + mb)](y - x) = 0, \quad \text{ou} \quad y - x = 0.$$

Cette équation représente une droite passant par l'intersection de A′B et AB′. Le point d'intersection de ces deux droites décrit donc une droite.

Autres solutions analytiques par MM. Barisien et Déprez.

Question 1901.

(Voir *Mathesis* (2), t. IX, p. 32).

Un angle de grandeur constante tourne autour de son sommet qui reste fixe. Il est coupé par une droite, de direction constante également, de façon à donner un triangle de périmètre constant ou de surface constante. Trouver le lieu du centre du cercle circonscrit. (Soons.)

Solution par MM. J. Déprez, Emmerich et E. N. Barisien. Soient : A le sommet fixe ; B, C les autres sommets du triangle ; O le centre du cercle circonscrit ; $2p$ le périmètre ; m^2 l'aire du même triangle ; $AO = \rho$, ω l'angle de OA avec la parallèle à la direction donnée, menée par A.

On sait que :

$$p = 4\rho \cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}C = 2\rho \cos\tfrac{1}{2}A\,[\cos\tfrac{1}{2}(B+C) + \cos\tfrac{1}{2}(C-B)];$$

mais

$$B + C = 2^{dr} - A, \quad C - B = 1^{dr} - \omega;$$

donc

$$p = 2\rho \cos\tfrac{1}{2}A\,[\sin\tfrac{1}{2}A + \sin\tfrac{1}{2}(1^{dr} + \omega)].$$

L'équation du lieu de O est

$$\rho = \frac{p}{2\cos\tfrac{1}{2}A\,[\sin\tfrac{1}{2}A + \sin\tfrac{1}{2}(1^{dr} + \omega)]}.$$

On a aussi

$$m^2 = 2\rho^2 \sin A \sin B \sin C = \rho^2 \sin A\,[\cos(C-B) - \cos(C+B)].$$

D'où, l'équation du lieu de O, si m^2 est constant :

$$\rho^2 = \frac{m^2}{\sin A\,[\cos A + \sin\omega]}.$$

Remarques I. *Soit* I_a *le centre du cercle ex-inscrit au triangle* ABC (*qui touche* BC); *si le périmètre du triangle variable* ABC *est constant, le rayon de* (I_a) *est aussi constant et* I_a *décrit une circonférence.* En effet,

$$r_a = p.\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}A = c^{te}, \quad \text{d'où} \quad AI_a = \frac{p.}{\cos\tfrac{1}{2}A} = c^{te}. \quad \text{(Déprez.)}$$

II. *Si le côté* BC *du triangle variable est de longueur constante, le point* O *décrit une circonférence ayant* A *pour centre.* Car

$$R = \frac{BC}{2\sin A} = c^{te}. \quad \text{(Déprez.)}$$

III. Le lieu du point B a pour équation

$$\rho = \frac{2p\cos\dfrac{A+\omega}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{\omega}{2}}, \quad \text{ou} \quad \rho^2 = \frac{2m^2\sin(A+\omega)}{\sin A \sin\omega}.$$

(Barisien.)

Question 1804.

(Voir *Mathesis*, (2), IX, p. 32).

Construire une courbe rationnelle du troisième degré, étant donnés trois points collinéaires, avec leurs tangentes et le point double. (V. Retali.)

Solution par M. V. Retali. Soient : V, N_1, N_2 les trois points collinéaires; v, n_1, n_2 les tangentes en ces points; O le point double. Prenons

le rayon m conjugué harmonique de la droite $N_1N_2 \equiv n$ par rapport à v et VO ; puis les droites n'_1, n'_2 respectivement conjuguées harmoniques de n_1 et n_2 par rapport à n, N_1O et à n, N_2O. La cubique cherchée est la transformée de la conique C^2 menée par O et tangente aux droites n'_1, n'_2 en N_1 et N_2, par l'inversion de *Hirst* dont O est le pôle et le couple de droites m, n la conique des points unis.

Les tangentes au point double O sont les droites qui unissent O avec les points où C^2 est coupée par v ; le tangente en O à C^2 coupe v au tangentiel du point V, etc.

×Question 1805.

(Voir *Mathesis*, (2), t. IX, p. 32).

Démontrer que l'expression

$$P \equiv x(y-z)^{6n+1} + y(z-x)^{6n+1} + z(x-y)^{6n+1}$$

est divisible par

$$(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

Chercher le quotient, quand $n = 1$. (MATHEWS.)

Solution par M. VAN DORSTEN. Comme P s'annule pour $x = y$, $y = z$ et $z = x$, P est divisible par $(x-y)(y-z)(z-x)$.

Pour démontrer que P est aussi divisible par

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx,$$

écrivons :

$$\begin{aligned} P &= x(y-z)(y-z)^{6n} + y(z-x)(z-x)^{6n} + z(x-y)(x-y)^{6n} \\ &= x(y-z)(y-z)^{6n} + y(z-x)(z-x)^{6n} - [x(y-z)+y(z-x)](x-y)^{6n} \\ &= x(y-z)\{(y-z)^{6n} - (x-y)^{6n}\} + y(z-x)\{(z-x)^{6n} - (x-y)^{6n}\}. \end{aligned}$$

Comme $a^{6n} - b^{6n}$ est divisible par $a^6 - b^6$ et par suite par a^2+ab+b^2, on reconnaît la divisibilité de

$$(y-z)^{6n} - (x-y)^{6n} \text{ par } (y-z)^2 + (y-z)(x-y) + (x-y)^2$$

et de $(z-x)^{6n} - (x-y)^{6n}$ par $(z-x)^2 + (z-x)(x-y) + (x-y)^2$.

Ces diviseurs étant identiques à $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$, la proposition est démontrée.

Quand $n = 1$, le quotient cherché est

$$x^5 + y^5 + z^5 + 2x^2y + 2xy^2 + 2y^2z + 2yz^2 + 2z^2x + 2xz^2 - 15xyz.$$

Solution par M. Emmerich. On voit immédiatement que P est divisible par

$$(y - z)(z - x)(x - y).$$

La somme

$$S = x^3 + y^3 + z^3 - yz - zx - xy$$

peut prendre la forme

$$(y - z)^3 + (y - z)(z - x) + (z - x)^2,$$

ou bien, ε étant l'une quelconque des racines cubiques imaginaires de l'unité

$$[y - z - \varepsilon(z - x)][y - z - \varepsilon^2(z - x)] \equiv QR.$$

Si S s'évanouit, on a $Q = 0$ ou $R = 0$. L'équation $Q = 0$ entraîne (à cause de $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$) :

$$y - z = \varepsilon(z - x), \quad x - y = \varepsilon^2(z - x),$$
$$\varepsilon x + y + \varepsilon^2 z = 0.$$

Substituons les valeurs de $y - z$, $x - y$ dans P; il vient

$$P = (\varepsilon x + y + \varepsilon^2 z)(z - x)^{2n+1} = 0.$$

Si $R = 0$, P s'annule encore pour des raisons semblables. Il s'ensuit que P est divisible par Q et R, donc aussi par S. Soit U le quotient de

$$x(y - z)^7 + y(z - x)^7 + z(x - y)^7$$

par

$$(y - z)(z - x)(x - y)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy),$$

U étant une fonction du 3^{me} degré symétrique en x, y, z, on peut poser

$$U = \alpha\Sigma x^3 + \beta\Sigma x^2 y + \gamma xyz.$$

Les substitutions

$$x = 2, y = 1, z = 0; \quad x = 3, y = 1, z = 0; \quad x = 3, y = 2, z = 1,$$

faites dans l'identité

$$P = (y - z)(z - x)(x - y)SU$$

conduisent aux équations

$$3\alpha + 2\beta = 7, \quad 7\alpha + 3\beta = 13, \quad 6\alpha + 8\beta + \gamma = 7.$$

On en conclut

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = -15.$$

Solution analogue par M. DÉPREZ.

Solution par UN ABONNÉ. Posons

$$y - z = \alpha, \quad z - x = \beta, \quad x - y = \gamma;$$

alors

$$P = x\alpha^{6n+1} + y\beta^{6n+1} + z\gamma^{6n+1}.$$

Ecrivons en outre

$$\alpha\beta\gamma = u, \quad \Sigma z^2 - \Sigma xy = \alpha^2 - \beta\gamma = \beta^2 - \gamma\alpha = \gamma^2 - \alpha\beta = v,$$

et observons que

(1) $$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad (2)\ x\alpha + y\beta + z\gamma = 0.$$

Il s'agit d'établir que P est divisible par uv. Or

$$\alpha^2 = \beta\gamma + v, \quad \beta^2 = \gamma\alpha + v, \quad \gamma^2 = \alpha\beta + v,$$
$$\alpha^3 = u + \alpha v, \quad \beta^3 = u + \beta v, \quad \gamma^3 = u + \gamma v;$$
$$\alpha^{6n} = (\beta\gamma + v)^{3n} = (u + \alpha v)^{2n}, \quad \beta^{6n} = (\gamma\alpha + v)^{3n} = (u + \beta v)^{2n}, \text{ etc.}$$

P peut donc s'écrire sous l'une des deux formes

(3) $$x\alpha(\beta\gamma + v)^{3n} + y\beta(\gamma\alpha + v)^{3n} + z\gamma(\alpha\beta + v)^{3n},$$

(4) $$x\alpha(u + \alpha v)^{2n} + y\beta(u + \beta v)^{2n} + z\gamma(u + \gamma v)^{2n}.$$

D'après la première, les termes de P non divisibles par $\alpha\beta\gamma = u$ se réduisent à $(x\alpha + y\beta + z\gamma)\, v^{3n} = 0$, en vertu de (2).

D'après la seconde, les termes de P non divisibles par v se réduisent à $(x\alpha + y\beta + z\gamma)\, u^{2n} = 0$, pour la même raison. Donc P est divisible par uv.

Dans le cas où $n = 1$, on a

$$P = x\alpha(u^2 + 2\alpha uv + \alpha^2 v^2) + y\beta(u^2 + 2\beta uv + \beta^2 v^2) + z\gamma(u^2 + 2\gamma uv + \gamma^2 v^2)$$
$$= 2uv(x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2) + v^2(x\alpha^3 + y\beta^3 + z\gamma^3).$$

Or, d'après les relations précédentes,

$$x\alpha^3 + y\beta^3 + z\gamma^3 = u(x + y + z).$$

Le quotient de P par uv est donc

$$2(x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2) + v(x + y + z)$$

ou

$$2[x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2]+(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

On peut encore lui donner la forme

$$2(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)-(x^3+y^3+z^3)-15xyz.$$

Question 1206.

(Voir *Mathesis*, (2), IX, p. 32).

Chercher le lieu du pied de la normale menée du point O *à une conique qui touche les côtés d'un angle* MON, *aux points donnés* M *et* N.

(Lemoine.)

Solution par M. E. N. Barisien. Prenons pour axes de coordonnées les bissectrices de l'angle MON. Les équations des trois droites OM, ON et MN étant

$$y-mx=0,\quad y+mx=0,\quad bx+ay-ab=0,$$

l'équation générale des coniques de l'énoncé est

$$(y-mx)(y+mx)+\lambda(bx+ay-ab)^2=0,$$

ou

$$m^2x^2-y^2-\lambda(bx+ay-ab)^2=0. \qquad (1)$$

La normale au point (x, y) de cette conique a pour équation

$$\frac{X-x}{m^2x-b\lambda(bx+ay-ab)}=\frac{Y-y}{-y-\lambda a(bx+ay-ab)}.$$

En exprimant qu'elle passe par l'origine O, on trouve

$$xy(1+m^2)-\lambda(by-ax)(bx+ay-ab)=0. \qquad (2)$$

On obtient l'équation du lieu demandé en éliminant λ entre (1) et (2). Après suppression du facteur $(bx+ay-ab)$, on a

$$(bx+ay)xy(m^2+1)+(ax-by)(m^2x^2-y^2)-ab(m^2+1)xy=0,$$

ou

$$(am^2x+by)(x^2+y^2)=ab(m^2+1)xy.$$

Le lieu est donc une cubique, strophoïde oblique dont le point double est en O; les tangentes en O sont Ox et Oy. L'asymptote réelle de la

courbe a pour équation

$$am^2x + by + \frac{a^2b^2m^2(m^2+1)}{a^2mb + b^2} = 0.$$

Autres solutions par MM. Soons (axes coordonnés : OM et la perpendiculaire en O), Ripert et Déprez (axes : OM et ON).

En prenant OMN (= ABC) pour triangle de référence, M. Ripert trouve pour équation en coordonnées normales,

$$x(y^2 - z^2) + 2yz(y\cos B - z\cos C) = 0.$$

Si le triangle OMN est isoscèle, le lieu se décompose en la hauteur issue de O et le cercle circonscrit OMN (Ripert, Déprez).

Le lieu du pied d'une normale d'angle α, menée par O aux coniques considérées, est encore une cubique (Déprez).

Question 1207 (*).

(Voir *Mathesis* (2), IX, p. 56).

Démontrer la relation

$$\sum_{p=0}^{p=i} (-1)^p 2^p C_{2n-p,n} C_{i,p} =$$

$$(-1)^{\frac{i}{2}} \frac{1.3.5\ldots(i-1) \times 1.3.5\ldots(2n-i-1)}{1.2.3\ldots n} \cdot 2^n,$$

si i est un nombre pair. Si i est impair, la somme indiquée est nulle.

(Beaupain.)

Solution par M. Emmerich. Formons les développements binomiaux :

$$(1-2x)^i = 1 - 2x\,C_{i,1} + (2x)^2 C_{i,2} - \cdots + (-1)^i (2x)^i C_{i,i},$$

$$(1-x)^{-n-1} = 1 + x\,C_{n+1,n} + x^2 C_{n+2,n} + \cdots + x^{n-1} C_{2n-1,n} + x^n C_{2n,n} + \cdots$$

Dans le produit $P = (1-2x)^i (1-x)^{-n-1}$ le coefficient de x^n sera

$$A = C_{2n,n} - 2\,C_{2n-1,n} C_{i,1} + 2^2 C_{2n-2,n} C_{i,2} - \cdots + (-1)^i 2^i C_{2n-i,n} C_{i,i},$$

ce qui représente le premier membre de la proposition.

Posons alors

$$P = \{(1-x) - x\}^i (1-x)^{-n-i}$$

$$= (1-x)^{-n+i-1} - x(1-x)^{-n+i-2} C_{i,1} + x^2 (1-x)^{-n+i-3} C_{i,2} - \cdots + (-1)^i x^i (1-x)^{-n-1}$$

Nous trouvons ainsi pour le coefficient de x^n ressortant du développe-

---

(*) Enoncé rectifié.

ment des puissances, négatives sans exception, de $(1-x)$

$$A = C_{2n-i,n} - C_{2n-i,n-1}\,C_{i,1} + C_{2n-i,n-2}\,C_{i,2} - \cdots + (-1)^i\,C_{2n-i,n-i}\,C_{i,i}.$$

Observons maintenant que

$$C_{2n-i,n-k}\,C_{i,k} = \frac{(2n-i)!\times i!}{(n-k)!\,(n-i+k)!\,k!\,(i-k)!}\times\frac{n!\,n!\,(2n)!}{(2n)!\,n!\,n!}$$

$$= \frac{(2n-i)!\,i!}{(2n-)!}\cdot\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot\frac{n!}{(i-k)!\,(n-i+k)!}\cdot\frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

$$= \frac{C_{2n,n}}{C_{2n,i}}\cdot C_{n,k}\,C_{n,i-k}.$$

La somme A prend donc la forme

$$A = (C_{2n,n} : C_{2n,i})\,(C_{n,0}\,C_{n,i} - C_{n,1}\,C_{n,i-1} + \cdots + (-1)^i\,C_{n,i}\,C_{n,0}).$$

Les séries

$$(1+x)^n = 1 + x\,C_{n,1} + x^2\,C_{n,2} + \cdots\ x^{i-1}\,C_{n,i-1} + x^i\,C_{n,i} + \cdots,$$

$$(1-x)^n = 1 - x\,C_{n,1} + x^2\,C_{n,2} - \cdots + (-1)^{i-1}\,x^{i-1}\,C_{n,i-1} + (-1)^i\,x^i\,C_{n,i}\cdots$$

montrent que la seconde parenthèse est le coefficient de x^i dans le développement de $(1+x)^n\,(1-x)^n = (1-x^2)^n$; sa valeur est donc $(-1)^{\frac{i}{2}}\,C_{n,\frac{i}{2}}$ ou 0, selon que i est un nombre pair ou impair.

Dans le premier cas, nous avons ainsi le résultat sous la forme condensée

$$A = (-1)^{\frac{i}{2}}\,C_{2n,n}\,C_{n,\frac{i}{2}} : C_{2n,i}.$$

Pour passer au résultat proposé, remarquons que

$$\frac{C_{2n,n}\,C_{n,\frac{i}{2}}}{C_{2n,i}} = \frac{(2n)!\,n!}{(2n)!\,n!\,n!}\cdot\frac{i!}{(\frac{i}{2}i)!}\cdot\frac{(2n-i)!}{(n-\frac{i}{2}i)!}.$$

Or on sait que

$$(2r)! : r! = 1.3.5\ldots(2r-1).2^r.$$

La connexion des deux formes du résultat est donc manifeste.

QUESTIONS D'EXAMEN.

894. Le côté AB d'un pentagone articulé ABCDE reste fixe; si l'on déforme la figure de manière que les angles C et E soient toujours égaux entre eux, le sommet D décrit une circonférence.

(Dixon, *Mathematical Gazette.*)

Soient a, b, c, d, e, x, y les longueurs des côtés AB, BC, CD, DE, EA et des diagonales DA, DB. On a

$$x^2 = e^2 + d^2 - 2ed\cos E,\ y^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C;$$

égalons les valeurs de cos E, cos C :

$$bcx^2 - edy^2 = bc(c^2 + d^2) - ed(b^2 + d^2).$$

Donc D décrit une circonférence dont le centre divise AB soustractivement dans le rapport $ed : bc$. Le lieu est une droite si $bc = ed$.

895. Démontrer que

$$\arcsin\frac{bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}} + \arcsin\frac{ca}{\sqrt{(b^2+c^2)(b^2+a^2)}} + \arcsin\frac{ab}{\sqrt{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}} = \frac{\pi}{2}.$$

(LODGE.)

Si α, β, γ sont les arcs compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ qui correspondent aux trois termes du premier membre, on a

$$\sin\alpha = \frac{bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{bc}{a\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ \text{etc.};$$

on vérifie facilement que

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha = 1.$$

896. Construire un triangle ABC, connaissant la longueur de la bissectrice AD, le rapport AB : AC, et la différence des angles à la base BC.

La différence B − C fait connaître l'angle ADC. Plaçons donc la bissectrice AD, et la droite (indéfinie) BC; prenons sur celle-ci deux segments DB', DC' qui sont dans le rapport AB : AC, puis marquons le symétrique B'' de B' par rapport à AD. Si C'B'' rencontre AD en A', le triangle A'B'C' est semblable à ABC.

897. Soient BCA''A', CAB''B', ABC''C' les carrés construits extérieurement sur les côtés d'un triangle ABC, ω l'angle de Brocard et S l'aire de ce triangle.

1° Les droites AA', BB', CC' se coupent aux sommets d'un triangle PQR, et les droites AA'', BB'', CC'' aux sommets d'un triangle P'Q'R'; ces triangles ont même surface $\frac{S}{2+\cot\omega}$.

2° Les droites C'A'', A'B'', B'C'' en se coupant déterminent un triangle de surface $\frac{2S}{2+\cot\omega}$.

3° Les droites AA', BB', CC' prises en grandeur et en direction sont les côtés d'un triangle de surface $S(2+\cot\omega)$.

4° Les droites C'A'', A'B'', B'C'' prises en grandeur et en direction sont les côtés d'un triangle de surface $2S(2+\cot\omega)$.

5° Les droites PP', QQ', RR' se coupent deux à deux sur les hauteurs de ABC, aux sommets d'un triangle de surface $S\left(\frac{1+\cot\omega}{2+\cot\omega}\right)^2$.

(W. S. Cooney, *Math. Gazette.*)

6° $\overline{AA'}^2+\overline{BB'}^2+\overline{CC'}^2=4S(2\cot\omega+3)$, $BB''=CC'=\frac{B'C''}{\sqrt{2}}$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1827**. Trouver tous les nombres qui soient le double du carré de la somme de leurs chiffres. (Emmerich.)

1828. Étudier la courbe décrite par un point, qui se meut constamment suivant la résultante de n forces, dirigées vers n points fixes.

(E. Cesàro).

1829. Soient A et B deux points fixes, M un point variable de la circonférence d'un cercle, O un point fixe de l'espace. Démontrer que les sommets des cônes passant par les cercles circonscrits aux triangles OAM et OBM se trouvent sur deux droites. (C. Juel).

×**1830**. Soient a, b, c, d, Q les côtés et la surface d'un quadrilatère convexe ABCD, inscrit à un cercle; T la surface du triangle qui a pour sommets les points de concours E, F, G des côtés opposés et des diagonales; T_1 la surface du triangle dont les côtés sont dirigés suivant les lignes AC, BD, EF. Démontrer les formules

$$\frac{T}{Q}=\frac{2abcd}{(a^2-c^2)(b^2-d^2)},\qquad \frac{T_1}{Q}=\frac{4a^2b^2c^2d^2}{(a^2b^2-c^2d^2)(a^2d^2-b^2c^2)}.$$

(J. Neuberg.)

Rectifications: 1898, (2), VIII, p. 239, question d'examen 859, lire, dans l'énoncé, $-3\cos^2 y$ au lieu de $-3\cos^2 y$, et dans la discussion : Si $1<\lambda<5$, une seule valeur de x est comprise entre -1 et $+1$; si $5<\lambda<6$, les deux valeurs de x sont comprises entre -1 et $+1$. — 1899, (2), IX, p. 55, question d'examen 878, lire dans le premier membre $\Sigma\sin^2 a\ \sin^2(b-c)$, ou dans le second membre,

$$-3\sin(a+b+c)\ \sin(b-c)\ \sin(c-a)\ \sin(a-b).$$

Des changements analogues doivent être introduits dans la seconde égalité.

NÉCROLOGIE.

—

FÉLIX DAUGE (1829-1899).

Félix Dauge, professeur émérite à l'Université de Gand, est mort le dimanche, 23 juillet dernier, après une courte maladie.

Qu'il soit permis aux éditeurs de *Mathesis* de consacrer quelques lignes à la mémoire du maître vénéré qui a guidé leurs premiers pas dans la carrière de l'enseignement et qui, pendant sa longue carrière, a si bien mérité de l'Université de Gand et de l'École du Génie civil et des Arts et Manufactures.

Félix Dauge naquit à Bruxelles, le 24 mai 1829. Après de bonnes études moyennes dans sa ville natale et une année d'études complémentaires à la section transitoire de l'École du Génie civil, il entra à cette École comme élève de la section des Ponts et Chaussées (1847). Il en sortit premier cinq ans après, mais pour y rentrer presque immédiatement comme répétiteur d'Algèbre, de Géométrie analytique et de Géométrie descriptive. En 1853, il fut lauréat au concours universitaire; en 1854, il devint répétiteur d'Analyse et de Mécanique.

Quatre ans plus tard, il fut nommé professeur extraordinaire et, comme tel, chargé des cours de Géométrie analytique et de Méthodologie mathématique qu'il conserva jusqu'à la fin de sa carrière (1898), et aussi du cours d'Astronomie tant à l'École du Génie civil qu'à la Faculté des Sciences. En 1863, il fut promu à l'ordinariat. Il eut dès lors, en outre, l'Algèbre supérieure dans ses attributions et il garda ce cours jusqu'en 1879.

En 1878, Dauge succéda à Andries comme Inspecteur des Études à l'École préparatoire du Génie civil et des Arts et Manufactures ainsi qu'à l'École normale des Sciences; il acheva la réorganisation de ces Écoles au point de vue scientifique et au point de vue pratique et il ne prit sa retraite (1898) qu'après l'avoir conduite à bonne fin. Hélas, il n'a pu jouir que bien peu de temps des loisirs de l'éméritat: il est mort moins

d'un an après avoir abandonné ses fonctions actives de professeur et d'Inspecteur des études.

DAUGE a été un professeur éminent, d'une extrême clarté d'exposition. Il a transformé le cours d'Algèbre supérieure en le rendant plus logique et plus rigoureux; il a élevé à une grande hauteur le cours d'Astronomie de la Faculté des Sciences; enfin il a vraiment créé le cours de *Méthodologie mathématique*. Son livre sur la matière dont nous avons analysé dans *Mathesis* les deux éditions successives (publiées en 1883 et 1896; il existe une édition antérieure manuscrite) restera comme l'œuvre capitale de DAUGE. On pourra l'améliorer dans les détails, on pourra même en agrandir le cadre; mais le plan général en est excellent et ne pourra guère être changé. Les idées fondamentales de la Méthodologie de DAUGE ont d'ailleurs pénétré directement ou indirectement tout l'enseignement mathématique des collèges et des athénées belges.

DAUGE a fait paraitre dans *Mathesis* d'habiles plaidoyers contre la géométrie non euclidienne et quelques autres articles de méthodologie. Son cours d'Astronomie existe en manuscrit. Il a aussi publié à l'Académie de Belgique une curieuse note sur la parallaxe de profondeur des taches solaires. On lui doit également un certain nombre de notices insérées dans les Recueils de l'Association des Élèves sortis des Écoles spéciales de Gand. Tous ses écrits portent l'empreinte d'un esprit extrêmement judicieux.

DAUGE était Commandeur de l'Ordre de Léopold et Ingénieur en chef honoraire des Ponts et Chaussées.

Comme professeur, comme inspecteur des études, DAUGE avait su gagner les plus vives sympathies des élèves des Écoles spéciales de Gand, par son tact, sa douce fermeté, sa bonté paternelle. Les étudiants ont témoigné l'affection qu'ils lui portaient dans des manifestations inoubliables dont la dernière eut lieu le 19 mai de cette année. Il n'était pas moins aimé de ses collègues qui l'estimaient hautement à cause de sa droiture, de sa grande bienveillance et de l'aménité de son caractère.

P. M. et J. N.

*CONSTRUCTION DU POLYGONE DE DIX-SEPT CÔTÉS;

par M. G. Fontené, professeur au Collège Rollin, à Paris.

Le fait que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ peut s'écrire

$$\frac{2x}{1 - x^4} = 2$$

donne pour les deux décagones réguliers une construction connue où l'on fait la bissection de l'angle défini par la formule $\operatorname{tg} u = 2$; les apothèmes des deux pentagones, pour un cercle de rayon R, étant les côtés des deux décagones pour un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ R, on a, pour le pentagone, la construction de la figure : $OS = \frac{1}{2} OA_0$, Sa_1, Sa_2, sont les bissectrices des angles OSA_0, $SO\alpha$.

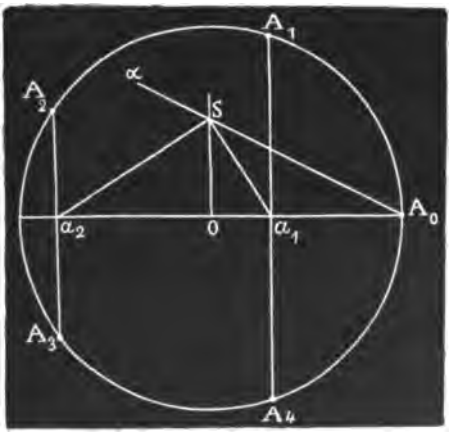


Fig. 1.

Je me propose de faire voir ailleurs que la construction du polygone de $p = 2^n + 1$ côtés, p premier et égal au moins à 17, peut être commencée par une quadrisection analogue à celle employée ici, en prenant

$$OS = \frac{R}{\sqrt{p - 1}};$$

la même chose a lieu pour $p = 16\,b^2 + 1$, p premier. Avec $p = 8n + 1$, p premier, il en est encore de même, mais le point S n'est plus sur la perpendiculaire en O au rayon OA_0. Dans la présente note, j'expose une construction élémentaire du polygone de 17 côtés dont la partie essentielle est une quadrisection d'angle.

1. On sait, d'après Gauss, qu'il est possible d'inscrire avec la règle et le compas le polygone régulier de 17 côtés, 17 étant un nombre premier de la forme $2^n + 1$. Le sommet A_0 étant donné, les autres sommets $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{16}$ étant projetés en $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_8$ (non marqués sur la figure) sur le diamètre qui passe en A_0, nous chercherons les points a ; et comme, en posant $\omega = \frac{2\pi}{17}$, on a

$$\cos k\omega = \frac{Oa_k}{R},$$

OA_0 étant le sens positif, nous chercherons les quantités $\cos\omega$, $\cos 2\omega$, $\cos 3\omega$, ..., $\cos 8\omega$; on devra tenir compte de ce que l'on a $\cos k\omega = \cos k'\omega$ pour $k + k' = 17$.

La quantité

$$\eta = 2(\cos k\omega + \cos 2k\omega + \cos 4k\omega + \cos 8k\omega),$$

dont le développement se limite de lui-même, prend la même valeur pour les valeurs k', $2k'$, $4k'$, $8k'$ données à k; elle a donc seulement deux valeurs et sera donnée par une équation du second degré à coefficients rationnels. On aura, en donnant à k les valeurs 1 et 3,

$$\begin{cases} \eta_0 = 2(\cos\omega + \cos 2\omega + \cos 4\omega + \cos 8\omega), \\ \eta_1 = 2(\cos 3\omega + \cos 6\omega + \cos 5\omega + \cos 7\omega). \end{cases}$$

Le fait que le centre des moyennes distances des 17 sommets du polygone est le point O donne d'abord

$$\eta_0 + \eta_1 = -1.$$

Si l'on développe le produit $\eta_0\eta_1$, en tenant compte de la formule

$$2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b),$$

on trouve

$$\frac{\eta_0\eta_1}{2} = 4\frac{\eta_0 + \eta_1}{2}, \quad \text{d'où} \quad \eta_0\eta_1 = -4.$$

Alors η_0 et η_1 sont racines de l'équation

$$\eta_i^2 + \eta_i - 4 = 0, \tag{1}$$

i étant zéro ou un.

On pose ensuite, en prenant les termes de deux en deux dans η_0 et dans η_1,

$$\begin{cases} \eta_{00} = 2(\cos\omega + \cos 4\omega), \\ \eta_{01} = 2(\cos 2\omega + \cos 8\omega), \end{cases} \qquad \begin{cases} \eta_{10} = 2(\cos 3\omega + \cos 5\omega), \\ \eta_{11} = 2(\cos 6\omega + \cos 7\omega), \end{cases}$$

chacun des deux angles associés étant équivalent au quadruple de l'autre relativement au cosinus; *à priori*, l'inconnue $\cos k\omega + \cos 4k\omega$, dont le développement se limite de lui-même puisque l'on a $\cos 16k\omega = \cos k\omega$, prend la même valeur pour les valeurs k' et $4k'$ données à k, d'où il suit que η_{00} et η_{01} par exemple seront donnés par une équation du second degré dont les coefficients seront des fonctions rationnelles de η_0; un fait analogue aura lieu pour η_{10} et η_{11}, par rapport à η_1. On a d'abord $\eta_{00} + \eta_{01} = \eta_0$, et l'on trouve comme plus haut $\eta_{00}\eta_{01} = -1$; de même, pour η_{10} et η_{11}; on a donc les deux équations résumées dans la suivante :

$$\eta_{ij}^2 - \eta_i \cdot \eta_{ij} - 1 = 0. \tag{2}$$

2. *Si, dans l'équation* (2) *et en vertu de l'équation* (1), *on remplace* η_i par $\frac{-4}{\eta_{i'}}$, i' étant 1 ou 0 selon que i est 0 ou 1, on peut écrire

$$\frac{2\frac{\eta_i}{2}}{1-\left(\frac{\eta_i}{2}\right)^2} = 4, \tag{1'}$$

$$\frac{2\eta_{ij}}{1-\eta_{ij}^2} = \frac{\eta_{ij'}}{2}; \tag{2'}$$

si donc on pose

$$4 = \operatorname{tg} \varpi, \quad \frac{\eta_i}{2} = \operatorname{tg} \varpi_i, \quad \eta_{ij} = \operatorname{tg} \varpi_{ij}, \tag{3}$$

on a

$$\varpi_i = \frac{\varpi}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\varpi + \pi}{2}, \tag{4}$$

$$\varpi_{ij} = \frac{\varpi_{ij'}}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\varpi_{ij'} + \pi}{2}, \tag{5}$$

où il faut prendre garde au changement de i en i'.

Prenons, sur la perpendiculaire au diamètre qui passe en A_0, une longueur $OS = \frac{1}{6} R$, et menons A_0S que nous prolongerons en $S\alpha$; l'angle ϖ est l'angle OSA_0. Si nous menons (fig. 2) les bissectrices SE_0 et SE_1 des deux angles OSA_0 et $OS\alpha$, nous aurons, en disposant de l'indice de E,

$$\varpi_0 = OSE_0, \quad \varpi_1 = OSE_1,$$

et l'on verra par la figure que ϖ_0 correspond à la bissectrice de l'angle aigu. Si nous menons ensuite les bissectrices SE_{00} et SE_{01} des deux angles OSE_1 et $OS\varepsilon_1$, $S\varepsilon_1$ étant le prolongement de E_1S, nous aurons

$$\varpi_{00} = OSE_{00}, \quad \varpi_{01} = OSE_{01},$$

et l'on verra par la figure que ε_{00} correspond à la bissectrice de l'angle obtus; si nous traçons de même les bissectrices SE_{10} et SE_{11} des deux angles OSE_0 et $OS\varepsilon_0$, nous aurons

$$\varepsilon_{10} = OSE_{10}, \quad \varepsilon_{11} = OSE_{11},$$

ε_{10} correspondant à la bissectrice de l'angle aigu; ce dernier fait peut être prévu d'après les autres, au moyen de la relation donnée par Gauss et facile à vérifier,

$$(6) \qquad (\eta_{00} - \eta_{01})(\eta_{10} - \eta_{11}) = 2(\eta_0 - \eta_1).$$

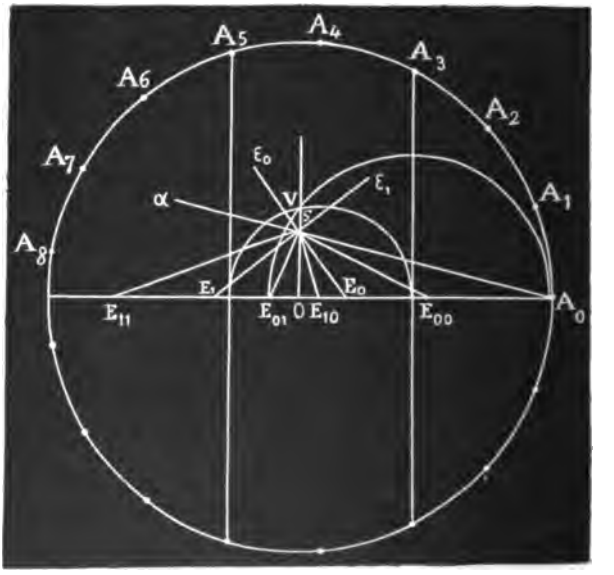


Fig. 2.

D'après la définition des deux quantités η_i, on a d'abord

$$\frac{Oa_1 + Oa_2 + Oa_4 + Oa_8}{4} = \frac{R}{4}\frac{\eta_0}{2} = OS \times \operatorname{tg} \varepsilon_0 = OE_0,$$

$$\frac{Oa_5 + Oa_6 + Oa_8 + Oa_7}{4} = \frac{R}{4}\frac{\eta_1}{2} = OS \times \operatorname{tg} \varepsilon_1 = OE_1,$$

de sorte que les points E_0 et E_1 sont respectivement les centres des moyennes distances des points a_1, a_2, a_4, a_8 et des points a_5, a_6, a_8, a_7.

D'après la définition des quantités η_{ij}, on a ensuite

$$\frac{Oa_1 + Oa_4}{2} = \frac{R}{4}\eta_{00} = OS \times \operatorname{tg} u_{00} = OE_{00},$$

$$\frac{Oa_2 + Oa_3}{2} = \frac{R}{4}\eta_{01} = OS \times \operatorname{tg} u_{01} = OE_{01},$$

$$\frac{Oa_5 + Oa_8}{2} = \frac{R}{4}\eta_{10} = \frac{R}{4} \times \operatorname{tg} u_{10} = OE_{10},$$

$$\frac{Oa_6 + Oa_7}{2} = \frac{R}{4}\eta_{11} = \frac{R}{4} \times \operatorname{tg} u_{11} = OE_{11},$$

de sorte que les points E_{00}, E_{10}, ... sont respectivement les milieux des segments a_1a_4, a_2a_3, ... Il suit de là, en passant, que E_0 est milieu du segment $E_{00}E_{01}$, ... Le relation (6) donne

$$E_{01}E_{00} \times E_{11}E_{10} = OA_0 \times E_1E_0.$$

3. Pour achever la solution du problème, observons que les formules de définition des η_{ij} (fin du n° 1) donnent, après avoir remplacé 4ω et 7ω par 13ω et 10ω,

$$\begin{cases} \eta_{00} = 4\cos 6\omega \cos 7\omega, \\ \eta_{01} = 4\cos 3\omega \cos 5\omega, \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_{10} = 4\cos \omega \cos 4\omega, \\ \eta_{11} = 4\cos 2\omega \cos 8\omega, \end{cases}$$

d'où l'on déduit, en changeant d'ailleurs l'ordre des formules

$$\begin{cases} Oa_1 \times Oa_4 = OA_0 \times OE_{10}, \\ Oa_2 \times Oa_3 = OA_0 \times OE_{11}, \end{cases} \quad \begin{cases} Oa_5 \times Oa_8 = OA_0 \times OE_{01}, \\ Oa_6 \times Oa_7 = OA_0 \times OE_{00}. \end{cases}$$

Si donc, par exemple, on décrit une circonférence de diamètre A_0E_{01} qui coupe OS en V, la circonférence de diamètre a_5a_8 doit passer en V; comme son centre E_{10} est connu, on peut la tracer; ayant A_5 et A_8 on achève facilement.

4. Au point de vue du tracé, ayant mené la perpendiculaire en O à OA_0, on détermine S en utilisant deux fois le cercle donné; pour avoir E_{10} et E_{01}, on trace un cercle de centre S qui coupe SO en un point I, et l'on utilise quatre fois un cercle de centre I; ayant obtenu a_5 et a_8, on peut mener les perpendiculaires a_5A_5 et a_8A_8 au moyen de deux cercles concentriques dont l'un passe en a_5 et l'autre passe en a_8.

NOTE. On peut arriver autrement à la quadrisection de l'angle OSA_0. Si l'on pose, avec un développement qui se limite de lui-même,

$$\theta = 2\cos k\omega + 2\cos 4k\omega$$

(θ remplaçant ici η_{ij}), on aura la même valeur de θ pour $k = k'$ et pour $k = 4k'$, de sorte que l'équation en θ sera du 4e degré. Cette équation a été donnée par Lebesgue, dans les *Nouvelles Annales* pour l'année 1846. Voulant calculer $\cos\omega$, $\cos 2\omega, \ldots$, pour $\omega = \frac{2\pi}{17}$, il considère l'équation

$$\cos x = \cos 16x,$$

qui donnera d'ailleurs des solutions étrangères relatives à $\frac{2\pi}{15}$, et la remplace ingénieusement par le système

$$\cos x = \cos 4y, \quad \cos y = \cos 4x;$$

au moyen de la formule

$$2\cos 2z = (2\cos z)^2 - 2,$$

et en posant $2\cos x = X$, $2\cos y = Y$, il obtient les équations

$$X = Y^4 - 4Y^2 + 2, \quad Y = X^4 - 4X^2 + 2.$$

L'addition et la soustraction donnent, en écartant la solution étrangère $X = Y$,

$$\begin{cases} X + Y = X^4 + Y^4 - 4(X^2 + Y^2) + 4, \\ X^3 + Y^3 + XY(X + Y) - 4(X + Y) + 1 = 0; \end{cases}$$

en posant $X + Y = \theta$, $XY = \theta'$, ce qui correspond au calcul fait plus haut, on arrive à l'équation en θ :

$$\theta^4 - 8\theta^4 + 4\theta^3 + 8\theta^2 - 1 = 0,$$

que Lebesgue obtient d'une manière un peu différente; la suppression du facteur $\theta^2 - \theta - 1$, connu *a priori* et correspondant à $\frac{2\pi}{15}$, lui donne l'équation

$$\theta^4 + \theta^3 - 6\theta^2 - \theta + 1 = 0,$$

qu'il résout en la mettant sous la forme

$$(\theta^2 + \frac{1}{2}\theta - 1)^2 - \frac{17}{4}\theta^2 = 0,$$

etc. Mais on peut remarquer que l'équation, écrite sous la forme

$$\frac{4\theta - 4\theta^3}{1 - 6\theta^2 + \theta^4} = 4.$$

est résolue par les formules

$$\theta = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}, \quad \operatorname{tg}\alpha = 4,$$

et c'est ainsi que j'ai été conduit à résoudre géométriquement les deux premières équations que donne la méthode de Gauss; d'ailleurs, si l'on pose $\theta - \frac{1}{\theta} = \eta$, on arrive aux équations (1) et (2), qui donnent deux bissections successives.

SUR LES TRANSFORMATIONS QUADRATIQUES INVOLUTIVES;

par M. L. Ripert.

M. Neuberg a publié sous le même titre (voir *Mathesis*, (1), VIII, 1888, p. 177) un article d'une grande importance pour la géométrie du triangle. Je me propose de montrer que les principes qui y sont exposés s'appliquent non moins facilement aux droites qu'aux points, aux plans qu'aux droites, au trièdre qu'au triangle, et même, dans une certaine mesure, au tétraèdre.

Restons d'abord en géométrie plane. Le paragraphe (I) suivant est une *traduction* pure et simple de l'article de M. Neuberg; c'est un *calque* corrélatif, pour lequel je me suis efforcé d'employer les mêmes termes. Il peut être lu d'une manière indépendante; mais il acquerra son principal intérêt si l'on se reporte préalablement à l'article de 1888.

I.

1. Considérons deux ponctuelles involutives (b), (c) ayant pour supports les droites b, c. Soient d_1 une droite quelconque du plan et d_2 la droite de jonction des points conjugués avec bd_1 et cd_1 dans (b) et (c). Les droites d_1 et d_2 se correspondent dans une transformation involutive. En général, *à toute droite d_1 correspond une seule droite d_2, et la construction qui conduit de d_1 à d_2 nous ramène de d_2 à d_1.*

2. Soient ba, ca les points conjugués de bc considéré comme point de (b), puis de (c). Quand d_1 coïncide avec b, bd_1 est indéterminé et cd_1 a pour conjugué ca; donc d_2 est alors une droite arbitraire passant par ca. De même, si d_1 coïncide avec c, d_2 est arbitraire et passe par ba. Enfin, si l'on fait coïncider d_1 avec a, bd_2 et cd_2 se confondent avec bc. Donc, *les côtés du triangle (a, b, c) correspondent chacun à une droite quelconque*

passant par le sommet opposé; a, b, c seront dites les *droites principales* de la transformation.

3. Les points ad_1 et ad_2 sont également les points conjugués d'une ponctuelle involutive (a) (*), etc.

Pour définir la transformation, il suffit de se donner les droites principales a, b, c et deux droites correspondantes d_1 et d_2. Les trois involutions (a), (b), (c) seront déterminées chacune par deux couples de points conjugués, savoir :

$$ab \text{ et } ac,\quad ad_1 \text{ et } ad_2\ ;\quad bc \text{ et } ba,\quad bd_1 \text{ et } bd_2\ ;\quad ca \text{ et } cb,\quad cd_1 \text{ et } cd_2.$$

On obtient tous les couples de l'involution (a) en combinant le couple bl_1, bd_2 de (b) avec un couple variable de (c); ou le couple cd_1, cd_2 de (c) avec un couple variable de (b). Donc *un couple quelconque de* (b) *associé à un couple quelconque de* (c) *détermine quatre droites passant par deux couples de points conjugués de* (a).

4. La construction des droites correspondantes de la transformation se fait aisément au moyen d'une conique fixe σ, inscrite au triangle (a,b,c). En effet, si, de deux points conjugués quelconques de (a), ad_1 et ad_2, on mène à σ les tangentes a_1 et a_2, le point a_1a_2 est situé sur une droite fixe α passant par le point bc, position particulière du point a_1a_2. Nous dirons que α est la *polaire de l'involution* (a). Soient de même β et γ les polaires des involutions (b) et (c).

Ces polaires peuvent être obtenues au moyen d'un premier couple de droites supposé connu. Pour déterminer ensuite l'homologue d'une droite donnée d_1, prenons les points ad_1a_1, bd_1b_1, cd_1c_1, et menons les tangentes a_2, b_2, c_2 à σ par les points αa_1, βb_1, γc_1. Les points aa_2, bb_2, cc_2 seront situés sur la droite demandée d_2.

5. De même que deux des involutions (a), (b), (c) entraînent la troisième, deux des polaires α, β, γ déterminent la troisième. *Ces droites passent par un point* Σ *qui est, dans la transformation considérée, le point correspondant à la conique* σ.

(*) Je supprime, pour abréger, la traduction de deux démonstrations du fait corrélatif que contient l'article de M. Neuberg. Cette traduction, que le Lecteur n'aura aucune peine à faire, est en réalité inutile; car, un fait projectif étant démontré, son corrélatif l'est par dualité; il suffit donc de l'énoncer. La même observation s'applique à quelques détails de démonstration supprimés.

6. Les *involutions associées* (a), (b), (c) jouissent de propriétés nombreuses, parmi lesquelles nous faisons ressortir les suivantes :

Trois couples quelconques de points conjugués aa_1 et aa_2, bb_1 et bb_2, cc_1 et cc_2 *appartiennent à une même conique*. En d'autres termes, si, de trois points pris arbitrairement sur les polaires α, β, γ, on mène à σ les couples de tangentes a_1 et a_2, b_1 et b_2, c_1 et c_2, les points aa_1 et aa_2, bb_1 et bb_2, cc_1 et cc_2, sont sur une même conique.

Les involutions (a), (b), (c) déterminent, autour de bc, ca, ab, trois faisceaux involutifs (A), (B), (C). *Trois couples quelconques de ces faisceaux* (un par centre) *enveloppent une même conique* (*). — En particulier, si trois droites issues de bc, ca, ab sont concourantes, leurs conjuguées le sont également. De là résulte *une transformation involutive dans laquelle à un point correspond un point*. Les transformations par points réciproques ou inverses sont dans ce cas.

7. Cherchons le caractère analytique des trois involutions associées; (a, b, c) étant le triangle de référence, soient :

$$\left.\begin{aligned} v &= \lambda_1 w \\ v &= \lambda_2 w \end{aligned}\right\}(a) \qquad \left.\begin{aligned} w &= \mu_1 u \\ w &= \mu_2 u \end{aligned}\right\}(b) \qquad \left.\begin{aligned} u &= \nu_1 v \\ u &= \nu_2 v \end{aligned}\right\}(c),$$

les équations tangentielles de trois couples de points associés. Les paramètres du premier couple doivent satisfaire à une relation :

$$m\lambda_1\lambda_2 + n(\lambda_1 + \lambda_2) + p = 0.$$

Cette relation étant vérifiée par $\lambda_1 = \infty$, $\lambda_2 = 0$, paramètres des points ab, ac, on a $n = 0$.

Donc, les trois involutions sont caractérisées par des relations de la forme :

$$\lambda_1\lambda_2 = L, \quad \mu_1\mu_2 = M, \quad \nu_1\nu_2 = N, \qquad (1)$$

L, M, N étant des constantes. Par hypothèse, il existe un premier triple de points ad_1, bd_1, cd_1, situés sur une même droite d_1, telle que les points conjugués soient sur une seconde droite d_2.

Pour les paramètres de ces trois couples, on a :

$$\lambda_1\mu_1\nu_1 = 1, \quad \lambda_2\mu_2\nu_2 = 1, \quad \text{d'où} \quad LMN = 1.$$

(*) L'équation tangentielle d'une telle conique, par rapport au triangle de référence (a, b, c) est de la forme :

$$Au^2 + A'v^2 + A''w^2 + 2\lambda vw + 2\mu wu + 2\nu uv = 0,$$

A, A', A'' étant des constantes et λ, μ, ν des variables.

On voit donc qu'à trois points am_1, bm_1, cm_1, d'une même droite m_1, correspondent toujours trois points d'une même droite m_2(*).

Soient (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2) les coordonnées des droites m_1, m_2. Les égalités (1) sont équivalentes aux suivantes :

$$\frac{u_1u_2}{\lambda} = \frac{v_1v_2}{\mu} = \frac{w_1w_2}{\nu}, \qquad (2)$$

$$u_2 : v_2 : w_2 = \frac{\lambda}{u_1} : \frac{\mu}{v_1} : \frac{\nu}{w_1},$$

ou mieux,

$$\rho u_2 = \lambda v_1 w_1, \quad \rho v_2 = \mu w_1 u_1, \quad \rho w_2 = \nu u_1 v_1$$

λ, μ, ν étant des constantes et ρ un facteur de proportionnalité.

8. Pour définir les involutions associées, il suffit de connaître deux droites correspondantes. Nous choisirons la *droite-unité* (dont les coordonnées sont égales) et la droite qui a pour coordonnées λ, μ, ν (*droite-directrice*). Nous adoptons pour conique auxiliaire σ la conique inscrite (abc) corrélative de la circonférence circonscrite (ABC)(**).

Coupant a, b, c par la droite-unité m et par la droite directrice n, soient a_m, b_m, c_m et a_n, b_n, c_n les secondes tangentes menées des points ainsi obtenus à la conique (abc). Les points a_ma_n, b_mb_n, c_mc_n, joints à bc, ca, ab déterminent les polaires α, β, γ des involutions (a), (b), (c). Pour obtenir la droite q, qui correspond à une droite donnée p, on prend les points apa_p, bpb_p. Des points $a_p\alpha$, $b_p\beta$, on mène à la conique (abc) les secondes tangentes a_q, b_q, qui coupent a et b en des points déterminant la droite cherchée q.

Lorsque les polaires α, β, γ coupent la conique (abc), les points de rencontre de a, b, c avec les tangentes aux points communs à (abc) et à α, β, γ sont les points doubles des involutions (a), (b), (c) : ils sont situés,

---

(*) Si l'on avait LMN $= -1$, les points conjugués avec ceux d'une même droite m, joints aux sommets opposés de (a, b, c) détermineraient trois droites concourant en un même point M.

(**) Le système de coordonnées trilatères étant choisi, et $\Sigma lvs = 0$ étant, dans ce système, l'équation de la circonférence circonscrite (ABC), $\Sigma lvw = 0$ est celle de la conique corrélative inscrite (abc). Pour toutes les propriétés projectives (y compris celles du n° 8), on peut remplacer cette conique par une conique inscrite quelconque (le cercle inscrit, par ex.). Mais, pour les propriétés métriques (n° 9 ci-après), la circonférence (ABC) étant obligatoire, la corrélative (abc) l'est également.

trois à trois, sur quatre droites associées i, i_1, i_2, i_3, qui sont leurs propres homologues dans la transformation; ces droites sont les *droites doubles* de la transformation. Celle-ci peut être définie par le triangle des droites principales et une droite double. Les coordonnées de i, i_1, i_2, i_3 sont $(\pm\sqrt{\lambda}, \pm\sqrt{\mu}, \pm\sqrt{\nu})$.

Les points de contact de a_m, b_m, c_m, joints à bc, ca, ab déterminent les droites α', β', γ', qui sont les polaires des involutions (a), (b), (c) dans la transformation définie par les formules :

$$u_1u_2 = v_1v_2 = w_1w_2. \tag{3}$$

La droite unité est devenue une droite double.

De même, les points de contact de a_n, b_n, c_n, joints à bc, ca, ab, déterminent les polaires $\alpha'', \beta'', \gamma''$ des involutions correspondant à la transformation :

$$\frac{u_1u_2}{\lambda^2} = \frac{v_1v_2}{\mu^2} = \frac{w_1w_2}{\nu^2}. \tag{4}$$

La droite u est devenue une droite double. La droite directrice de la nouvelle transformation a pour coordonnées λ^2, μ^2, ν^2. Pour la construire, on prend les points $a_m\alpha'', b_n\beta''$, desquels on mène à la conique (abc) deux tangentes dont on prend les intersections avec a, b. On voit aisément comment on passe aux droites $(\lambda^{2n}, \mu^{2n}, \nu^{2n})$.

Appliquons la transformation (3) à une droite quelconque $x(u, v, w)$ et la transformation (2) à la droite obtenue y. La droite résultante x_1 a pour coordonnées $\lambda u, \mu v, \nu w$. Opérant de même sur x_1, nous avons une droite $x_2(\lambda^2 u, \mu^2 v, \nu^2 w)$. On voit que la construction de la droite $x_r(\lambda^r u, \mu^r v, \nu^r w)$ revient à circonscrire à la conique (abc) deux lignes brisées : l'une a pour premier côté la tangente a_x à (abc) menée du point ax, et ses sommets sont alternativement sur α' et α; la seconde a pour premier côté b_x et ses sommets sont alternativement sur β' et β. Si l'on intervertit α' et α, β' et β, on obtient les droites $(\lambda^{-1}u, \mu^{-1}v, \nu^{-1}w)$, etc. En particulier, on peut construire les *potentielles* successives de la droite (λ, μ, ν), c'est-à-dire les droites $(\lambda^2, \mu^2, \nu^2)$, $(\lambda^3, \mu^3, \nu^3)$, etc.

9. Adoptons pour u, v, w les coordonnées barycentriques. Les formules (3) définissent les droites réciproques. Les droites doubles sont la droite de l'infini g et ses associées, côtés du triangle complémentaire de (a, b, c). Le point de concours des polaires des involutions (a), (b), (c) se confond avec le point de Lemoine : $a^2u + b^2v + c^2w = 0$.

Les droites réciproques d'ordre p sont définies par les formules :

$$\frac{u_1u_2}{a^p} = \frac{v_1v_2}{b^p} = \frac{w_1w_2}{c^p}.$$

La droite directrice est la p^e potentielle (a^p, b^p, c^p).

Soient a_g, b_g, c_g les tangentes à la conique (abc) parallèles aux côtés, et a_i, b_i, c_i les tangentes menées à cette courbe par les *bissecteurs-extérieurs*(*). Les points de contact de a_g, b_g, c_g, joints aux sommets du triangle (a, b, c) déterminent trois droites α_0, β_0, γ_0 passant par le point de Lemoine. Les points a_ga_i, b_gb_i, c_gc_i, joints aux sommets, déterminent trois droites α_1, β_1, γ_1. Nous avons ainsi les polaires des transformations par droites réciproques des ordres 0 et 1. Partant de la droite a_i, circonscrivons à la conique (abc) une ligne brisée de $2(p-1)$ sommets; ces sommets sont alternativement sur les droites α_0 et α_1. Opérant de même sur b_i, c_i, nous aurons les droites par lesquelles la conique (abc) est touchée aux points d'intersection de a, b, c avec la p^e potentielle.

On peut aisément trouver les polaires des côtés de même rang dans ces trois lignes brisées continuées indéfiniment; le lecteur peut également étudier les simplifications que comportent les constructions si l'on veut parvenir rapidement à la droite (a^p, b^p, c^p).

Telle est une *première traduction* de l'article de 1888 de M. Neuberg. Je vais montrer que l'on peut en imaginer au moins deux autres.

(*A continuer.*)

SUR DEUX FAISCEAUX DE CONIQUES(**);

par M. Degueldre, étudiant à Liège.

I.

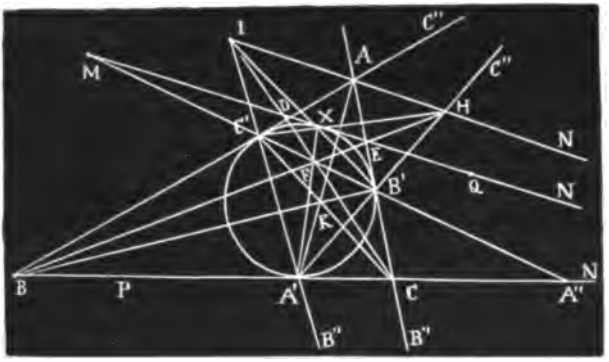
Considérons les coniques tangentes à deux droites données AB′, AC′ aux mêmes points B′, C′. Elles forment un faisceau ponctuel dont les points fondamentaux se sont réunis deux à deux sur AB′, AC′ en B′, C′;

(*) La bissectrice *intérieure* de l'angle A du triangle ABC est la droite $\frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Il est naturel d'appeler *bissecteur extérieur* du côté a du triangle abc le point $\frac{y}{b} = \frac{w}{c}$. C'est le conjugué isotomique du pied de la bissectrice *extérieure* de A.

(**) Cet *exercice* de géométrie projective peut intéresser les jeunes lecteurs de *Mathesis*. (*Rédaction*).

ce sont aussi les éléments d'un faisceau tangentiel dont les droites fondamentales coïncident deux à deux avec B'A, C'A.

Par un point fixe P menons une tangente à une conique Σ du faisceau. Soient : A' son point de contact; C et B les points où elle coupe AB', AC';



K le point d'intersection des droites AA', BB', CC'; enfin A'', B'', C'' les points de rencontre des côtés homologues des triangles ABC, A'B'C'.

Lorsque BC tourne autour de P, les droites B'B, C'C engendrent deux faisceaux projectifs B'(B), C'(C), et leur intersection K décrit une conique ε passant par B' et C'. En faisant passer BC par A, B' ou C', on voit que ε passe par A, et touche les droites PB', PC', rayons des faisceaux B'(B), C'(C) qui correspondent au rayon C'B' de l'autre faisceau; dans ces cas, la conique Σ est formée par les droites AC', AB', ou par la droite B'C' comptée doublement.

Cherchons le lieu de A'. Les droites AK, B'K, qui joignent un point variable K de ε à deux points fixes A, B' de ε se correspondent dans deux faisceaux projectifs; mais les faisceaux B'(B), P(B) sont perspectifs; donc les faisceaux P(B), A(K) sont projectifs et l'intersection A' des rayons homologues engendre une conique η passant par les points A, P, B', C'. Lorsque BC se rapproche de PA, K se rapproche de A sur la conique ε; donc les courbes ε et η se touchent en A. De même η touche en P la conique circonscrite au triangle PB'C' et tangente aux droites AB', AC'.

L'axe d'homologie A''B''C'' des triangles ABC, A'B'C' pivote autour d'un point fixe. En effet, les droites B'A', C'A' qui joignent un point variable de η à deux points fixes de cette conique engendrent deux fais-

ceaux projectifs; on en conclut que les points B'', C'' engendrent deux ponctuelles projectives qui sont même perspectives à cause de l'élément uni A.

II.

Considérons maintenant les coniques tangentes à trois droites données AB, AC, BC, le point de contact A' de BC étant fixe. Ces courbes forment un faisceau tangentiel dont deux droites fondamentales sont confondues avec BC, leur point d'intersection étant en A'.

Par un point donné Q menons une tangente à l'une de ces coniques; soient : X son point de contact, E et D les points où elle rencontre AC et AB, B' et C' les points de contact de la conique avec AC et AB.

En raisonnant comme ci-dessus pour le point K, on trouve que le point d'intersection F de BE avec CD décrit une conique φ passant par A, B, C et touchant les droites QB, QC. D'après un théorème connu, les droites A'X, B'C' sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites EB, DC.

Pour trouver le lieu du point X, remarquons qu'à toute position de QE correspond une seule position de A'F; mais toute droite menée par A' rencontre φ en deux points E dont chacun détermine une droite correspondante QE. Il existe donc entre les droites QE et A'X une correspondance (2, 1), et leur intersection X engendre une cubique ayant en A' un point simple, en Q un point double.

La droite B'C' pivote autour du conjugué harmonique de A' par rapport à BC. Cette propriété donne immédiatement le lieu du centre des coniques considérées; les points B', C' décrivant deux ponctuelles perspectives, les milieux des droites A'B', A'C' engendrent deux ponctuelles projectives, et les droites qui joignent ces points respectivement à C et à B se correspondent dans deux faisceaux projectifs, qui sont même perspectifs à cause de l'élément uni BC; donc le centre de la conique, qui se trouve à l'intersection de ces droites, décrit une conique. Deux positions particulières de ce centre sont les milieux de AA' et de BC, car les couples de points AA', BC représentent des coniques dégénérées de notre faisceau de coniques.

On sait que les droites A'B', C'X se coupent en un point H de BE, que C'A' et B'X se coupent en un point I de CD, enfin que les points H, I se trouvent sur la troisième diagonale AN du quadrilatère simple BCED. Les faisceaux B(E), A(N) étant perspectifs avec le faisceau

Q(E), et par suite projectifs entre eux, le point H décrit une conique ψ passant par A et B; comme BA et QA, BQ et AB sont des rayons homologues des faisceaux B(E), A(N), la conique ψ touche AQ et BQ. Lorsque QE passe par C, D coïncide avec C; donc C est un point D de ψ.

De même, le point I engendre une conique φ' circonscrite au triangle ABC et touchant les droites QA, QC.

D'ailleurs, les divisions (BEFH), (CDFI), (ANHI) étant harmoniques, les lieux des points H,I s'obtiennent en transformant la conique φ, par homologie harmonique, le centre et l'axe d'homologie étant respectivement B et AC, C et AB; ces deux lieux eux-mêmes dérivent l'un de l'autre par homologie harmonique, le centre et l'axe d'homologie étant A et BC.

Les droites B'C' et ED se coupent en un point M qui décrit une cubique; car entre les faisceaux A''(B'), Q(E) il existe une correspondance (1, 2).

Ces faisceaux déterminent sur les transversales AC, AB deux ponctuelles (B'), (D) entre lesquelles il existe une correspondance (1, 2), avec un élément uni A; donc la droite DB' enveloppe une conique. Raisonnement analogue pour les droites EC', NC', NB'.

BIBLIOGRAPHIE.

Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte. Academische Vorträge von Alfred Enneper. Zweite Auflage. Neu bearbeitet und herausgegeben von Dr. Felix Müller, Professor am Königl. Luisengymnasium zu Berlin. Halle a. S. Verlag von Louis Nebert 1890 (XX-598) pages in-8°. Prix : 18 marcs.

La première édition de la théorie des fonctions elliptiques d'Enneper avait un caractère plus historique que didactique. Le nouvel éditeur y a introduit maintes améliorations de détails, qui permettent de s'en servir, non seulement comme d'un compendium quand on connaît déjà la théorie des fonctions elliptiques, mais aussi comme d'un manuel où l'on peut en apprendre les premiers principes. Les indications historiques ont été complétées et mises à jour jusqu'à la date de la publication du livre. Plusieurs chapitres ont été complètement transformés en tenant compte de recherches récentes. Enfin il y a lieu de citer trois additions importantes : on trouve maintenant dans l'ouvrage, à leur place logique, les éléments de la théorie des fonctions elliptiques de Weierstrass; une note nouvelle contient l'indication des applications récentes des fonctions elliptiques à la géométrie; une autre, nouvelle aussi, fait connaître les relations de ces fonctions avec l'arithmétique et l'algèbre supérieure.

Au point de vue historique, le livre d'Enneper, revu et augmenté par M. Müller, est le meilleur qui existe sur la matière ; au point de vue didactique, il peut soutenir la comparaison avec les autres manuels publiés en langue allemande. (P. M.)

Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen von J. Thomae, Professor in Jena. Zweite erweiterte und umgearbeitete Auflage. Halle a. S. L. Nebert, 1898 (VIII-150 p. in-4°). Prix : 9 marcs.

Sommaire. 1. Principes fondamentaux de l'arithmétique, y compris la théorie des nombres irrationnels et des nombres complexes. (pp. 1-21). 2. Produits infinis et séries (pp. 21-32). 3. Fonction d'une ou de deux variables ; continuité ; principe de la moyenne (pp. 32-42). 4. Théorie des fonctions algébriques entières et des fractions rationnelles (pp. 42-63). 5. Les séries entières et les fonctions régulières. (pp. 64-74). 6. La fonction exponentielle et les fonctions trigonométriques (pp. 74-94). 7. Logarithme et série logarithmique (pp. 95-106). 8. Puissances quelconques (pp. 106-108). 9. Factorielles ; séries de fractions rationnelles ; produits infinis (118-128). 10. Fonctions algébriques ; fonctions trigonométriques inverses ; inversion des séries (pp. 128-143). 11. Questions diverses sur l'ordre des infiniment petits (pp. 144-150).

Cette seconde édition diffère de la précédente en ce que l'auteur a retranché de son livre la théorie des fonctions thêta et des fonctions doublement périodiques ; mais tous les autres sujets abordés dans l'ouvrage sont traités d'une manière plus approfondie et aussi rigoureusement que possible, suivant l'habitude de l'auteur.

Cinématique et Mécanismes. Potentiel et mécanique des fluides. Cours professé à la Sorbonne, par H. Poincaré, membre de l'Institut ; rédigés par A. Guillet. Georges Carré et C. Naud, éditeurs. (In-8° de 392 pages, avec 279 figures). Prix : 15 fr.

Ce cours sert en quelque sorte d'introduction à la remarquable série des cours de physique mathématique professés à la Sorbonne par l'illustre savant.

Il renferme les matières enseignées à la Faculté des sciences de Paris par M. H. Poincaré, et inscrites au programme actuel, en France, des Certificats de mécanique rationnelle et de mécanique physique.

On y trouvera, exposés avec la simplicité et la clarté qui caractérisent la manière du maître : 1° Les éléments généraux de la cinématique ; 2° Les propriétés les plus importantes du potentiel ; 3° Ce qu'il faut savoir de l'hydrostatique et de l'hydrodynamique lorsqu'on s'occupe des sciences physiques.

Chaque théorie est accompagnée d'applications variées qui en soulignent l'esprit et la portée. Citons les applications de la cinématique à la géométrie et aux mécanismes ; du potentiel au problème de l'attraction exercée par un ellipsoïde ; de l'hydrostatique à la recherche des conditions d'équilibre des corps flottants et au nivellement barométrique ; de l'hydrodynamique à l'étude des tourbillons et des sphères pulsantes.

Voici le sommaire de l'ouvrage. PREMIÈRE PARTIE. 1. Cinématique : vitesse, accélération ; décomposition de la vitesse et de l'accélération. 2. Mouvement d'une figure plane invariable glissant dans un plan ; mouvement épicycloïdal. 3. Mouvement d'un corps solide invariable ; mouvement épicycloïdal sphérique. 4. Mouvement hélicoïdal. 5. Mouvement relatif d'un point. 6. Mécanismes. DEUXIÈME PARTIE. 1. Fonction des forces ; potentiel. 2. Théorème de Green et applications. 3. Attraction exercée sur un ellipsoïde. 4. Hydrostatique. 5. Hydrodynamique.

Traité de nomographie, Théorie des abaques, applications pratiques, par MAURICE D'OCAGNE, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'Ecole polytechnique. Paris, Gauthiers-Villars, 1899 (grand in-8 de XIV — 480 pages avec 177 figures dans le texte et 1 planche) Prix : 14 fr.

Nous ne pouvons mieux faire connaître cet important ouvrage qu'en reproduisant l'extrait suivant de la préface et de la table qes matières :

I. Le présent Traité contient, avec tout le développement qu'elle comporte, la théorie de la représentation graphique cotée des équations à plusieurs variables, en vue de la construction des abaques, théorie dont une première esquisse avait été donnée par l'Auteur dans une brochure parue en 1891.

Les divers types usuels d'abaques y font l'objet d'études très complètes qu'accompagnent de nombreux exemples d'application, tous puisés dans le pratique des Arts techniques où intervient le calcul : art de l'ingénieur, art militaire, navigation, géodésie, hydraulique, opérations financières, etc...

Ceux de ces exemples qui se rattachent aux types d'abaques les plus courants sont d'ailleurs traités dans les moindres détails de façon à servir de modèles dans les cas analogues qui se rencontrent très fréquemment.

A la base de la théorie se place la notion d'*échelle d'une fonction* que l'Auteur approfondit tout d'abord pour l'appliquer, dans le Chapitre I, à la représentation des équations *à deux variables*.

Pour les équations *à trois variables* s'offre d'abord un mode absolument général de représentation, étudié dans le Chapitre II et donnant lieu aux abaques dits *à entrecroisement*. Ces abaques sont, pour chaque équation, susceptibles d'une infinité de variantes parmi lesquelles la théorie enseigne, dans chaque cas, à discerner les plus simples. Le mieux est évidemment, chaque fois que faire se peut, de n'avoir recours qu'à de simples lignes droites. C'est dans ce but qu'intervient le principe de l'*anamorphose* imaginé par Lalanne et généralisé par M. Massau. L'Auteur fait voir, en outre, le parti que l'on peut tirer, en vue d'améliorer la disposition d'un abaque, à droites entrecroisées, du principe de l'*homographie*, réservé jusqu'ici au seul domaine de la spéculation pure.

Un autre principe, également emprunté à la Géométrie moderne, celui de la *dualité*, a encore permis à l'Auteur de proposer un type nouveau d'abaque dit *à alignement*, d'un emploi extrêmement général et qui offre, au point de vue pratique,

les plus grands avantages. A ce type d'abaque, dont la meilleure disposition résulte encore de l'application du principe de l'homographie et à ceux qui en dérivent, est consacré le Chapitre III.

Le Chapitre IV est réservé à une application générale des principes précédents au calcul des profils de remblai et de déblai. On retrouve ainsi, par une marche uniforme et rationnelle, toutes les solutions qui ont été proposées de ce problème célèbre, et l'on met en évidence celle qui est la plus commode et la plus simple.

A partir de quatre variables, il n'existe plus de mode de représentation applicable à une équation *quelconque*; mais, grâce à l'emploi, d'une part, des *éléments*, points ou lignes, *à plusieurs cotes*, de l'autre, des *systèmes mobiles*, on arrive à constituer des modes de représentation applicables à des équations *à plus de trois variables* d'une grande généralité et comprenant à peu près toutes celles qui se rencontrent dans les applications. Les plus usuels d'entre eux sont étudiés dans le Chapitre V.

Il y avait grand intérêt à former et à classer tous les modes possibles de représentation applicables à des équations *à un nombre quelconque de variables*. Ce problème, dont la solution synthétise toute la théorie développée dans l'Ouvrage, est complètement résolu dans le Chapitre VI qui renferme, en outre, divers développements analytiques sur les équations répondant aux types d'abaques qui se présentent le plus fréquemment dans la pratique.

II. Sommaire. Introduction. Liste des Publications de l'auteur relatives à la Nomographie. Chap. I. *Équations à deux variables.* Echelles de fonctions. Abaques d'équations à deux variables. Chap. I. *Equations à trois variables. Abaques à entrecroisement.* Abaques cartésiens. Emploi d'un transparent à trois index. Abaques hexagonaux. Anamorphose graphique. Anamorphose générale. Chap. III. *Suite des équations à trois variables. Abaques à alignement.* Abaques généraux à points alignés. Abaques à trois échelles rectilignes (Abaques à trois échelles parallèles. Abaques à deux échelles parallèles. Abaques à échelles non parallèles). Abaques à échelles curvilignes (Abaques à deux échelles rectilignes parallèles et une échelle curviligne. Abaques à trois échelles curvilignes). Application de la méthode des points alignés à la représentation des lois empiriques. Abaques dérivés des abaques à points alignés (Abaques à double alignement. Abaques à transversales diverses). Chap. IV. *Systèmes de deux équations. Application générale au calcul des profils de remblai et de déblai.* Généralités. Calcul des profils de remblai et de déblai. Chap. V. *Equations à plus de trois variables.* Eléments à plusieurs cotes (Droites à deux cotes. Points à deux cotes. Éléments à n cotes). Systèmes mobiles (Systèmes divers à translation et à rotation. Abaques à images logarithmiques). Chap. VI. *Théorie générale. Développements analytiques.* Étude générale des abaques au point de vue de leur structure. Étude des équations représentables au moyen d'un type d'abaque donné (Caractères différentiels et fonctionnels. Théorie algébrique des équations représentables par trois systèmes linéaires de points alignés. Représentation des équations quadratiques au moyen de droites et de cercles entrecroisés). Index Alphabétique.

III. Au point de vue *pratique*, on ne peut trop recommander le beau livre de M. d'Ocagne : on y trouve plus de cent abaques divers relatifs à toutes les applications des sciences physiques et mathématiques depuis les calculs numériques les plus simples et les plus usuels (multiplication : huit abaques; intérêts composés, etc.), jusqu'aux calculs astronomiques usités dans la marine et les observatoires.

Au point de vue *théorique*, le dernier chapitre renferme la synthèse de tout le livre et ramène à des principes généraux toutes les méthodes particulières examinées dans l'ouvrage. Un système ingénieux de notations imaginé par l'auteur lui permet de représenter sous une forme condensée un abaque donné et, par suite, de déterminer tous les types correspondant à un nombre de variables déterminé, moyennant certaines discussions analytiques parfois assez délicates.

Au point de vue *historique*, M. d'Ocagne a, autant qu'il l'a pu, rendu justice à tous les abaquistes (français, belges, italiens, allemands, anglais, etc.); en particulier, il analyse les travaux d'une portée très générale, de deux de nos compatriotes MM. Massau (*) et Goedseels.

Il est à peine nécessaire de dire que le *Traité de Nomographie* de M. d'Ocagne sortant des presses de Gauthier-Villars est irréprochable au point de vue typographique ; les nombreux abaques reproduits dans l'ouvrage, bien qu'ils aient dû être réduits par la photographie, sont d'un dessin extrêmement net.

Un vœu pour terminer : l'auteur ne pourrait-il publier, pour ceux qui, au premier abord, seraient effrayées de l'étendue du *Traité* une espèce d'*Introduction à la Nomographie*, contenant quelques exemples simples d'abaques se rattachant aux méthodes les plus pratiques? Il contribuerait ainsi d'une manière très efficace, croyons-nous, à la diffusion de l'art nouveau dont il est le parrain et dont il a tant contribué à perfectionner la théorie et à étendre les procédés et les applications.

(P. M.).

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik von MORITZ CANTOR. Zweiter Band. Erster Halbband. Von 1200-1550 Zweite Auflage. Leipzig, Teubner, 1899 (480 p. gr. in-8, avec 93 fig. dans le texte). Prix : 14 marcs.

La première édition du premier demi-volume du tome second de l'Histoire des Mathématiques de Cantor a paru en 1892; elle a été rapidement épuisée et l'auteur doit en publier dès maintenant une nouvelle édition, *revue et augmentée*, bien que le titre n'en dise rien. Nous avons fait connaître le plan de cette partie de l'ouvrage monumental du savant professeur de Heidelberg dans *Mathesis*, 1892, (2), II, pp. 19-20.

Ce plan est resté le même dans la nouvelle édition, mais l'auteur a introduit dans presque tous les chapitres de son livre des améliorations de détail, des additions plus ou moins importantes où il résume les recherches et les trouvailles

---

(*) Voici toutefois une petite erreur qui nous est signalée par M. Demoulin. Ce n'est pas à ce dernier, mais à M. Massau même qu'est due l'analyse citée n° 153, p. 432 (note) du livre de M. d'Ocagne.

de M. Curtze, de M. P. Tannery, les siennes propres et celles d'autres savants dans le domaine de l'histoire des mathématiques : c'est ainsi que la nouvelle édition contient trente ou quarante pages de plus que la partie correspondante de la première.

Citons, par exemple, parmi les additions, l'indication de la règle chinoise pour le problème des restes retrouvée chez Léonard de Pise (p. 26) et d'autres arithméticiens, Regiomontanus compris; les recherches de M. Gram sur la restitution du calcul de Léonard de Pise, relativement à l'équation du troisième degré (p. 48); celle de M. Tannery, sur Robert Anglès (p. 95-96); des compléments à la notice sur Dominicus de Clavasio (pp. 127-128), etc., etc.

Les *Vorlesungen* de Cantor constituent le Standard-Book par excellence sur l'histoire des Mathématiques; nous le recommandons vivement aux jeunes professeurs qui ont à cœur de connaître le passé de cette belle science : aucun autre livre ne peut les initier aussi sûrement à l'histoire de la culture mathématique depuis les temps les plus anciens jusqu'au milieu du siècle passé. (P. M.).

×NOTES MATHÉMATIQUES.

×**18.** *Sur certaines identités.* Les identités

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2, \tag{1}$$

$$a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0, \tag{2}$$

$$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)+(a-b)(b-c)(c-a)=0, \tag{3}$$

dans lesquelles les lettres a, b, c désignent des arcs de circonférence, existent encore quand on substitue, à chaque facteur des divers termes, le sinus correspondant; autrement dit, on aura

$$\sin(a+b)\sin(a-b)=\sin^2 a-\sin^2 b, \tag{4}$$

$$\sin a\sin(b-c)+\sin b\sin(c-a)+\sin c\sin(a-b)=0, \tag{5}$$

$$\sin a\sin b\sin(a-b)+\sin b\sin c\sin(b-c)$$
$$+\sin c\sin a\sin(c-a)+\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)=0. \tag{6}$$

Pour les deux premières, la démonstration est aisée et connue; ces formules sont proposées comme exercices dans la *Trigonométrie* de M. Cambier. Le lecteur peut s'exercer à démontrer la relation (6) qui n'est guère plus difficile.

Considérons à présent, sur une circonférence, des arcs DA, DB, DC, comptés à partir d'une même extrémité D et dans un même sens. Appe-

lons ces arcs respectivement $2a$, $2b$, $2c$. Les formules (1), (2), (3) étant homogènes s'appliquent aux arcs doubles de a, b, c, $b-c$, $c-a$, $a-b$, c'est-à-dire aux arcs DA, DB, DC, BC, CA, AB. Quant aux relations (4), (5), (6) entre les sinus, elles peuvent être étendues, à cause de l'homogénéité, aux doubles de ces sinus, c'est-à-dire aux cordes DA, DB, DC, BC, CA, AB.

Ainsi transformées, les formules conduisent à des théorèmes de Géométrie : on verra sans peine que l'égalité (5) donne le théorème de Ptolémée sur le quadrilatère inscrit, que l'égalité (6) donne le corollaire de ce théorème relatif au rapport des diagonales du quadrilatère inscrit. Quant à la relation (4), elle conduit au théorème suivant, facile à démontrer par des considérations géométriques : *Si la bissectrice de l'angle* A *d'un triangle* ABC *rencontre la circonférence circonscrite au point* D, *on a*

$$AB.AC = \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2.$$

Le fait intéressant c'est de rencontrer des relations métriques entre arcs de cercle qui soient vraies pour les cordes de ces arcs.

Il existe des relations vraies pour les arcs, comme par exemple

$$AC = AB + BC,$$

A, B, C étant trois points de la circonférence, relations qui cessent d'être vraies pour les sinus. Mais toutes les relations homogènes entre sinus, par le fait de leur homogénéité, s'appliquent aux cordes des arcs doubles et continuent à être vérifiées si l'on fait croître indéfiniment le rayon du cercle, de sorte que, à la limite, les mêmes formules subsistent entre les arcs. (M. Stuyvaert).

×19. *Application du binôme de Newton.* On a, pour m entier,

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \cdots\cdots + x^m.$$

$(1+x)^m - 1$ est divisible par $(1+x) - 1$ ou x, et le quotient est

$$\frac{(1+x)^m - 1}{x} = 1 + (1+x) + (1+x)^2 + \cdots\cdots + (1+x)^{m-1}.$$

Développant les deux membres et égalant les coefficients des mêmes puissances de x, on trouve

$$1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + (m-1) = \frac{m(m-1)}{1.2},$$

$$1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots(m-2)(m-1)=\frac{m(m-1)(m-2)}{3},$$

et, en général,

$$1.2.3\ldots n+2.3.4\ldots(n+1)+\cdots\cdots$$
$$+(m-n)(m-n+1)(m-n+2)\cdots\cdots(m-1)$$
$$=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n)}{n}.$$

(M. Stuyvaert.)

×**20**. *Inscription du pentagone régulier.* — Le triangle formé par deux côtés adjacents du pentagone régulier et une diagonale est isocèle et chacun des côtés égaux vaut le plus grand segment de la base divisée en moyenne et extrême raison.

Par suite, si l'on donne un cercle O, il suffit de prendre n'importe où une droite quelconque, de la partager en moyenne et extrême raison et de construire un triangle isocèle ayant la droite considérée comme base et dont les autres côtés soient égaux au plus grand segment de la base : l'angle au sommet θ de ce triangle est l'angle d'un pentagone régulier. On formera, dans le cercle donné, à l'extrémité d'un diamètre et avec ce diamètre, un angle égal à $\frac{\theta}{2}$, ce qui donnera l'inscription du pentagone.

Pour simplifier la construction, on prendra, non pas une droite quelconque du plan, mais une droite particulière de la figure.

Le lecteur s'assurera aisément que les opérations suivantes conduisent au but, et que la méthode actuelle est indépendante de l'inscription du décagone :

A l'extrémité A du diamètre AOB on mène la tangente, sur laquelle on porte les longueurs AC, puis CD égales au rayon. On mène les droites DO, DB rencontrant la circonférence respectivement en G et H; on trace la droite CH et la circonférence de centre D et de rayon DG rencontrant CH en I; la droite AI coupe la circonférence donnée en M; AM est le côté du pentagone. (M. Stuyvaert).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

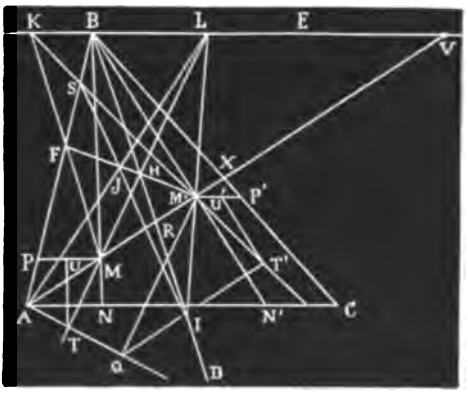
Question 910.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 55).

Soient M, M' *deux points mobiles dans le plan du triangle* ABC. *Ces points sont constamment en ligne droite avec le sommet* A *et les droites* BM, BM' *rencontrent* AC *en deux points* N, N' *symétriques par rapport au milieu de* AC. *La droite* CM' *coupe* BM *en* M''. *Connaissant la tangente à la courbe décrite par* M; *construire les tangentes aux trajectoires des points* M' *et* M''. (D'OCAGNE)(*).

Même question lorsque les droites BM, BM' *sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle* ABC. (J. N.).

Solution par M. MEURICE. Nous pouvons représenter par $\frac{1}{2}$NA, $\frac{1}{2}$N'C les vitesses des points N, N' de la droite AC(**). Si nous décomposons les vitesses correspondantes des points M, M' en deux vitesses dont l'une est parallèle à AC et dont l'autre est dirigée respectivement suivant BN, BN', les premières composantes sont les moitiés MU, M'U' des parallèles MP, M'P' à AC, terminées à BA, BC. En menant par U une parallèle à BM qui rencontre en T la tangente à la courbe (M) nous aurons la vitesse MT du point M; l'extrémité inconnue T' de la vitesse de M' se trouve sur une parallèle menée par U' à B'M'. Les points M, M' étant en ligne droite avec A, si nous décomposons la vitesse de M' en deux autres dirigées suivant AM et suivant une parallèle à MT, la seconde composante est la droite M'Q terminée à la droite



(*) Au sujet de la transformation (M, M'), voir un article de M. d'Ocagne dans les N. A. M., 1893, pp. 337-352.

(**) C'est pour avoir une figure de dimensions convenables et réunissant les deux solutions que l'on a choisi ces vitesses; on pourrait adopter deux vitesses quelconques, égales et de sens contraires.

AT; donc la parallèle par Q à AM et la parallèle par U′ à BM déterminent l'extrémité T′ de la vitesse de M′.

La vitesse de M″ résulte de celle de M′ par la même méthode.

Si les angles ABN, CBN′ sont égaux, on applique encore la même construction, sauf à remplacer MP, M′P′ par des perpendiculaires à MB, M′B.

Autres solutions. 1. Menons la médiane BD et la parallèle BE à AC. La transformation (M, M′) peut être définie ainsi : Deux points homologues sont en ligne droite avec A et séparés harmoniquement par les droites BD, BE. On a donc une inversion quadrique de Hirst, la conique fondamentale se composant des deux droites BD, BE.

Si une sécante menée par A et infiniment rapprochée de AM rencontre les courbes (M), (M′) en m, m', et BD, BV en r, v, les deux quaternes MRM′V, $mrm'v$ sont projectifs; par conséquent, les six droites Mm, Rr, M′m', Vv, AV, Av sont tangentes à une même conique. En passant à la limite, on trouve que les tangentes MT, M′T′ aux courbes (M), (M′) et les droites BD, BV, AV touchent une même conique, le point de contact de AV étant A. Appliquons le théorème de Brianchon en prenant pour côtés successifs d'un hexagone circonscrit AV, AV, MT, BD, BV, M′T′, des deux premiers côtés se coupant en A. Il en résultera la construction suivante de M′T′ si l'on connaît MT : MT coupant BD en H, menez la droite M′H qui rencontre AB en F; menez encore MF qui rencontre BV en K; la tangente demandée est M′K.

2. Soient H, L les points de rencontre de MT avec BD, BV. Si nous faisons parcourir à M la droite MT, son homologue M′ décrira une conique passant par A, B, H, L et tangente à M′T′, car les droites AM, BM, BM′ se correspondront dans trois faisceaux projectifs. En considérant le *pentagone de Pascal* ALM′HB complété par la tangente en M′ on est conduit à mener les droites AL et M′H qui se coupent en J, à marquer le point de rencontre I de LM′ avec BH; la droite IJ coupe AB au même point S que la tangente M′T′.

On retrouve le première construction de M′T′ en considérant les cinq points de la conique auxiliaire dans l'ordre ABLHM′.

Remarques. I. Si les droites BM, BM′ sont isogonales par rapport à l'angle ABC, les droites BD, BV sont à remplacer par les bissectrices de l'angle ABC, et les méthodes précédentes sont encore applicables.

II. Si les droites BM, BM′ sont conjuguées harmoniques par rapport

à l'angle ABC, M et M' divisent harmoniquement la droite AX. La transformation (M, M') devient une homologie harmonique et les tangentes homologues se coupent sur l'axe d'homologie BC.

III. Le cas où l'angle MBM' est constamment droit a été étudié par M. de Longchamps (J. M. S, 1882). On a alors une inversion quadrique avec les droites isotropes issues de B comme conique fondamentale. B est le foyer d'une conique tangente à MT, M'T', AM, A étant le point de contact de AM.

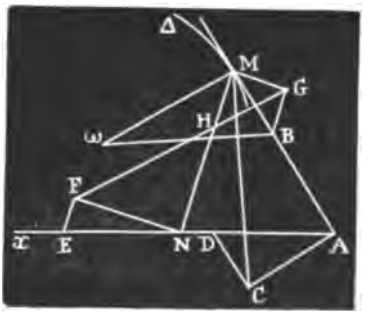
Question 933.

(Voir *Mathesis* (2), IV, p. 104 et (2) VII, p. 168).

La tangente MA *en un point quelconque* M *d'une courbe donnée rencontre une droite fixe* Ax *en* A. *On porte sur cette droite fixe une longueur constante* AN. *Déterminer le point où la droite* MN *touche son enveloppe.*

(L. Meurice).

Soit ω le centre de courbure en M. Si MB représente la vitesse de M sur la courbe donnée, menons MC perpendiculaire a ωB et AC perpendiculaire à MA. Comme les droites ωM, MA ont même vitesse angulaire respectivement autour de ω et de M, AC représente la vitesse de circulation de A considéré sur la droite MA. Par conséquent, en menant par C une parallèle CD à AM qui coupe Ax en D, on obtient la vitesse définitive de A. Les points A et N ont même vitesse sur Ax; donc si l'on prend NE = AD et qu'on projette NE en NF sur une perpendiculaire à MN, NF est la vitesse de circulation de N considéré sur la droite MN. Semblablement, on obtient la vitesse de circulation du point M considéré sur la droite MN en projetant MB en MG sur une perpendiculaire à MN. La droite GF coupe MN au point H qui n'a pas de vitesse de circulation; donc H est le point de contact de MN avec son enveloppe.



Un calcul facile donne

$$\frac{NH}{HM} = \frac{\overline{AM}^2}{AN.\,\omega M \sin MAN},$$

résultat déjà trouvé par M. Stuyvaert au moyen d'autres considérations. (J. N.).

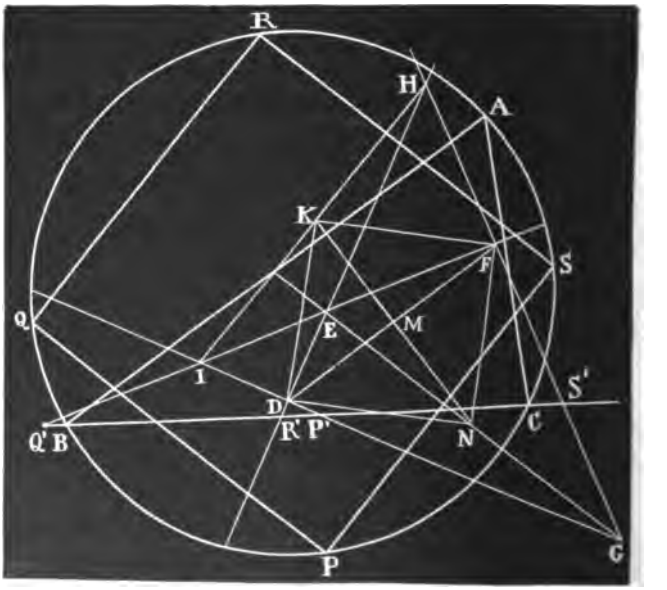
Une solution inexacte envoyée par un correspondant nous a engagé à revenir sur la question 932.

×Question 1065.

(Voir *Mathesis* (2), VI, p. 104).

A une même circonférence on inscrit un triangle ABC *et un carré* PQRS. *Démontrer que les droites de Simson des sommets du carré par rapport au triangle forment un quadrilatère complet dont les milieux des trois diagonales sont le centre et les extrémités d'un diamètre du cercle des neuf points de* ABC. (R. Tucker)

Solution par M. Colart. Soient P′, P″, P‴; Q′, Q″, Q‴; R′, R″,



R‴; S′, S″, S‴ les projections des sommets P, Q, R, S du carré sur les côtés *a*, *b*, *c* du triangle.

En général, les droites de Simson, relatives à deux points sont inclinées l'une sur l'autre d'un angle mesuré par la moitié de l'arc compris entre ces deux points. Donc, les quatre droites de Simson considérées

forment un quadrilatère convexe DEFG dont deux angles opposés D et F sont droits, et, si l'on *complète* ce quadrilatère, les triangles IFG et HDG sont isoscèles et rectangles.

Par suite, la diagonale EG est la troisième hauteur du triangle IHG.

Soient K, M, N les milieux des diagonales IH, DF, EG du quadrilatère complet. On démontre aisément que la figure DKFN est un carré, dont le milieu M de DF est le centre. Par suite, M est le centre du cercle des neuf points du triangle IHG, cercle dont DF et KN sont deux diamètres.

Il reste à faire voir que ce cercle passe par les milieux des côtés du triangle donné ABC. Pour cela, on observe que le milieu O de BC est aussi le milieu de P'R' et de Q'S', et l'on prouve que la médiane DO du triangle rectangle P'D'R' est perpendiculaire sur la médiane OF du triangle rectangle Q'FS'.

Remarques. 1° Le point d'intersection des diagonales IH et EG est sur la circonférence des neuf points du triangle ABC.

2° Les triangles rectangles EDG, HDI sont égaux, et l'on a

$$IH = EG = 2KD = R\sqrt{2} = PQ.$$

Deux des diagonales du quadrilatère complet sont donc égales au côté du carré considéré.

Solutions analogues par MM. Droz, Déprez et Mandart.

Question 1208.

(Voir *Mathesis* (2), XX, p. 56).

Si une droite mobile AB *tangente à une parabole glisse entre deux tangentes fixes* OA, OB, *le cercle des neuf points du triangle* OAB *ainsi formé enveloppe une conique.* (G. Gérard.)

Solution par M. J. Déprez. Soient a et b les longueurs des tangentes menées de O à la parabole; α et β les longueurs OB et OA et θ l'angle AOB.

Si les axes coordonnés sont dirigés suivant OB, OA, l'équation du cercle des neuf points de OAB qui passe par les points $\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{\beta}{2}\right)$, $(\alpha\cos\theta, 0)$ est

$$2(x^2+y^2+2xy\cos\theta) - (\alpha+2\beta\cos\theta)x - (\beta+2\alpha\cos\theta)y + \alpha\beta\cos\theta = 0.$$

La droite AB enveloppe la parabole, donc : $\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}=1$ (*).

(*) Cette équation exprime que le quatrième sommet du parallélogramme construit sur OA, OB est situé sur la corde de contact de l'angle AOB. (J. N.)

L'équation de l'enveloppe du cercle des neuf points de OAB est :

$$[x(a+2b\cos\theta)+y(b+2a\cos\theta)-ab\cos\theta]^2-4abxy=0.$$

Cette enveloppe est, par conséquent, une conique qui touche OA, OB.

REMARQUES. I. *La droite d'Euler du triangle* OAB *enveloppe une parabole.* Si l'on pose $\frac{1+2\cos^2\theta}{3\cos\theta}=k$, l'équation de la droite d'Euler est :

$$3y(\beta-kx)-3x(\alpha-k\beta)=\beta^2-\alpha^2,$$

et l'équation de l'enveloppe de cette droite est

$$[3y(b+ak)+3x(a+bk)-2b^2]^2+4b(b^2-a^2)(3y+3kx-b)=0.$$

L'enveloppe est donc une parabole.

II. *Le centre de gravité, le centre du cercle des neuf points, le centre du cercle circonscrit du triangle* OAB *décrivent des droites* (*).

III. *Le point de Lemoine du triangle* OAB *décrit une cubique* ayant pour équation :

$$2(x^2+y^2-xy\cos\theta)(by+ax)-abxy=0.$$

IV. *Le pied de la symédiane issue de* O *dans* OAB *décrit une cubique* ayant pour équation :

$$(x^2+y^2)(by+ax)-abxy=0.$$

V. *L'axe orthique du triangle* OAB *enveloppe une parabole.* L'équation de cet axe étant

$$x(2\beta\cos\theta-\alpha)+y(2\alpha\cos\theta-\beta)=\alpha\beta\cos\theta,$$

on a, pour l'enveloppe,

$$[y(2a\cos\theta+b)-x(2b\cos\theta+a)-ab\cos\theta]^2+4ab^2\cos\theta(y-2x\cos\theta)=0.$$

VI. *Les médianes issues de* A, B *dans le triangle* OAB, *enveloppent chacune une parabole.*

VII. *Les côtés du triangle orthique de* ABO *enveloppent chacun une parabole.*

NOTES. *Solution analogue par* MM. BARISIEN *et* RIPERT.

Pour exprimer que la droite AB enveloppe une parabole tangente aux axes coordonnés, M. Barisien écrit que le cercle OAB représenté par

$$x^2+y^2+2xy\cos\theta-ax-by=0,$$

(*) M. Barisien a signalé les mêmes propriétés.

passe par le foyer (p, q), ce qui donne

$$p^2 + q^2 + 2pq\cos\theta = pa + qb$$

pour la relation entre les paramètres variables a et b.

Remarque. En considérant une conique quelconque comme *quasi-parabole ponctuelle* (voir *Mathesis* (2), VIII, p. 251) (*), on peut énoncer le théorème suivant: *Soient* ABCD *un quadrilatère circonscrit à une conique*, O *le point commun à* AD *et* BC, E *et* F *deux points donnés sur* CD, et G, H, K *les conjugués harmoniques de* (AO, CD), (AB, CD), (BO, CD) *par rapport aux côtés de* AOB. *Si* AB *devient tangente mobile, l'enveloppe des coniques* (EFGHK) *et celle de leurs polaires de* O *sont des coniques; le lieu des pôles de* CD *est une droite.* — Le théorème corrélatif est immédiat.

(Ripert.)

Question 1209.

(Voir *Mathesis* (2), IX, p. 56).

Étant donnés dans un plan un point O, *deux droites* m, n *et une conique* C^2 *passant par les deux points* O *et* (m, n), *l'on prend sur un rayon variable issu de* O *et coupant* C^2 *en un second point* P, *le point* P′ *harmoniquement séparé de* P *par les droites* m *et* n : *trouver le lieu de* P′. *Cas particulier dans lequel les droites* m *et* n *sont isotropes.* (V. Retali).

Solution par M. E. N. Barisien. Prenons des axes rectangulaires, l'origine étant au point I d'intersection des droites m et n, l'axe des x étant dirigé suivant IO. Posons $IO = a$, et soient :

$$y = mx, \quad y = nx,$$

les équations des droites m et n, et

$$x^2 + 2Bxy + Cy^2 - ax + 2Ey = 0, \tag{1}$$

l'équation de la conique C^2.

La droite QP a pour équation

$$y = \lambda(x - a), \tag{2}$$

λ étant un paramètre variable.

Formons une combinaison homogène du second degré des équations (1) et (2); nous aurons ainsi

$$x^2 + 2Bxy + Cy^2 + \frac{(2Ey - ax)(\lambda x - y)}{\lambda a} = 0,$$

(**) Nous avons déjà fait remarquer antérieurement qu'il est inutile de créer une nouvelle terminologie pour la géométrie projective. (P. M.).

ou

$$y\,[x\,(2B\lambda a + 2E\lambda + a) + y\,(C\lambda a - 2E)] = 0,$$

équation qui donne à la fois les droites IO et IP.

Le coefficient angulaire μ de la droite IP est donc

$$\mu = \frac{2\,(Ba + E)\,\lambda + a}{2E - Ca\lambda}. \tag{3}$$

Soit μ' le coefficient angulaire de la droite IP′; la condition pour que les droites IP et IP′ soient conjugués harmoniques des droites m et n est

$$(\mu + \mu')\,(m + n) = 2\mu\mu' + 2mn. \tag{4}$$

Les coordonnées du point P′ vérifient les équations (2) et

$$y = \mu' x. \tag{5}$$

Pour avoir l'équation du lieu (P′), remplaçons dans (4), μ' par $\frac{y}{x}$, μ par la valeur (3), ensuite λ par $\frac{y}{x-a}$; nous aurons alors une équation du second degré en x et y.

Examinons le cas où les droites (m) et (n) sont isotropes. Alors

$$m = \sqrt{-1}, \quad n = -\sqrt{-1}, \quad m + n = 0, \quad mn = 1,$$

et les droites IP, IP′ sont rectangulaires.

M. Dépres résout la question en prenant pour axes la droite IO et la tangente en I à la conique C²; M. Emmerich, les droites m et n.

Pour trouver le lieu de P′, il suffit de remarquer 1° que la conique C² passant par O et I, les deux droites OP, IP engendrent des faisceaux projectifs; 2° que les droites IP et IP′, conjuguées harmoniques, par rapport à m et n, se correspondent dans une involution; il en résulte que les droites OP′ et IP′ engendrent des faisceaux projectifs. Par conséquent, P′ décrit une conique (P′) passant par les points I et O. Pour que cette courbe dégénère en un système de deux droites, IO doit être sa propre homologue dans les faisceaux O (P′), I (P′); ce qui exige que IO et la tangente en I à C² séparent harmoniquement m et n. Le lieu de P′ se compose alors de IO et de la droite joignant les points de rencontre de C² avec m et n.

M. Déprez démontre ce dernier résultat par d'autres considérations. (J. N.).

Solution par M. Retali. Le lieu cherché est la transformée K³ de C³ par l'inversion de Hirst ayant O pour pôle et le couple de droites m, n pour conique double. Si M et N sont les intersections ultérieures de m et n avec C³, A le pôle de MN par rapport à C³, B le pôle de la droite qui unit O avec $(m, n) = V$, on trouve aisément que chaque rayon mené par A ou par B, coupe les deux coniques C³ et K³ en quatre point harmo-

niques, deux conjugués appartenant à la même conique; K^2 et C^2 sont donc mutuellement *associés*(*) par rapport aux pôles A et B (aux axes M N, O V). Lorsque m et n sont les droites isotropes issues du point V et C^2 un cercle, K^2 est le cercle coupant orthogonalement C^2 en O et V. Il s'ensuit le théorème : « si deux cercles orthogonaux se coupent en deux points réels, chaque rayon mené par un de ces points coupe ultérieurement les deux cercles en deux points qui sont vus de l'autre point sous un angle droit. » On démontre aisément ce théorème par la géométrie élémentaire (V. *Periodico di Mat.* an. 1895, pag. 119, question 274).

Question 1210.

(Voir *Mathesis* (2), t. IX, p. 56).

Une droite AB *de longueur variable s'appuie par ses extrémités* A *et* B *sur deux droites fixes* Ox, Oy, *de façon que le triangle* AOB *ait une surface constante. — Trouver le lieu du centre des symédianes du triangle* AOB; *lorsque l'angle* xOy *est droit, ce lieu est une lemniscate de Bernoulli.* (E. N. Barisien).

Solution par MM. G. Gérard, Déprez, Emmerich et Rose. Désignons par a, b, c les distances OA, OB, AB, et par θ l'angle des axes. Le centre K des symédianes du triangle AOB est déterminé en coordonnées normales α, β, γ par les rapports

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c} = \frac{2\,surf.\,\mathrm{AOB}}{a^2+b^2+c^2},$$

ou, en exprimant tout au moyen de a, b et θ,

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{1}{2}\frac{ab\sin\theta}{a^2+b^2-ab\cos\theta},$$

ou encore, en introduisant les coordonnées cartésiennes x, y et en remplaçant α par $y\sin\theta$, β par $x\sin\theta$ et ab par une constante k^2 :

$$\frac{y}{a} = \frac{x}{b} = \frac{1}{2}\frac{k^2}{a^2+b^2-k^2\cos\theta}. \qquad (1)$$

(*) *Coniques « orthotomiques* de M. Jeffery, *couple de Pappus* suivant la dénomination de MM. P. Tannery et Koenigs. (V. *Intermédiaire des Math.* T. I. 1894, pag. 21, 77, 110, 193, et T. IV, 1897 p. 54).

Combinant ces rapports, il vient

$$\frac{y^2}{a^2}=\frac{x^2}{b^2}=\frac{xy}{k^2}=\frac{x^2+y^2}{a^2+b^2},$$

$$\frac{xy}{k^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{k^2}{a^2+b^2-k^2\cos\theta}\right)^2.$$

Eliminant entre ces relations la quantité a^2+b^2, on trouve l'équation du lieu :

$$k^2xy=4(x^2+y^2-xy\cos\theta)^2.$$

Cas particulier. Si $\theta=90^\circ$, on obtient

$$k^2xy=4(x^2+y^2)^2,$$

ou, en faisant tourner les axes de 45° :

$$k^2(x^2-y^2)=8(x^2+y^2)^2;$$

ce qui représente une lemniscate de Bernoulli.

Remarque. Ce résultat pouvait être prévu. En effet, la droite mobile AB a pour enveloppe une hyperbole dont les asymptotes sont dirigées suivant Ox, Oy ; quand l'angle xOy est droit, cette hyperbole est équilatère. En même temps, le point de Lemoine K du triangle AOB se place au milieu de la hauteur issue de O. Son lieu est donc une podaire centrale d'hyperbole équilatère, c'est à-dire une lemniscate de Bernoulli. (Gérard, Déprez).

M. Lez a résolu la même question en prenant pour axes Ox et une perpendiculaire.

M. Déprez fait les remarques suivantes :

1° Le pied de la symédiane issue de O décrit une quartique.

2° Supposons l'angle $xOy=90^\circ$. Alors le point de Lemoine du triangle OAB décrit un limaçon de Pascal si le périmètre reste constant; une strophoïde si AB enveloppe une parabole tangente à Ox et Oy; une podaire d'hypocycloïde à 4 rebroussements si le côté AB a une longueur invariable.

Question 1911.

(Voir *Mathesis* (2) IX, p. 80).

Chercher l'enveloppe des hyperboles qui passent par un point donné A, *ont une asymptote donnée* xx', *et dont la deuxième asymptote* yy' *est une tangente variable d'une courbe plane donnée* Δ. (V. Retali).

Solution par M. G. Gérard (Liège). Démontrons d'abord le théorème suivant : Si deux hyperboles ont une asymptote commune xx', leur corde d'intersection AB passe par le point de rencontre des asymptotes non communes yy', zz'. En effet, appelons C, C', C'' les points où la droite AB coupe les asymptotes; d'après un théorème bien connu, on doit avoir AC = BC', AC = BC''; donc on a BC' = BC'', et C' coïncide avec C''.

Cela étant, considérons deux hyperboles de l'énoncé, ayant l'asymptote commune xx'; soient yy' et zz' les deux autres, C et D leurs points de contact sur la courbe donnée Δ, enfin E leur point de rencontre. D'après ce qui précède, si l'un des points de rencontre A de ces deux hyperboles est donné, le second B sera situé sur AE. Faisons maintenant tendre D vers C, E y tendra également; à la limite, le point B, devenu point caractéristique, se trouvera sur la droite AC, c'est-à-dire sur la droite joignant le point fixe au point de contact correspondant de l'asymptote mobile.

Prolongeons AB jusqu'à sa rencontre avec xx' en F; comme on a toujours BF = AC, le lieu des points caractéristiques B, ou l'enveloppe cherchée, est une cissoïdale de la courbe donnée (C), par rapport au point A et à la droite xx'.

Note de M. Retali. Les notations étant les précédentes, soient m la droite équidistante de A et de $x'x$, Δ' la courbe symétrique de Δ par rapport à A, G et H les points de rencontre de AB avec Δ' et m. On voit facilement que HG = HB; par suite, les points B, G, H et le point à l'infini de AB forment une division harmonique. La transformation cissoïdale de la courbe Δ est ainsi ramenée à une transformation de Hirst de Δ', la conique des points unis étant formée de m et de la droite à l'infini.

Si l'on prend pour origine le point A et pour axe des x la perpendiculaire à xx', les formules de la transformation cissoïdale sont

$$x' = 2\mu - x, \quad y' = \frac{y}{x}x'$$

ou $$x' : y' : 1 = x(2\mu - x) : y(2\mu - x) : x,$$

l'équation de la droite donnée $x'x$ étant $x = 2\mu$.

×Question 1212.

(Voir *Mathesis*, (2) IX, p. 80).

Eliminer x et y entre les équations

$$x\left(1+\frac{2y^2}{r^2}\right)=a\,,\quad y\left(1+\frac{2x^2}{r^2}\right)=b\,,\quad x^2+y^2=r^2$$

(M. Stuyvaert).

Solution par M. Rose. Chassant les dénominateurs dans les deux premières équations et ajoutant membre à membre, on obtient

$$(x+y)(r^2+2yx)=(a+b)r^2,$$

ou en tenant compte de la troisième équation :

$$(x+y)^3=(a+b)r^2,\quad x+y=(a+b)^{\frac{1}{3}}r^{\frac{2}{3}}.$$

En soustrayant les deux premières équations membre à membre, il vient

$$x-y=(a-b)^{\frac{1}{3}}r^{\frac{2}{3}}.$$

Faisons la somme des carrés des valeurs de $x+y$, $x-y$ et tenons compte de l'équation $x^2+y^2=r^2$; nous aurons l'équation demandée

$$(a+b)^{\frac{2}{3}}+(a-b)^{\frac{2}{3}}=2r^{\frac{2}{3}}. \qquad (1)$$

Ont résolu la même question MM. Barisien, G. Gérard, Emmerich et Delahaye.

Remarque On déduit des deux premières équations, eu égard de la troisième :

$$x^2-y^2=ax-by,\ 4xy=ay+bx. \qquad (2)$$

L'équation (1) exprime que les deux hyperboles (2) ont un point commun avec le cercle $x^2+y^2=r^2$. (Barisien).

×Question 1213.

(Voir *Mathesis* (2), IX p. 80).

On donne deux droites Ox, Oy, *et un point* A; *trouver un point* G *qui soit le centre de gravité du triangle ayant pour sommets* A *et les projections* B, C *de* G *sur* Ox, Oy. (J. Neuberg).

Solution par MM. V. Retali et Orlando. Appelons a et b les coordonnées du point A; x et y celles de G, et θ l'angle des droites données.

Nous avons

$$OB=x+y\cos\theta,\quad OC=y+x\cos\theta,$$

donc

$$3x = a + x + y\cos\theta, \qquad (1)$$

$$3y = b + y + x\cos\theta, \qquad (2)$$

et, par suite,

$$x = \frac{2a + b\cos\theta}{4 - \cos^2\theta}, \quad y = \frac{2b + a\cos\theta}{4 - \cos^2\theta}.$$

Solution par M. Emmerich. Abaissons les perpendiculaires AD, AE sur Ox, Oy et prolongeons BG et CG jusqu'à ce qu'elles rencontrent AE en I, AD en H. GI passant par le milieu de AC et AI étant parallèle à GC, on en conclut que CGAI est un parallélogramme et que G est le milieu de BI; de même G est le milieu de CH.

Construction. Prolongez DA et EA jusqu'à leur rencontre avec Oy et Ox en M et L. Les droites qui joignent L au milieu de AD et M au milieu de AE se coupent en G.

Autre solution. On pourrait construire les droites (1) et (2) en cherchant les points où elles rencontrent les axes. Mais on peut trouver ces droites par la géométrie élémentaire.

En effet, la droite BG passe par le milieu B′ de AC. Le point B′ se trouve sur une parallèle à Oy menée par le milieu D de OA; soit E le point où cette parallèle coupe Ox. Comme on a $BG = 2GB'$, G appartient au lieu des points qui divisent dans le rapport 2 : 1 les perpendiculaires élevées sur Ox et limitées à la droite ED; ce lieu est une droite facile à construire.

Une seconde droite passant par G s'obtient en menant par D une parallèle à Ox, etc. (J. N.)

QUESTIONS D'EXAMEN.

898. Le segment AB est divisé harmoniquement en C et D; par ces points, on mène les droites CC′, DD′ perpendiculaires à AB. Une sécante menée par A rencontre CC′, DD′ en γ, δ. Démontrer que AB est la bissectrice (extérieure ou intérieure) de l'angle $\gamma B\delta$.

899. Si a, b, c sont les côtés d'un triangle rectangle, les expressions

$$2a + 2b + 3c, \quad 2a + b + 2c, \quad a + 2b + 2c$$

représentent aussi les côtés d'un triangle rectangle.

Plus généralement, imaginons une suite de triples de nombres

$$(a, b, c), (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3), \ldots,$$

obéissant à la loi de récurrence

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}, \quad b_n = a_{n-1} + b_{n-1}, \quad c_n = a_{n-1} + c_{n-1}.$$

Si a, b, c sont les côtés d'un triangle rectangle, $a^2 = c^2 + b^2$, il en est de même des triples

$$(a_2, b_2, c_2), (a_4, b_4, c_4), (a_6, b_6, c_6), \ldots$$

Il est facile de voir que a_2, b_2, c_2 sont les nombres indiqués ci-dessus.

900. Trois circonférences passent par un même point O et se coupent encore deux à deux aux points A, B, C. On marque sur chacune des circonférences un nouveau point A′, B′, C′. Démontrer que les circonférences AB′C′, BC′A′, CA′B′ se coupent en un même point O′.

(Lazzeri.)

901. Démontrer qu'on a identiquement

$$\begin{vmatrix} x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 \cos\alpha + y_2 \sin\alpha - p & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 \cos\alpha + y_3 \sin\alpha - p & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 \cos\alpha + y_4 \sin\alpha - p & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En déduire qu'entre les distances $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ des quatre sommets d'un quadrilatère plan $A_1A_2A_3A_4$ à une droite quelconque du plan il existe la relation

$$\delta_1 . A_2A_3A_4 - \delta_2 . A_3A_4A_1 + \delta_3 . A_4A_1A_3 - \delta_4 . A_1A_2A_3 = 0.$$

On a de même entre les distances δ des cinq points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 à un plan quelconque les relations

$$\delta_1 . A_2A_3A_4A_5 + \delta_2 . A_3A_4A_5A_1 + \cdots = 0.$$

902. On mène une tangente commune MM′ à un cercle fixe et à un cercle variable de centre donné. Les lieux du point M′ et du milieu de MM′ sont des limaçons de Pascal. (E. N. Barisien.)

903. Le nombre $(n^5 - 1)\, n^5\, (n^5 + 1)$ est divisible par 504.

904. Par un point donné A, faire passer un cercle qui soit vu des points B et C sous les angles donnés β et γ.

Le centre O du cercle se construit par l'intersection des lieux des points tels que les rapports OA : OB, OA : OC aient des valeurs connues.

905. 81 est le seul nombre qui soit égal au carré de la somme de ses chiffres.

2008. Résoudre le système

$$x + y^3 = y + x^3 = a + a^3.$$

Les deux premières équations donnent

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 1) = 0.$$

L'hypothèse $x = y$ donne

$$x + x^3 - a - a^3 = 0 \quad \text{ou} \quad (x - a)(x^2 + ax + a^2 - 1) = 0.$$

On considère ensuite les équations

$$x^2 + xy + y^2 - 1 = 0, \quad x + y + x^3 + y^3 = 2a + 2a^3;$$

il est avantageux de déterminer $x + y$ et xy.

(EMMERICH.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**2021.** Résoudre le système

$$x = px^2 + qy^2 + rz^2,$$
$$y = py^2 + qz^2 + rx^2,$$
$$z = pz^2 + qx^2 + ry^2.$$

Calculer les inconnues pour $p = 4$, $q = -2$, $r = 1$. (EMMERICH.)

×**2022.** Soit P un point quelconque de la sphère circonscrite à un cube dont A, B, C, D sont les sommets d'une même face. Démontrer que

$$\cos^2 PA + \cos^2 PB + \cos^2 PC + \cos^2 PD = \tfrac{4}{3}.$$

(W. S. COONEY).

2023. Démontrer l'identité suivante :

$$5^n - 5^{n-1} C_{2n,1} + 5^{n-2} C_{2n-1,2} - 5^{n-3} C_{2n-2,3} + \cdots + (-1)^n C_{n+1,n}$$
$$= 1 + C_{2n,1} + C_{2n-1,2} + C_{2n-2,3} + \cdots + C_{n+1,n}.$$

(EMMERICH).

2024. On considère une sphère et un cylindre de révolution, dont le cercle de base a pour diamètre un rayon de la sphère. Ces deux surfaces se rencontrent suivant une courbe gauche. Trouver la ligne décrite par la tangente à cette courbe sur le plan de la base du cylindre.

(G. ANDRIEN).

2025. Les extrémités d'une droite AB, de longueur variable décrivent deux droites données Cx, Cy; l'aire du triangle CAB restant

constante, démontrer que : 1° le cercle circonscrit au triangle ABC enveloppe une podaire d'hyperbole; 2° l'axe orthique de ABC enveloppe une hyperbole; 3° le cercle des neuf points de ABC enveloppe une quartique. Si l'angle xCy est droit, le cercle circonscrit et le cercle des neuf points enveloppent des lemniscates de Bernoulli. (DEPREZ.)

×**1236**. Si dans un triangle, la droite d'Euler est parallèle à un des côtés, le triangle orthique a ses côtés en progression arithmétique.

(DROZ. FARNY.)

×**1237**. Soient E, F les points de concours des côtés opposés AB et CD, BC et DA d'un quadrilatère convexe ABCD; G étant le point d'intersection des diagonales AC et BD, on mène la droite EG qui coupe BC en X, DA en Z; on mène aussi la droite FG qui rencontre AB en Y, DC en U.

En désignant par Q, Q' les aires des quadrilatères ABCD, XYZU, et par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ celles des triangles BCD, CDA, DAB, ABC, on a la formule

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{8\alpha\beta\gamma\delta}{(\alpha+\beta)(\alpha+\delta)(\gamma+\beta)(\gamma+\delta)}. \quad \text{(J. NEUBERG.)}$$

×**1238**. Soient : Q la surface d'un quadrilatère convexe ABCD, circonscrit à un cercle; a, b, c, d les distances des sommets aux points de contact adjacents; T la surface du triangle qui a pour sommets les points de concours E, F, G des côtés opposés et des diagonales; T_1 la surface du triangle dont les côtés sont dirigés suivant les lignes AC, BD, EF; m la droite qui joint les milieux des diagonales. Démontrer les formules

$$4m^2 = (a+b+c+d)\left[\frac{(a-c)^2}{a+c} + \frac{(b-d)^2}{b+d}\right],$$

$$\frac{T}{Q} = \frac{2abcd}{(ab-cd)(ad-bc)}, \quad \frac{T_1}{Q} = \frac{4abcd}{(a^2-c^2)(b^2-d^2)}.$$

(J. NEUBERG.)

Rectifications. Le prix des *Récréations arithmétiques* de M. FOURREY est 3 fr. 50 et non 5 fr. comme nous l'avons indiqué p. 141. — P. 176, question 1228, lire *forces égales*, au lieu de *forces*.

SUR LES TRANSFORMATIONS QUADRATIQUES INVOLUTIVES;

par M. L. RIPERT.

(*Suite et fin;* voir pages 185-190.)

II.

On sait que, à tout plan π correspond par dualité un point P de l'espace. Le corrélatif de tout point ou toute droite située dans le plan π est un plan ou une droite passant par le point P. Par suite, à tout théorème de géométrie plane (ou dans le plan π), on peut faire correspondre un théorème de *géométrie autour du point* P.

A une conique du plan π, à ses points, à ses tangentes, aux polaires des points du plan, etc., correspondent respectivement un cône (du 2e degré) de sommet P, ses plans tangents, ses génératrices, les *polaires* des plans passant par P, etc.

Ceci rappelé, l'article de 1888 est susceptible de la *seconde traduction* suivante :

1bis. Considérons deux faisceaux involutifs (B), (C) ayant pour supports les plans B, C(*). Soient D_1 un plan quelconque et D_2 le plan de jonction des rayons conjugués avec BD_1 et CD_1 dans (B) et (C). *Les plans* D_1 *et* D_2 *se correspondent dans une transformation involutive, à tout plan* D_1 *correspondant un seul plan* D_2.

2bis. Soient BA, CA les rayons conjugués de BC considéré comme rayon de (B), puis de (C).

Quand D_1 coïncide avec B, BD_1 est indéterminé et CD_1 a pour conjugué CA ; donc, D_1 est un plan arbitraire passant par CA. De même,...(**). Enfin,... Donc, *les faces du trièdre* (A,B,C) *ont pour correspondant un plan quelconque passant par l'arête opposée ;* A,B,C seront dits les *plans principaux* de la transformation.

3bis. Les droites AD_1, AD_2 sont les rayons conjugués d'un faisceau

---

(*) De même que, en géométrie plane, tout élément considéré est dans le plan π, en géométrie autour du point, tout élément considéré passe par le point P, sans qu'il soit besoin d'en faire mention. La première phrase implique : deux faisceaux involutifs de droites issues de P, situées dans les plans B et C (passant par P) ; D_1 est un plan passant par P ; BD, l'intersection des plans B et D_1, etc.

(**) Je laisse au lecteur le soin facile de combler quelques lacunes.

involutif (A)..... Un couple quelconque de (B) associé à un couple quelconque de (C) détermine quatre plans passant par deux couples de rayons conjugués de (A).

4bis. La construction des plans correspondants de la transformation se fait aisément au moyen d'un cône fixe Σ inscrit au trièdre (A,B,C). En effet, si, par deux rayons conjugués quelconques de (A), AD_1 et AD_2, on mène à Σ les plans tangents A_1 et A_2, la droite A_1A_2 est située dans un plan fixe α, passant par BC,.... et qui sera dit le *plan polaire de l'involution* (A). — Soient de même β et γ les plans polaires des involutions (B) et (C).

5bis..... *Les plans polaires* α, β, γ *se coupent suivant une droite* σ *qui est, dans la transformation considérée, la ligne correspondant au cône* Σ.

6bis..... *Trois couples quelconques de rayons conjugués* (un dans chaque face-support) *donnent six génératrices d'un même cône* .... Les involutions (A), (B), (C) déterminent, autour de BC, CA, AB, trois planaires involutives (*a*), (*b*), (*c*). *Trois couples quelconques de ces planaires* (un autour de chaque arête) *touchent un même cône.* En particulier, si trois plans passant par BC, CA, AB concourent suivant une droite, il en est de même de leurs plans conjugués. De là résulte *une transformation involutive dans laquelle à une droite correspond une droite*.....

III.

La première traduction (I) donne lieu elle-même à la suivante, qui est une *troisième traduction* de l'article primitif et dont il n'est pas difficile d'apercevoir la corrélation *directe* (autour du point) avec la seconde traduction (II)(*).

1ter. Considérons deux planaires involutives (*b*), (*c*), pivotant autour des droites *b*, *c*. Soient d_1 une droite quelconque (passant par P) et d_2 l'intersection des plans conjugués avec bd_1 et ca_1 dans (*b*) et (*c*). *Les droites* d_1 *et* d_2 *se correspondent dans une transformation involutive*.....

2ter. Soient *ba*, *ca* les plans conjugués de *bc* considéré comme plan de (*b*), puis de (*c*).... *Les arêtes du trièdre* (*a*, *b*, *c*) *ont pour correspondante une droite quelconque de la face opposée; a*, *b*, *c* seront dites les *droites principales* de la transformation.

(*) On peut remarquer aussi que (III) est un corollaire par perspective de l'article primitif, de même que (II) est un corollaire perspectif de (I), ce qui prouve la liaison intime de toutes ces questions, à tous les points de vue.

3ter. Les plans ad_1 et ad_2 sont les plans conjugués d'une planaire involutive (a)..... Un couple quelconque de (b) associé à un couple quelconque de (c) détermine quatre droites situées dans deux couples de plans conjugués de (a).

4ter. Soit un cône fixe σ, circonscrit au trièdre (a, b, c). Si deux plans conjugués de (a), ad_1 et ad_2, coupent σ suivant les génératrices a_1 et a_2, le plan $a_1 a_2$ passe par une droite fixe α, située dans le plan bc, et qui sera dite la *polaire de l'involution* (a). Soient de même β et γ les polaires des involutions (b) et (c).

5ter. *Les polaires* α, β, γ *sont situées dans un plan* Σ *qui est, dans la transformation considérée, le plan correspondant au cône* σ.

6ter. *Trois couples quelconques de plans conjugués* (un par arête) *touchent un même cône*..... Les involutions (a), (b), (c) déterminent, dans les faces bc, ca, ab, trois faisceaux involutifs (A), (B), (C). *Trois couples quelconques de ces faisceaux* (un dans chaque face) *constituent six génératrices d'un même cône*. En particulier, si trois droites situées dans bc, ca, ab, sont dans un même plan, il en est de même de leurs conjuguées. De là résulte *une transformation involutive dans laquelle à un plan correspond un plan*.....

Il serait possible de compléter les deux dernières traductions (II et III) au point de vue analytique (nos 7, 8 et 9). Mais il faudrait pour cela définir un système de *coordonnées tridriques*, tangentielles et ponctuelles, question trop longue pour être abordée ici et sur laquelle je me propose de revenir.

IV.

L'extension au tétraèdre est plus difficile *dans son ensemble*; mais *le principe* de la transformation est facile à établir. — Revenons à l'article primitif.

1iv. Considérons un triangle BCD et trois planaires involutives (CD), (DB), (BC) ayant pour arêtes les droites CD, DB, BC. Soient M_1 un point quelconque de l'espace, et M_2 l'intersection des plans conjugués avec CDM_1, DBM_1, BCM_1 dans (CD), (DB), (BC). *Les points* M_1, M_2 *se correspondent dans une transformation involutive*.....

2iv. Soient CDA, DBA, BCA les plans conjugués de BCD considéré comme plan de (CD), puis de (DB), puis de (BC). Quand M_1 est sur CD, CDM_1 est indéterminé; DBM_1 et BCM_1 ont pour conjugués respectifs

DBA et BCA; donc M_2 est alors arbitraire sur AB. De même, si M_1 est sur DB ou BC, M_2 est indéterminé sur AC ou AD. Enfin si l'on place M_1 en A, CDM_2, DBM_2 et BCM_2 se confondent avec BCD. Donc, les arêtes du tétraèdre ABCD ont pour correspondantes les arêtes opposées, et les sommets du tétraèdre ont pour correspondant un point quelconque de la face opposée. Les sommets, les arêtes et les faces seront dits respectivement les *points principaux*, *droites principales* et *plans principaux* de la transformation.

3°. Les plans ABM_1 et ABM_2, ACM_1 et ACM_2, ADM_1 et ADM_2 sont également les plans conjugués de trois planaires involutives (AB), (AC), (AD).....

Remarques. On peut traduire de même le n° 3 de l'article de 1888, mais une grande difficulté se présente à partir du n° 4. La substitution d'une quadrique circonscrite à la conique fixe circonscrite Σ ne semble pas possible. Il y aura lieu d'examiner si cette conique ne doit pas être remplacée par une *surface cubique* passant par les six arêtes. On observera, à ce propos, qu'il existe une surface de ce genre très remarquable; c'est le lieu des points tels que leurs projections sur les quatre faces du tétraèdre soient dans un même plan. Cette surface, dont on peut, par exemple, trouver une étude dans les *Exercices* de Kœhler (t. II, Ch. 7), est une correspondante du cercle circonscrit à un triangle *plus directe* encore que la sphère circonscrite à un tétraèdre. On le reconnait aisément, car selon que a représente un côté du triangle ou une face du tétraèdre, la *même* équation $\left(\Sigma \frac{a^2}{X} = 0\right)$ représente le cercle circonscrit ou la surface dont il s'agit.

Le n° 6 (article de 1888) rend probables les théorèmes suivants, dont on peut chercher à démontrer soit l'exactitude, soit l'inexactitude : 1° Six couples quelconques (un par arête-pivot) de plans conjugués des six involutions associées touchent une même quadrique; 2° Six couples quelconques (un par arête-support) des ponctuelles involutives déterminées par les six involutions associées sur les arêtes qui leur sont respectivement opposées, appartiennent à une même quadrique.

Bien d'autres résultats sont à prévoir. Il est visible, par exemple, que si quatre droites dépendant du tétraèdre forment un quadruple hyperboloïdique, il doit en être de même de leurs correspondantes.

Ce qui est certain, c'est que la partie que l'on peut traduire de l'article de 1888 a une corrélative, dont le début est le suivant :

Considérons un trièdre A dont les arêtes sont AB, AC, AD et trois ponctuelles involutives (AB), (AC), (AD) ayant pour supports ces arêtes. Soient M_1 un plan quelconque, et M_2 le plan de jonction des points conjugués avec ABM_1, ACM_1, ADM_1 dans (AB), (AC), (AD). Les plans M_1 et M_2 se correspondent dans une transformation involutive.....

A étant leur plan de jonction, soient ABa, ACa, ADa les points conjugués de A considéré comme point de (AB), puis de (AC), puis de (AD). Quand M_1 passe par AB, le point ABM_1 est indéterminé, les points ACM_1 et ADM_1 ont pour conjugués respectifs les points ACa et ADa ; donc M_2 est alors un plan arbitraire passant par AB.....

Les points CDM_1 et CDM_2, DBM_1 et DBM_2, BCM_1 et BCM_2 sont également les points conjugués de trois ponctuelles involutives (CD), (DB), (BC).. .....

SUR LE PRODUIT DES n PREMIERS NOMBRES;

par M. H. Mandart.

I. Représentons par P_n le produit de n facteurs

$$a(a+b)(a+b+c)(a+b+c+d)\cdots(a+b+c+d+\cdots+k+l).$$

On a

$$P_1 = a;$$

$$P_2 = a.\,b + a^2;$$

$$P_3 = a(bc+b^2) + \frac{a^2}{1}(c+2b) + \frac{a^3}{1.2}\cdot 2$$

$$= a(bc+b^2) + a^2(c+2b.) + a^3.$$

$$P_4 = a[b(cd+c^2) + b^2(d+2c) + b^3]$$

$$+ \frac{a^2}{1}[cd+c^2+2b(d+2c)+3b^2]$$

$$+ \frac{a^3}{1.2}[2(d+2c)+2.3\,b] + \frac{a^4}{1.2.3}\cdot 2.3.$$

La loi de formation des termes est évidente : Le coefficient de a dans P_n est égal au produit P_{n-1} dans lequel on a remplacé a par b, b par c,

c par d, etc. Celui de $\frac{a^2}{1}$ est la dérivée par rapport à b du coefficient de a. Celui de $\frac{a_3}{1.2}$ est la dérivée par rapport à b du coefficient de $\frac{a_2}{1}$, et ainsi de suite (*). Ainsi, par exemple,

$$P_4 = a\,[b\,(b+c)\,(b+c+d)]$$
$$+\frac{a^2}{1}[b\,(b+c)+(b+c)\,(b+c+d)+(b+c+d)\,b]$$
$$+\frac{a^3}{1.2}[2b+2(b+c)+2(b+c+d)]+\frac{a^4}{1.2.3}\times 6. = a[b(b+c)(b+c+d)]$$
$$+a^2\,[b\,(b+c)+(b+c)\,(b+c+d)+(b+c+d)\,b]$$
$$+a^3\,[b+(b+c)\,(b+c+d)]+a^4.$$

Si $a=b=c=d=\cdots=1$, la formule précédente devient :

$$P_{44} = P_{33}+P_{32}+P_{31}+1.$$

P_{pq} désignant la somme des produits des p premiers nombres pris q à q.

Par analogie, on a

$P_{n+1,n+1} = 1+P_{n1}+P_{n2}+P_{n3}+\cdots\cdots+P_{nn}$ ou, en remplaçant 1 par le symbole P_{i0},

(1) $$P_{n+1,n+1} = P_{n0}+P_{n1}+P_{n2}+P_{n3}+\cdots+P_{nn}.$$

II. La valeur du terme général P_{np} du second membre de l'égalité (1) est :

(2) $$P_{np} = pP_{p-1,p-1}+(p+1)\,P_{p,p-1}+(p+2)\,P_{p+1,p-1}+\cdots$$
$$+nP_{n-1,p-1}.$$

En effet, formons le tableau des produits contenus dans chacun des deux membres de cette égalité.

1° Soit $abc\ldots kl$ un produit du premier tableau ; les facteurs sont en nombre p, et je suppose que l est le plus grand de ces facteurs ; on a

$$n > l > p.$$

Si je supprime le facteur l, le produit restant $abc\ldots k$ sera compris

(*) On démontre la règle générale par passage de n à $(n+1)$.

dans la somme $P_{l-1,p-1}$, car les facteurs $a, b, c, d, \ldots, k$ sont au nombre de $p-1$, tous inférieurs à l. Conséquemment le produit considéré $abc \ldots kl$ se trouvera dans le terme $lP_{l-1,p-1}$ qui fait partie du second membre de (2.).

2° Soit $abcd \ldots kl$ un produit du second tableau ; il est compris dans le terme $lP_{l-1,p-1}$, l étant le plus grand facteur du produit.

$P_{l-1,p-1}$ étant la somme des produits des $l-1$ premiers nombres $p-1$ à $p-1$, en multipliant tous ces produits par l, on obtient les produits des l premiers nombres p à p, qui sont évidemment compris dans $P_{n,p}$, car $n > l$.

Donc le produit $abcd \ldots kl$ se trouve aussi dans le premier tableau.

Les deux tableaux contiennent donc identiquement les mêmes produits, ce qui démontre l'identité (2).

Si l'on fait successivement $p = 1, 2, 3, \ldots, n$, on a :

$$\begin{aligned}
P_{n1} &= P_{00} + 2P_{10} + 3P_{20} + \cdots + nP_{n-1,0} \\
P_{n2} &= \quad 2P_{11} + 3P_{21} + \cdots + nP_{n-1,1} \\
P_{n3} &= \quad 3P_{22} + \cdots + nP_{n-1,2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P_{nn} &= \quad nP_{n-1,n-1}.
\end{aligned}$$

III. Le nombre des produits ou de termes dont se compose $P_{n,p}$ est :

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots p}.$$

Le nombre des termes de $pP_{p-1,p-1}$ est 1,

» » » » $(p+1)P_{p,p-1}$ est $\frac{p}{1}$,

» » » » $(p+2)P_{p+1,p-1}$ est $\frac{p(p+1)}{1,2}$,

» » » » $nP_{n-1,p-1}$ est $\frac{p(p+1)\ldots(n-2)(n-1)}{1.2.3\ldots(n-p)}$.

Les nombres des termes ou produits contenus dans les deux tableaux dont il est parlé ci-dessus étant égaux, puisque les termes du premier sont identiques à ceux du second, on a :

$$1 + \frac{p}{1} + \frac{p(p+1)}{1.2} + \frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3} + \cdots$$
$$+ \frac{p(p+1)\cdots(n-2)(n-1)}{1.2\cdots n-p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{1.2.3\cdots p}. \quad (3)$$

Si dans cette formule on fait respectivement $p = 2, 3, 4$, etc. on a :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots (n-2)(n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

$$1.2.3 + 2.3.4 + \cdots + (n-3)(n-2)(n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}, \text{ etc.}$$

Ces résultats se trouvent aisément par passage de n à $n+1$.

SUR LES TRIANGLES QUI SONT INSCRITS DANS UNE ELLIPSE ET CIRCONSCRITS A UN CERCLE CONCENTRIQUE,

par M. E. Barisien.

On sait qu'étant données deux ellipses concentriques et de même direction d'axes, et de demi-axes a, b et a', b', si on a la relation

$$a'b + ab' = ab,$$

il existe une infinité de triangles qui sont inscrits dans l'ellipse (a, b) et circonscrits à l'ellipse (a', b'). — Si $a' = b' = R$, alors

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \quad R = \frac{ab}{a+b}.$$

Il existe donc une infinité de triangles inscrits dans l'ellipse (a, b) et circonscrits au cercle concentrique à l'ellipse et de rayon $\frac{ab}{a+b}$.

Ce cercle est donc tel que l'inverse de son rayon est la somme des inverses des demi-axes de l'ellipse.

Ce sont des propriétés et lieux géométriques relatifs à ce cercle que nous résumons dans le présent article, formant ainsi monographie dans le genre d'articles analogues publiés dans ce Recueil(*).

Notations employées. Soient :

E, l'ellipse (a, b), O son centre ;

Σ, le cercle concentrique à E de rayon $R = \frac{ab}{a+b}$;

(*) *Mathesis* (2), V, p. 42. et p. 289. L'étude faite sur les cercles de Chasles concernait les triangles circonscrits à une ellipse et inscrits dans un cercle.

A, B, C, les sommets d'un triangle T inscrit dans E et circonscrit à Σ;

D, le quatrième point de rencontre du cercle circonscrit à T avec l'ellipse E;

D' le symétrique de D par rapport à O;

A'. B', C', les points de contact des côtés BC, CA et AB avec Σ;

A'', B'', C'', les points de contact des tangentes à Σ, respectivement parallèles à BC, CA et AB;

A''', B''', C''', les pôles par rapport à E, des droites BC, CA et AB;

α, β, γ les points symétriques de A, B, C, par rapport à O;

Propriétés. 1. Le prolongement du rayon OA' rencontre le cercle principal de E en un point a : la droite $A\alpha$ est perpendiculaire au grand axe de E.

2. Les hauteurs du triangle ABC interceptent entre les axes de E une longueur constante et égale à $(a - b)$.

3. La droite B'C' passe par l'orthocentre du triangle AA'A''.

4. Les droites AA', BB' et CC' passent par un même point P; les droites AA'', BB'' et CC'' passent par un même point Q. Les coordonnées de ces points vérifient les relations

$$\frac{x_p}{x_q} = \text{constante} = \frac{b}{2a+b} \quad \frac{y_p}{y_q} = \text{constante} = \frac{a}{2b+a}.$$

On voit que le rapport des coefficients angulaires des droites OP et OQ est constant.

5. Soient ω et ω' les centres des cercles circonscrits aux triangles ABC et αBC, ω_1 le symétrique de ω par rapport à O, ω_2 le milieu de $\omega_1\omega'$. Les droites $O\omega_2$, OA' sont également inclinées sur les axes de E.

6. On a la relation

$$\frac{\overline{BC}^2 . \overline{OA}^4}{\overline{OA}^2 - R^2} = \text{constante} = 4a^2b^2, \quad \text{ou} \quad \frac{BC . \overline{OA}^2}{AB'} = 2ab.$$

7. On a les relations

$$\frac{B'C' . OA}{AB'} = \text{constante} = 2R, \quad \frac{BC . OA}{B'C'} = \text{constante} = a + b.$$

La seconde relation est assez remarquable, car $(a + b)$ est le rayon du cercle concentrique à l'ellipse et tel qu'il existe une infinité de

triangles à la fois inscrits dans le cercle et circonscrits à l'ellipse. Les propriétés de ce cercle ont déjà été résumées dans *Mathesis*. (2), V, 129.

8. Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2) les coordonnées des points B, C, B′, C′. On a les relations

$$\frac{x'_1 + x'_2}{x_1 + x_2} = \text{constante} = -\frac{b}{a+b}, \qquad \frac{x'_1 x'_2}{x_1 x_2} = \text{constante} = \frac{b^2}{(a+b)^2};$$

$$\frac{y'_1 + y'_2}{y_1 + y_2} = \text{constante} = -\frac{a}{a+b}, \qquad \frac{y'_1 y'_2}{y_1 y_2} = \text{constante} = \frac{a^2}{(a+b)^2}.$$

$$\frac{x_1 x_2}{a} + \frac{y_1 y_2}{b} + R = 0, \qquad a x'_1 x'_2 + b y'_1 y'_2 + R^2 = 0.$$

9. Les normales à E en A, B, C, D′, concourent en un même point.

10. Chacun des triangles A′B′C′, A″B″C″, A‴B‴C‴ est homologique avec les triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$.

11. L'ordonnée du point A est moyenne géométrique entre les ordonnées des points A′ et A‴. La même relation a lieu entre les abscisses de ces trois points.

12. Les droites OA‴ et AA″ sont parallèles.

13 Le rapport des distances du centre de E aux centres du cercle et de l'hyperbole équilatère circonscrits au même quadrilatère ABCD est constant et égal à $\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)$.

14. Le quatrième point de rencontre des deux hyperboles équilatères circonscrites aux quadrilatères ABCD et ABCD′ est l'orthocentre du triangle ABC.

15. Les axes des deux paraboles circonscrites au quadrilatère ABCD′ sont parallèles aux diagonales du rectangle construit sur les axes de l'ellipse E.

16. On a la relation

$$\overline{AA''}^2 = \frac{(a^2 + b^2)\overline{OA}^2 - a^2 b^2}{(a+b)^2}.$$

17. La droite OA′ rencontre la normale en A en un point M. MA a pour longueur le demi-diamètre conjugué de OA.

18. On prend sur la normale à E en A et du côté intérieur de l'ellipse une longueur AN égale au demi-diamètre conjugué de OA. Soit Δ la droite qui joint les projections du point N sur les axes de E. Cette droite Δ coïncide avec la hauteur du triangle ABC, aboutissant en A.

(*A continuer.*)

*CONCOURS GÉNÉRAL DE 1899.

Rechercher le maximum de la surface totale d'un cône inscrit dans une sphère de rayon R.

Soient AB la génératrice du cône inscrit, BC le rayon de la base et OK la distance du centre de la sphère à la génératrice. La surface totale du cône sera : π (BC. AB + $\overline{BC}^2$). Posons OK = x, nous aurons

$$AB = 2AK = 2\sqrt{R^2 - x^2};$$

$$\frac{BC}{OK} = \frac{AB}{AO} \quad \text{ou} \quad \frac{BC}{x} = \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{R};$$

d'où
$$BC = \frac{2x\sqrt{R^2 - x^2}}{R}.$$

Nous avons à chercher le maximum de

$$\pi\left[\frac{4x(R^2 - x^2)}{R} + \frac{4x^2(R^2 - x^2)}{R^2}\right],$$

ou de
$$x(R + x)^2(R - x)$$

ou enfin de
$$x\left(\frac{R + x}{\alpha}\right)^2\left(\frac{R - x}{\beta}\right),$$

α et β étant des constantes dont nous disposons de manière à rendre constante la somme des facteurs x, $\frac{R + x}{\alpha}$, et $\frac{R - x}{\beta}$. Nous avons donc

(1)
$$1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = 0.$$

Le maximum a lieu pour

(2)
$$x = \frac{R + x}{2\alpha} = \frac{R - x}{\beta}.$$

De (2) nous tirons

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{2x}{R + x}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{x}{R - x},$$

et substituant dans (1), il vient

$$4x^2 - Rx - R^2 = 0.$$

La solution négative devant être écartée, on a

$$x = \frac{R}{8}(1 + \sqrt{17}).$$

Cette valeur de x rendant positifs les facteurs α et β, est acceptable; c'est la valeur qu'il faut donner à OK pour que la surface totale du cône soit maximum. (PLOUMEN, Chimay).

BIBLIOGRAPHIE.

Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes par EM. PICARD, Membre de l'Institut et G. SIMART, Répétiteur à l'Ecole Polytechnique. Tome I. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1897 (VI-246 p. gr. in-8°). Prix : 9 francs.

La théorie des fonctions algébriques de deux variables, ou si l'on veut, celle des surfaces algébriques présente encore trop de lacunes, disent MM. Picard et Simart, pour pouvoir faire l'objet d'une exposition d'ensemble vraiment approfondie; aussi leur but en publiant le volume dont nous donnons plus haut le titre est-il de donner une idée de l'état actuel de la science sur un sujet dont l'étude nécessitera l'effort de nombreux chercheurs. Les premiers chapitres traitent assez longuement des intégrales multiples et de la Géométrie de situation; dans les suivants, il s'agit de la connexion dans les surfaces algébriques et des intégrales de différentielles totales; les derniers se rapportent aux invariants relatifs aux intégrales et aux surfaces. Voici au reste la table des matières de l'ouvrage qui donnera une idée plus précise des questions qui y sont abordées et des difficultés qu'elles présentent.

CHAP. I. *Des intégrales multiples de fonctions de plusieurs variables.* Des intégrales simples et des intégrales mutiples d'ordre $n-1$ dans l'espace à n dimensions. Des intégrales d'ordre quelconque. — CHAP. II. *Sur la Géométrie de situation (analysis situs).* Généralités sur les variétés à un nombre quelconque de dimensions. Des différents ordres de connexion dans les espaces à n dimensions. Étude de quelques cas particuliers. Sur une propriété des multiplicités fermées. — CHAP. III. *Des intégrales de fonctions rationnelles de deux variables complexes.* Des intégrales doubles de fonctions de deux variables complexes. Extension du théorème de Cauchy, d'après M. Poincaré. Des résidus des intégrales doubles de fonctions rationnelles. Des intégrales de différentielles totales de fonctions rationnelles. — CHAP. IV. *Singularités d'une surface algébrique. Des invariants d'une surface au point de vue de la Géométrie de situation.* Réduction des singularités d'une surface algébrique. Définition des ordres de connexion d'une surface. Généralités sur la connexion linéaire dans les surfaces algébriques. Etude plus approfondie du nombre des cycles linéaires d'une surface donnée. Premier aperçu sur la connexion à deux dimensions. — CHAP. V. *Sur les intégrales de différentielles totales de première espèce.* Généralités sur les intégrales de première espece. Discussion relative aux points singuliers. Quelques applications des généralités précédentes. — CHAP. VI. *Des intégrales de différentielles totales de seconde espèce et de troisième espèce.* Généralités. Théorème fondamental sur le nombre des intégrales

de seconde espèce. Recherche des intégrales de seconde espèce. Des intégrales de troisième espèce. — CHAP. VII. *Des intégrales doubles de première espèce et des invariants qui s'y rapportent.* Des intégrales doubles de première espèce. Du genre géométrique des surfaces algébriques. Digression sur les systèmes linéaires de courbes tracées sur une surface. Du second genre des surfaces algébriques et du degré du système canonique. — CHAP. VIII. *Sur les courbes gauches algébriques et la formule susceptible de donner le genre d'une surface.* Quelques formules relatives aux courbes gauches algébriques; surfaces adjointes à une courbe gauche. Sur une relation entre les invariants $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ d'une surface algébrique. Sur le nombre des conditions exprimant qu'une surface passe par une courbe gauche. Expression numérique du genre géométrique. Du genre numérique d'une surface.

Traité d'Arithmétique élémentaire, par J. MAINGIE, directeur de l'Ecole moyenne de Laeken. Septième édition mise en rapport avec les nouveaux programmes des écoles moyennes. Deux volumes : 1° cours de 1re année; 2° cours de 2e et de 3e année. Namur, Wesmael-Charlier, 1899 (In-12 de 208 + 168 p.).

Un examen attentif de ces deux volumes nous permet de signaler ce traité comme un des meilleurs ouvrages du genre. La théorie y est rigoureuse et clairement exposée. Un choix d'exercices nombreux (1600) et variés complète chaque volume; une large place y est faite aux applications à résoudre par le calcul mental. De plus, un grand nombre des problèmes proposés présentent un incontestable caractère d'actualité et d'utilité pratique. Mentionnons tout particulièrement les questions relatives à l'intérêt composé, aux annuités, aux assurances, aux mutualités, etc. L'auteur, qui a fait de ces questions une étude très attentive, les expose méthodiquement, et les résout par les opérations élémentaires. Le livre de M. Maingie ne pourra donc que développer, chez les jeunes gens, le goût de l'épargne (*).

ED. VERHELST,
professeur de mathématiques supérieures
à l'Athénée royal de Bruxelles.

(*) Voici quelques remarques *spéciales* qu'il nous semble utile d'ajouter à l'appréciation générale de M. Verhelst : Dans une future édition, M. Maingie fera bien de remplacer la table de mortalité de Quetelet et celles qui en sont déduites par des tables plus en rapport avec l'état social actuel de la Belgique. La valeur du marc allemand n est pas donnée exactement. L'escompte en dehors, contrairement à ce que dit l'auteur, e t aussi rationnel que l'escompte en dedans : quand on escompte en dehors un billet de 100 fr à 5 pour cent, on l'escompte en dedans à $5\frac{5}{19}$ p. °/₀, etc.

(P. M.).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1089.

(Voir *Mathesis*, (2), VI, p. 240).

Résoudre le système

$$\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{y^2-b^2}+\sqrt{z^2-c^2}=0,$$

$$\sqrt{x^2-a'^2}+\sqrt{y^2-b'^2}+\sqrt{z^2-c'^2}=0,$$

$$x+y+z=0,$$

où a, b, c et a', b', c' représentent les côtés de deux triangles ABC, A'B'C'. *Discussion.* (J. Neuberg.)

Solution par M. Emmerich. Chassons les radicaux dans la première équation. Nous trouvons

$$\Sigma x^4-2\Sigma y^2z^2+2\Sigma a^2(-x^2+y^2+z^2)+\Sigma a^4-2\Sigma b^2c^2=0.$$

De $x+y+z=0$, on tire

$$-x^2+y^2+z^2=-2yz,\ 3\Sigma x^4-2\Sigma y^2z^2=4\Sigma y^2z^2,\ \Sigma x^4=2\Sigma y^2z^2.$$

D'autre part, nous avons, S désignant la surface du triangle ABC, $\Sigma a^4-2\Sigma b^2c^2=-16S^2$.

La première équation prend donc la forme

$$-4\Sigma a^2yz-16S^2=0, \quad \text{ou} \quad \Sigma a^2yz=-4S^2.$$

On pourrait aussi l'écrire ainsi :

$$\Sigma x^2\cot A=2S.$$

Nous avons maintenant le système

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy=-4S^2, \tag{1}$$

$$a'^2yz+b'^2zx+c'^2xy=-4S'^2, \tag{2}$$

$$x+y+z=0. \tag{3}$$

En posant

$$a^2S'^2-a'^2S^2=L,\ b^2S'^2-b'^2S^2=M,\ c^2S'^2-c'^2S^2=N,$$

les équations (1) et (2) donnent

$$Lyz+Mzx+Nxy=0. \tag{4}$$

Des équations (3) et (4) on tire successivement

$$Lyz - (Mz + Ny)(y + z) = 0,$$
$$Ny^2 + (-L + M + N)yz + Mz^2 = 0,$$
$$x : y : z = (M - N - L - \sqrt{R_0}) : (L - M - N + \sqrt{R_0}) : 2N,$$

ou

$$R_0 = L^2 + M^2 + N^2 - 2MN - 2NL - 2LM.$$

On connaît ainsi les rapports des inconnues, $x : y : z = \alpha : \beta : \gamma$. Pour les trouver elles-mêmes on recourra aux équations (1) ou (2).

On peut aussi éliminer entre les équations (1) et (2) une des inconnues, x par exemple, ce qui fournit pour yz l'équation linéaire

$$(a^2yz + 4S^2) : (a'^2yz + 4S'^2) = (b^2\gamma + c^2\beta) : (b'^2\gamma + c'^2\beta).$$

Une autre méthode consiste à combiner directement une des équations (1) ou (2) avec (3). On aura

$$c^2y^2 + 2cbyz\cos A + b^2z^2 = 4S^2, \tag{5}$$

et cinq autres équations analogues.

Discussion. On a $R_0 = S^2S'^2.\Delta$, si l'on pose

$$a^2 - a'^2 = d^2, \quad b^2 - b'^2 = e^2, \quad c^2 - c'^2 = f^2, \quad \Sigma d^4 - 2\Sigma e^2f^2 = \Delta.$$

1° Supposons d^2, e^2, f^2 tous positifs, R_0 sera < 0 ou > 0 suivant que d, e, f représentent les côtés d'un triangle ou non. En particulier, la solution est imaginaire, si les triangles ABC, A'B'C' sont semblables; on trouve alors

$$x = a\rho\varepsilon^{iB}, \quad y = b\rho\varepsilon^{-iA}, \quad z = -c\rho, \quad \text{avec } \rho = \infty,$$

l'incompatibilité des équations (1) et (2) étant manifeste dans ce cas. $R_0 = 0$ exige que l'une quelconque des quantités d, e, f soit égale à la somme des deux autres; exemple : $a = 5$, $b = 13$, $c = 17$; $a' = 4$, $b' = 12$, $c' = 15$.

2) $d^2 > 0$, $e^2 > 0$, $f^2 < 0$; solution réelle, car $\Delta = (d^2 - e^2 + f^2)^2 - 4d^2f^2$.

Les cas, où trois ou deux des quantités d^2, e^2, f^2 sont négatives, se réduisent aux précédents. La solution est également réelle si une ou deux de ces quantités sont nulles.

3) $d^2 = e^2 = f^2 = 0$; les équations (1) et (2) se confondent et le problème devient indéterminé. Divisons l'équation (5) par $\frac{b^2c^2}{4R^2}$, R désignant le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, et posons $2Rx = a\xi$,

$2Ry = b\eta$, $2Rz = c\zeta$. Nous aurons

$$\eta^2 + 2\eta\zeta \cos A + \zeta^2 = a^2, \ldots, \ldots; \quad a\xi + b\eta + c\zeta = 0.$$

On voit que ξ, η, ζ, une ou deux de ces quantités ayant le signe —, sont les distances d'un point de la circonférence circonscrite au triangle ABC aux sommets de ce triangle. C'est le cas des triangles égaux; le cas des aires égales appartient au 2° de notre discussion.

Si x, y, z, sont réels, tous les radicaux du problème proposé sont imaginaires et *vice-versâ*. Car de $x^2 - a^2 = x_1^2$, $y^2 - b^2 = y_1^2$, $z^2 - c^2 = z_1^2$, $x + y + z = 0$, $x_1 + y_1 + z_1 = 0$, $a + b > c$, on conclut $(xy_1 - x_1y)^2 > 0$.

Dans le cas 3° on conclut, de $\xi < 2R$, que $x < a$, etc.

NOTE. On obtient les équations proposées en cherchant trois parallèles $x'x$, $y'y$, $z'z$ situées dans un même plan et telles qu'on puisse placer sur ces droites les sommets de deux triangles donnés ABC, A'B'C'. Les inconnues x, y, z représentent les distances de ces parallèles, prises avec des signes convenables. Le problème géométrique conduit aux radicaux $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{b^2 - y^2}$,....., qu'on peut remplacer ici par $\sqrt{x^2 - a^2}$, $\sqrt{y^2 - b^2}$,....

L'énoncé suivant ne diffère pas essentiellement du précedent : Étant donnés dans un même plan deux triangles ABC, A'B'C' qui ont un sommet commun, faire tourner l'un deux autour de ce sommet jusqu'à ce que les droites BB', CC' deviennent parallèles. (J. N.)

×Question 1091.

(Voir *Mathesis*, (2) VI, p. 240).

Sur les côtés AB, BC, CA *d'un triangle équilatéral, on prend les segments* AC', BA', CB' *proportionnels aux nombres donnés* p, q, r.

Démontrer que le premier centre isogone du triangle A'B'C' *décrit une circonférence.*

(DEPREZ.)

Solution analytique par M. EMMERICH. Prenons ABC pour triangle fondamental de coordonnées normales. Posons BC' $= a$, AC' $= p\lambda$, BA' $= q\lambda$, CB' $= r\lambda$.

Le centre isogone du triangle A'B'C' est, à l'intersection des circonférences AB'C', BC'A', CA'B'.

En partant de l'équation générale d'un cercle :

$$yz + zx + xy = (x + y + z)(lx + my + nz),$$

nous trouvons pour les cercles AB'C', BC'A', CA'B' les équations

$$a(y^2 - zx) = \lambda(x + y + z)(py - rs),$$
$$a(z^2 - xy) = \lambda(x + y + z)(qz - px),$$
$$a(x^2 - yz) = \lambda(x + y + z)(rx - qy),$$

qui multipliées respectivement par x, y, z et ajoutées donnent $0 = 0$. Pour éliminer λ, multiplions les équations par q, r, p et faisons la somme; nous aurons ainsi, pour le lieu du premier centre isogone du triangle A'B'C', l'équation

$$px^2 + qy^2 + rz^2 = pyz + qzx + rxy,$$

ou bien

$$(p + q + r)(yz + zx + xy) = (x + y + z)(px + qy + rz).$$

Ce lieu est donc le cercle qui passe par le centre du triangle de référence ($x = y = z$) et qui a, avec le cercle circonscrit à ce triangle, l'axe radical

$$px + qy + rz = 0.$$

Les coordonnées du centre du cercle trouvé sont proportionnelles à

$$-p + 2q + 2r, \quad -q + 2r + 2p, \quad -r + 2p + 2q,$$

et le carré de son rayon est égal à

$$R^2 \frac{p^2 + q^2 + r^2 - qr - rp - pq}{(p + q + r)^2},$$

R désignant le rayon du cercle circonscrit au triangle de référence.

Autre solution par M. Droz-Farny.

Question 1193.

(Voir *Mathesis*, (2), VIII, p. 263).

On considère une ellipse, un point fixe I *du grand axe de l'ellipse et la corde* PIP' *perpendiculaire au grand axe. Par le point* I *on fait passer une corde variable* MIM'. *Montrer que l'orthocentre, le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et le centre du cercle des neuf points de chacun des triangles* MM'P *et* MM'P', *décrivent chacun une ellipse. Cas où le point* I *est au centre ou à l'un des foyers de l'ellipse.*

(E. N. Barisien.)

Solution par M. R. Buysens. Soient φ_0, φ, φ' les anomalies respectives des points P, M, M'; posons

$$\varphi + \varphi' = \sigma, \quad \varphi - \varphi' = \delta.$$

En exprimant la condition que les points M, I, M' sont en ligne droite, on trouve

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_0 & 0 \\ 1 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 1 & \cos\varphi' & \sin\varphi' \end{vmatrix} = -\sin(\varphi - \varphi') + \cos\varphi_0(\sin\varphi - \sin\varphi') = 0.$$

Après division par $\sin\frac{1}{2}\delta$, cette relation devient

$$\cos\frac{1}{2}\delta = \cos\varphi_0 \cos\frac{1}{2}\sigma. \tag{1}$$

Déterminons les coordonnées des points dont il faut trouver le lieu.

Centre de gravité G. On a, en tenant compte de (1)

$$\left.\begin{aligned} 3x_g &= a(\cos\varphi + \cos\varphi' + \cos\varphi_0) = a\cos\varphi_0(2 + \cos\sigma) \\ 3y_g &= b(\sin\varphi + \sin\varphi' + \sin\varphi_0) = b(\cos\varphi_0 \sin\sigma + \sin\varphi_0) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Orthocentre H. Les hauteurs PH, MH ont pour équations

$$\begin{aligned} ax(\cos\varphi' - \cos\varphi) + by(\sin\varphi' - \sin\varphi) &= a^2\cos\varphi_0(\cos\varphi' - \cos\varphi) \\ &+ b^2\sin\varphi_0(\sin\varphi' - \sin\varphi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax(\cos\varphi' - \cos\varphi_0) + by(\sin\varphi' - \sin\varphi_0) &= a^2\cos\varphi(\cos\varphi' - \cos\varphi_0) \\ &+ b^2\sin\varphi(\sin\varphi' - \sin\varphi_0). \end{aligned}$$

Si l'on résout ce système, on trouve après quelques transformations :

$$\left.\begin{aligned} 2ax_H &= a^2(2\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0\sin\sigma) \\ &+ b^2(2\cos\varphi_0 + 2\cos\varphi_0\cos\sigma - \sin\varphi_0\sin\sigma) \\ 2by_H &= a^2\sin\varphi_0(1 - \cos\sigma) \\ &+ b^2(\sin\varphi_0 + \sin\varphi_0\cos\sigma + 2\cos\varphi_0\sin\sigma). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Centre O ***du cercle circonscrit.*** Les points G, H, O sont en ligne droite et on a HO = 3GO. Par suite :

$$\left.\begin{aligned} 2x_0 &= 3x_0 - x_H, \qquad 2y_0 = 3y_0 - y_H. \\ 4ax_0 &= c^2(2\cos\varphi_0 + 2\cos\varphi_0\cos\sigma - \sin\varphi_0\sin\sigma), \\ 4by_0 &= -c^2\sin\varphi_0(1 - \cos\sigma) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Centre C ***du cercle des neuf points.*** C'est le milieu de la droite OH, donc :

$$2x_9 = x_0 + x_H, \qquad 2y_9 = y_0 + y_H.$$

$$\left.\begin{aligned} 8ax_0 &= a^2(6\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0\sin\sigma + 2\cos\varphi_0\cos\sigma) \\ &\quad + b^2(2\cos\varphi_0 + 2\cos\varphi_0\cos\sigma - \sin\varphi_0\sin\sigma) \\ 8by_0 &= a^2\sin\varphi_0(1-\cos\sigma) \\ &\quad + b^2(3\sin\varphi_0 + \sin\varphi_0\cos\sigma + 4\cos\varphi_0\sin\sigma) \end{aligned}\right\} (5)$$

Il est maintenant facile d'éliminer le paramètre σ de chacun des systèmes (2) à (5); on résout chaque fois par rapport à $\sin\sigma$, $\cos\sigma$ et on substitue les expressions obtenues, qui sont linéaires en x et y, dans la relation $\sin^2\sigma + \cos^2\sigma = 1$. On obtient donc quatre ellipses. Quand le point I est au centre $\sin\varphi_0 = 1$, $\cos\varphi_0 = 0$; s'il est au foyer $(c, 0)$ on fait $\cos\varphi_0 = \frac{c}{a}$, $\sin\varphi_0 = \frac{b}{a}$.

Autre solution analytique par M. Déprez; elle contient les remarques suivantes: 1° Les lieux considérés sont encore des ellipses, lorsque P est un point fixe quelconque de l'ellipse donnée et I un point quelconque de son plan. 2° Le cercle circonscrit au triangle MPM′ enveloppe une podaire d'ellipse. 3° Si le point I est le centre de l'ellipse donnée, le cercle des neuf points du triangle MM′P enveloppe une podaire d'ellipse.

Question 1903.

(*Mathesis*, (2) IX, p. 32).

On considère le triangle ayant pour sommets les deux foyers F ***et*** F′ ***d'une ellipse et un point*** M ***variable de l'ellipse. Le lieu des pieds des bissectrices intérieure et extérieure situés sur le côté*** MF′ ***se compose de deux coniques.*** (E. N. Barisien).

Solution par M. J. Déprez. Soient A, B les pieds des bissectrices intérieure et extérieure situés sur MF′, $AF' = \rho$, $AF'F = \omega$, $BF' = \rho$. On a

$$\frac{AF'}{AM} = \frac{2c}{MF'}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\rho}{F'M} = \frac{2c}{2c + MF} = \frac{2c}{2(a+c) - F'M}.$$

On a aussi

$$F'M = \frac{b^2}{a - c\cos\omega}, \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{2c(a-c)}{a + c - 2c\cos\omega}.$$

Donc le point A décrit une ellipse ayant F′ pour foyer et pour directrice la tangente à l'ellipse donnée, menée par le sommet voisin de F′.

De même :

$$\frac{F'B}{MB} = \frac{2c}{MF}, \text{ d'où } \frac{\rho}{F'M} = \frac{2c}{2c - MF} = \frac{2c}{2(c-a) + F'M}.$$

Le lieu de B a donc pour équation :

$$\rho_1 = \frac{2c(a+c)}{c - a + 2c\cos\omega}.$$

Le point B décrit une conique de foyer F′ et dont la directrice est la tangente menée par le sommet de l'ellipse le plus éloigné de F′.

La conique est une ellipse, une parabole, une hyperbole, suivant que l'on a $3c < a$, $3c = a$, $3c > a$.

Remarque. *On peut étendre la question proposée à la sphère; ainsi le lieu de* A *est une conique sphérique ayant* F′ *pour foyer, la directrice de la conique est la tangente sphérique à l'ellipse sphérique donnée, menée par le sommet voisin de* F′. Car si $F'M = \lambda$, on a

$$\operatorname{tg}\rho = \frac{\operatorname{tg}\lambda \sin 2c}{\sin 2a + \sin 2c - \operatorname{tg}\lambda \cos 2a}, \quad \operatorname{tg}\lambda = \frac{\cos 2c - \cos 2a}{\sin 2a - \sin 2c \cos\omega}.$$

L'équation du lieu de A est donc la conique ayant pour équation :

$$\operatorname{tg}\rho = \frac{\sin 2c \,.\, \sin(a-c)}{\sin(a+c) - 2c\cos(a-c)\cos\omega}.$$

Si δ est la distance sphérique de A à la tangente sphérique menée à l'ellipse donnée par le sommet voisin de F′, on a :

$$\frac{\sin\rho}{\sin\lambda} = \frac{\sin 2c}{\sin(a+c)}.$$

On verrait de même que le lieu de B (*pied de la bissectrice extérieure sur* F′A) *est une conique sphérique de foyer* F′.

Solution par MM. Soons, Emmerich *et* Van Dorsten. Soient G, H les points où les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle FF′M rencontrent FM. Appelons (x', y') les coordonnées de M, (x, y) celles de G ou H. Comme la distance FM est divisée additivement et soustractivement dans le rapport

$$\frac{F'F}{F'M} = \frac{2c}{a + \frac{cx'}{a}} = \frac{2ac}{a^2 + cx'},$$

on a d'après des formules connues

$$x = c\frac{a^2 + cx' \pm 2ax'}{a^2 + cx' \pm 2ac}, \quad y = \frac{\pm 2acy'}{a^2 + cx' \pm 2ac}.$$

Il suffit de prendre les signes supérieurs en remplaçant a par $+a$ et par $-a$. De ces égalités on tire x' et y', et l'on substitue les valeurs obtenues dans l'équation

$$a^2y'^2+(a^2-c^2)(x'^2-a^2)=0.$$

Le résultat est

$$(a-c)(a+3c)x^2+(a+c)^2y^2-2c(a-c)^2x \\ -c^2(a-c)(3a+c)=0.$$

Solution géométrique par M. Degueldre, qui donne la construction suivante des asymptotes du lieu (H) : La circonférence décrite de F' comme centre avec le rayon F'F rencontrant l'ellipse en deux points M_1, M_2, les asymptotes sont parallèles à FM_1, FM_2. M. Soons a donné une seconde solution en coordonnées polaires.

Question 1203.

(Voir *Mathesis*, (2) t. IX, p. 32).

Démontrer algébriquement la relation suivante :

$$(2n+1)\left\{C_{2n+1}^{n}-\frac{1}{3}C_{2n+1}^{n-1}+\frac{1}{5}C_{2n+1}^{n-2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{0}\right\} \\ =8n\left\{C_{2n-1}^{n-1}-\frac{1}{3}C_{2n-1}^{n-2}+\frac{1}{5}C_{2n-1}^{n-3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}C_{2n-1}^{0}\right\},$$

où $C_p^r=C_p^{p-r}$ *désigne le nombre des combinaisons de p objets pris r à r.*

Solution par M. Emmerich. Posons

$$\frac{(2n+1)!}{(x+2n+1)(x+2n-1)\ldots(x+2n-2r+1)\ldots(x-2n-1)} \\ =\frac{A_0}{x+2n+1}+\frac{A_1}{x+2n-1}+\cdots+\frac{A_r}{x+2n-2r+1}+\cdots+\frac{A_{2n+1}}{x-2n-1}\quad(1).$$

Chassons le dénominateur de A_r et faisons alors $x=-2n+2r-1$. Nous trouvons

$$A_r=\frac{(2n+1)!}{2r(2r-2)\ldots4.2.(-2)(-4)\ldots(-4n+2r-2)} \\ =\frac{(-1)^{r+1}(2n+1)!}{2^{2n+1}\,r!(2n-r+1)!}=\frac{(-1)^{r+1}}{2^{2n+1}}C_{2n+1,r}.$$

Si l'on fait $x=0$, le premier membre de (1) prend la forme

$$\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{(2n+1)^2(2n-1)^2\ldots3^2.1^2}=\frac{(-1)^{n+1}.2n(2n-2)\ldots4.2}{(2n+1)(2n-1)\ldots3.1}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot n!}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3 \cdot 1} = \frac{(-1)^{n+1} 2^n n! 2^n}{(2n+1) n! C_{2n,n}} = \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n}}{(2n+1) C_{2n,n}}.$$

On aura donc

$$\sum_0^{2n+1} (-1)^r \frac{C_{2n+1,r}}{2n-2r+1} = \frac{(-1)^n \cdot 2^{4n+1}}{(2n+1) C_{2n,n}}.$$

Observons que la substitution $2n+1-r$ au lieu de r ne change point le terme général de la série. Nous avons donc

$$\sum_0^n (-1)^r \frac{C_{2n+1,r}}{2n-2r+1} = \frac{(-1)^n \cdot 2^{4n}}{(2n+1) C_{2n,n}}. \qquad (2)$$

En désignant le premier membre de (2) par $(-1)^n S_n$, on a

$$S_n = \frac{2^{4n}}{(2n+1) C_{2n,n}}, \qquad S_{n-1} = \frac{2^{4n-4}}{(2n-1) C_{2n-2,n-1}}.$$

Or $(2n-1) C_{2n-2,n-1} = n C_{2n-1,n} = \frac{1}{2} n C_{2n,n}$. Ainsi on trouve

$$S_n : S_{n-1} = 8n : 2n+1.$$

NOTE. On peut déduire la formule de WALLIS de ce qui précède (P. M.)

Question 1222.

(Voir *Mathesis*, (2), IX, p. 122).

Appelons l, m, n les projections d'une longueur MM' *sur les trois côtés* BC, CA, AB, *d'un triangle.*

1° *Quelle orientation faut-il donner à* MM' *pour que* $l+m+n$ *soit maximum?* 2° *Pour que* $-l+m+n$ *soit maximum?* 3° *Pour que* $l^2+m^2+n^2$ *soit maximum ou minimum?* (E. LEMOINE.)

Solution par M. E. CESÀRO. Trois segments égaux à MM', issus de M dans les directions de BC, CA, AB, représentent trois forces, dont la résultante existe tant que ABC n'est pas équilatéral. Or on sait que la projection de cette résultante sur la direction de MM', est précisément égale à la somme des projections de MM' sur les directions données. Afin que cette somme atteigne sa plus grande valeur absolue, il faut donc diriger MM' suivant la résultante. Dans le cas d'un triangle équilatéral, la somme dont il s'agit est nulle, quelle que soit l'orientation de MM'. Il suffit de changer le sens positif de la direction d'un côté quelconque pour obtenir trois autres directions résultantes, et, par suite, les autres orientations demandées pour MM'.

Quant à la somme des carrés des mêmes projections, on peut la

considérer comme le moment d'inertie du système de trois masses égales à l'unité, appliquées aux extrémités des trois forces considérées en commençant. l'axe étant perpendiculaire à MM'. Il en résulte qu'il y a deux directions, perpendiculaires entre elles, qu'on peut toujours donner à MM' afin que la somme en question soit maximum ou minimum. Ces directions sont celles des axes principaux d'inertie. Dans le cas d'un triangle équilatéral, l'ellipse d'inertie devient un cercle, et la somme dont il s'agit reste constante.

Autre solution par M. Barisien et Soons. Les directions cherchées sont : 1° la droite joignant les pieds des bissectrices intérieures du triangle; 2° la droite joignant les pieds des bissectrices intérieures des angles B et C; 3° les axes de l'ellipse de Steiner (J. N.)

×QUESTIONS D'EXAMEN.

907. Résoudre le système

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{y}=\frac{z}{x}+\frac{x}{z}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}.$$

(Emmerich.)

Egalant $\frac{y}{z}+\frac{z}{y}$ à α, on trouve

$$\frac{y}{z}=\frac{1}{2}(\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4}),\quad \frac{z}{x}=\frac{1}{2}(\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4}),\quad \frac{x}{z}=\frac{1}{2}(\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4}).$$

Si l'on prend les trois radicaux avec le même signe, le produit des dernières équations donne

$$\frac{y}{z}\times\frac{z}{x}\times\frac{x}{z}=1 \text{ ou } \theta \text{ ou } \theta^2,$$

θ et θ^2 désignant les racines cubiques imaginaires de l'unité; d'où les solutions

$$x=y=z,\quad x:y:z=1:\theta:\theta^2 \text{ ou } =1:\theta^2:\theta.$$

Si l'on prend les radicaux avec des signes différents on trouve

$$\tfrac{1}{2}(\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4})=1,\quad \text{ou}\quad \alpha=2,\quad \text{d'où}\quad x=y=z.$$

908. Le segment de droite AB glisse sur la droite xy, le segment CA sur la droite zx. Démontrer que la droite EF qui divise les distances AC, BD dans un même rapport donné $(m:n)$ est constante en grandeur et en direction. (Deguelder.)

Cette proposition est connue. Si A'B' est une seconde position de AB, et E'F' la position correspondante de EF, on démontre facilement que EE' et FF' sont des droites égales et parallèles, etc.

Si l'on construit les parallélogrammes BAEG, DCEH, on démontre facilement que F divise la droite GH dans le rapport $(m : n)$; or le triangle EGH a une forme invariable.

908. La somme $6^{10n+1} + 5^{11n-1}$ est divisible par 31.

$$6^{10n+1} = 6.(6^5)^{2n} = 6.(m.31 - 5)^{2n} = m.31 + 6.5^{2n},$$

$$5^{11n-1} = (5^5)^{2n}.5^{2n-1} = (m.31 + 1)^{2n}.5^{2n-1}\,5 = m.31 + 5^{2n-1},$$

$$6^{10n+1} + 5^{11n-1} = m\ 31 + 5^{2n-1}\,(6.5 + 1) = m.31.$$

(*Journal de Vuibert.*)

QUESTIONS PROPOSÉES.

1239. Etant donnée une conique de foyers F et F′, on considère une hyperbole équilatère ayant un de ses foyers en F et dont la directrice correspondante passe par F′. Trouver l'enveloppe de ces hyperboles, et les lieux de leurs centres, du second foyer et de leurs sommets, ainsi que l'enveloppe de la seconde directrice. Trouver aussi le lieu du point de rencontre des sécantes communes à la conique et à l'hyperbole.

(E. N. Barisien).

1240. Un point se meut de manière que la somme des carrés des projections de chacun de ses déplacements infiniment petits sur les droites qui le joignent à n points fixes soit constamment maximum ou minimum. Étudier sa trajectoire. (E. Cesàro).

×**1241.** Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 3 & 4 & 5 & & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & & n & 1 \end{vmatrix}$$

×**1242.** Etant donné un trapèze ABCD rectangle en A et en D, on joint les sommets C, B au milieu M de AD, et l'on abaisse de D une perpendiculaire à CM, de A une perpendiculaire à BM; soit N le point de concours de ces perpendiculaires. Démontrer que la droite MN est perpendiculaire à BC. (J. Neuberg).

Rectification. La question résolue page 101 est 1179 et non 1177. — Nous avons oublié de mentionner de bonnes solutions des questions 1206, 1209, 1211 et 1213 par M. Droz-Farny.

MÉTHODE POUR LA DÉCOMPOSITION DES GRANDS NOMBRES EN FACTEURS PREMIERS.

par M. E. Barbette.

La méthode, que je vais exposer, pour la décomposition des grands nombres en facteurs premiers, repose sur ce problème d'Analyse indéterminée : *Les nombres b et c étant donnés, quelles sont les valeurs entières de x qui rendent le trinome* $100x^2 \pm 4bx \pm c$ *carré parfait ?*

Cette méthode permettra aussi de déterminer si un nombre débarrassé des facteurs 2 et 5, quelque grand qu'il soit, est premier ou non.

Rappelons en outre quelques théorèmes d'arithmétique et observons avant tout, qu'un nombre Δ, premier avec 10, a l'une des formes $10m - 1$, $10m + 1$, $10m - 3$, $10m + 3$.

Théorème I. Un nombre N est divisible par un nombre Δ premier avec 10 et de la forme $(10m - 1)$, si le nombre d de ses dizaines accru de m fois le chiffre u de ses unités, est divisible par Δ.

En effet, on a

$$\begin{aligned} N &= 10d + u \\ &= 10d + 10mu - 10mu + u \\ &= 10(d + mu) - u(10m - 1) \\ &= 10(d + mu) - \mathcal{M}\Delta. \end{aligned}$$

Si Δ divise $d + mu$, il divisera N. Réciproquement, si Δ divise N, il divisera $10(d + mu)$ et aussi $d + mu$, s'il est premier avec 10.

Théorème II. Un nombre N est divisible par un nombre Δ premier avec 10 et de la forme $10m + 1$, si le nombre d de ses dizaines diminué de m fois le chiffre de ses unités, est divisible par Δ.

On raisonnera comme ci-dessus sur les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} N &= 10d + u \\ &= 10d - 10mu + 10mu + u \\ &= 10(d - mu) + u(10m + 1) \\ &= 10(d - mu) + \mathcal{M}\Delta. \end{aligned}$$

Théorème III. Un nombre N est divisible par un nombre Δ premier avec 10 et de la forme $10m - 3$, si le nombre d de ses dizaines diminué de $3m - 1$ fois le chiffre u de ses unités, est divisible par Δ.

On raisonnera comme précédemment en se basant sur les égalités :

$$\begin{aligned} N &= 10d + u \\ &= 10d - 30mu + 30mu + 10u - 9u \\ &= 10(d - 3mu + u) + 3u(10m - 3) \\ &= 10[d - (3m - 1)u] + \mathcal{M}\,\Delta. \end{aligned}$$

Théorème IV. Un nombre N est divisible par un nombre Δ premier avec 10 et de la forme $10m + 3$, si le nombre d de ses dizaines accru de $3m + 1$ fois le chiffre u de ses unités, est divisible par Δ.

La démonstration, analogue à celle du théorème I, repose sur les égalités

$$\begin{aligned} N &= 10d + u \\ &= 10d + 30mu - 30mu + 10u - 9u \\ &= 10(d + 3mu + u) - 3u(10m + 3) \\ &= 10[d + (3m + 1)u] - \mathcal{M}\,\Delta. \end{aligned}$$

Recherche des diviseurs d'un nombre donné N. 1° *Le nombre* N *admet-il des diviseurs de la forme* $10m - 1$?

D'après le théorème I, pour qu'un nombre $N = 10d + u$ admette un diviseur de la forme $10m - 1$, il faut et il suffit que $d + mu$ soit divisible par $10m - 1$; cherchons ainsi quelles sont les valeurs de m et de n qui satisfont à l'égalité

$$d + mu = (10m - 1).n,$$

ou

$$mn = \frac{d + mu + n}{10}.$$

Soient d' le nombre des dizaines et u' le chiffre des unités de d, en sorte que

$$d = 10d' + u'.$$

Alors

$$mn = d' + \frac{mu + n + u'}{10}.$$

Posons $mu + n + u = 10x$; d'où $n = 10x - mu - u'$ et par suite, successivement,

$$mn = d' + x,$$

$$m(10x - mu - u') = d' + x,$$

$$u.m^2 - (10x - u').m + d' + x = 0,$$

$$m = \frac{10x - u' \pm \sqrt{100x^2 - 4(5u' + u)x + u'^2 - 4ud'}}{2u}.$$

Pour que m soit rationnel, il faut trouver les valeurs entières de x qui rendent le trinome

$$100x^2 - 4(5u' + u).x + u'^2 - 4ud',$$

carré parfait. Et, s'il y en a, les valeurs entières de m parmi les valeurs rationnelles déterminées, donneront les diviseurs de la forme $10m - 1$.

2° *Le nombre* N *admet-il des diviseurs de la forme* $10m + 1$?

D'après le théorème II, pour qu'un nombre $N = 10d + u$ admette un diviseur de la forme $10m + 1$, il faut et il suffit que $d - mu$ soit divisible par $10m + 1$; cherchons ainsi quelles sont les valeurs de m et de n qui satisfont à l'égalité

$$d - mu = (10m + 1)n,$$

ou

$$mn = \frac{d - mu - n}{10}.$$

Soient d' le nombre des dizaines et u' le chiffre des unités de d, en sorte que

$$d = 10d' + u'.$$

Alors

$$mn = d' - \frac{mu + n - u'}{10}.$$

Posons $mu + n - u' = 10x$; d'où $n = 10x - mu + u'$ et, par suite, successivement,

$$mu = d' - x,$$

$$m(10x - mu + u') = d' - x,$$

$$um^2 - (10x + u').m + d' - x = 0,$$

$$m = \frac{10x + u' \pm \sqrt{100x^2 + 4(5u' + u)x + u'^2 - 4ud'}}{2u}.$$

Pour que m soit rationnel, il faut trouver les valeurs entières de x qui rendent le trinome

$$100x^2 + 4(5u' + u)x + u'^2 - 4ud'$$

carré parfait. Et, s'il y en a, les valeurs entières de m parmi les valeurs rationnelles déterminées, donneront les diviseurs de la forme $10m + 1$.

3° *Le nombre* N *admet-il des diviseurs de la forme* $10m - 3$?

D'après le théorème III, pour qu'un nombre $N = 10d + u$ admette

un diviseur de la forme $10m - 3$, il faut et il suffit que $d - (3m - 1)u$ soit divisible par $10m - 3$; cherchons ainsi quelles sont les valeurs de m et n qui satisfont à l'égalité

$$d - (3m - 1)u = (10m - 3)n,$$

ou

$$mn = \frac{d - (3m - 1)u + 3n}{10}.$$

Soient d' le nombre des dizaines et u' le chiffre des unités de d, en sorte que

$$d = 10d' + u'.$$

Alors

$$mn = d' - \frac{(3m - 1)u - 3n - u'}{10}.$$

Posons

$$(3m - 1)u - 3n - u' = x; \text{ d'où } n = \frac{-10x + (3m - 1)u - u'}{3},$$

et, par suite,

$$mn = d' - x,$$

$$m \cdot \frac{-10x + (3m - 1)u - u'}{3} = d' - x,$$

$$3u \cdot m^2 - (10x + u + u') \cdot m - 3d' + 3x = 0,$$

$$m = \frac{10x + u + u' \pm \sqrt{100x^2 + 4(5u' - 4u)x + (u' + u)^2 + 36ud'}}{6u}.$$

Pour que m soit rationnel, il faut trouver les valeurs entières de x qui rendent le trinome

$$100x^2 + 4(5u' - 4u)x + (u' + u)^2 + 36ud'$$

carré parfait. Et, s'il y en a, les valeurs entières de m parmi les valeurs rationnelles déterminées, donneront les diviseurs de la forme $10m - 3$.

4° *Le nombre* N *admet-il des diviseurs de la forme* $10m + 3$?

D'après le théorème IV, pour qu'un nombre $N = 10d + u$ admette un diviseur de la forme $10m + 3$, il faut et il suffit que $d + (3m + 1)u$ soit divisible par $10m + 3$; cherchons ainsi quelles sont les valeurs de m et de n qui satisfont à l'égalité

$$d + (3m + 1)u = (10m + 3) \cdot n,$$

ou

$$mn = \frac{d + (3m + 1)u - 3n}{10}.$$

Soient d' le nombre des dizaines et u' le chiffre des unités de d, en sorte que $d = 10d' + u'$; alors

$$mn = d' + \frac{(3m+1)u - 3n + u'}{10}.$$

Posons $(3m+1)u - 3n + u' = 10x$; d'où $n = \frac{-10x + (3m+1)u + u'}{3}$, et, par suite,

$$mn = d' + x,$$

$$m \times \frac{-10x + (3m+1)u + u'}{3} = d' + x,$$

$$3u.\ m^2 - (10x - u - u')m - 3d' - 3x = 0,$$

$$m = \frac{10x - u - u' \pm \sqrt{100x^2 - 4(5u' - 4u)x + (u' + u)^2 + 36ud'}}{6u}.$$

Pour que m soit rationnel, il faut chercher les valeurs entières de x qui rendent le trinome

$$100x^2 - 4(5u' - 4u)x + (u' + u)^2 + 36ud'$$

carré parfait. Et, s'il y en a, les valeurs entières de m parmi les valeurs rationnelles déterminées, donneront les diviseurs de la forme $10m + 3$.

Remarques. Si le nombre N débarrassé des facteurs 2 et 5 n'admet aucun diviseur ayant l'une des formes $10m - 1$, $10m + 1$, $10m - 3$ ou $10m + 3$, il est premier.

Cette méthode, évidemment longue pour décomposer les petits nombres en facteurs, permet cependant d'opérer avec certitude et de plus, donne un moyen de déterminer si un nombre, quelque grand qu'il soit, est premier ou non.

II. Si l'on applique *plusieurs fois de suite* le théorème I, par exemple, à un nombre donné 56327, il faudra pour que ce nombre admette un diviseur de la forme $10m - 1$, chercher à satisfaire à l'une des égalités :

$$\begin{aligned}
5632 + 7m &= (10m - 1)n, \\
563 + 2m + 7m^2 &= (10m - 1)p, \\
56 + 3m + 2m^2 + 7m^3 &= (10m - 1)q, \\
5 + 6m + 3m^2 + 2m^3 + 7m^4 &= (10m - 1)r.
\end{aligned}$$

Nous avons résolu la question en nous servant de la première égalité.

La deuxième, par un raisonnement analogue à celui qui est exposé plus haut, conduit à une équation du troisième degré en m; la troisième, à une équation du quatrième degré en m; et ainsi de suite.

SUR LA TRANSFORMATION PSEUDONEWTONIENNE(*);

par M. V. Retali.

Cette transformation a déjà été étudiée par M. Henkel (de Cassel) dans sa dissertation inaugurale de Marbourg (1882); le même géomètre a considéré aussi la transformation indiquée par M. Petit-Bois (voir la note placée à la fin du mémoire de M. Brocard), et il applique les deux transformations à la parabole, dont la transformée(*) est la cubique mixte. J'ai eu l'occasion de signaler cette dissertation dans la *Periodico di Matematica* (1898, p. 226).

En considérant la transformation sous un aspect plus complet, je suis arrivé, depuis sept ou huit ans, à en faire une théorie géométrique qui, après le mémoire de M. Brocard, peut offrir quelque intérêt. Voici un très court résumé de mes recherches(**).

Etant donnée une courbe plane algébrique C_m^n générale de l'ordre n et de la classe m, rapportée à deux axes rectangulaires OX, OY, on mène par l'origine O une parallèle à la tangente au point M de la courbe : le lieu du point où cette droite coupe la parallèle à OY menée par M est une courbe C_{3m}^{n+m} du degré $n+m$ et de la classe $3m$, ayant un point n^{tuple} en O, un point m^{tuple} à l'infini sur l'axe OY et $\frac{1}{2}m(2n-3)$ autres points doubles ordinaires. Le point à l'infini sur l'axe OY est un point m^{tuple} d'inflexion.

Le lieu C_{3m}^{n+m} passe par les m points de contact des tangentes menées à C_m^n par le point O; les n asymptotes que C_{3m}^{n+m} possède, outre les m asymptotes d'inflexion au point Y, sont les droites parallèles aux asymptotes de C_m^n menées par O; les tangentes au point n^{tuple} O sont

---

(*) Voir *Mathesis*, (2) t. VIII, p. 215, 1893 (question 1182) et le Mémoire de M. Brocard « Sur une transformation géométrique », donné en supplément à *Mathesis*, mars 1899.

(**) Les recherches paraîtront, sous une forme plus développée, dans un autre recueil.

parallèles aux tangentes menées à C_m^n en les points où cette courbe est coupée par l'axe OY.

Le cas particulier où la courbe donnée est une conique, conduit à des résultats assez curieux : la transformée peut être une quartique rationnelle ou l'une des cubiques remarquables (strophoïde, folium, trisectrice, serpentine, agnésienne, etc.).

SUR LES TRIANGLES QUI SONT INSCRITS DANS UNE ELLIPSE ET CIRCONSCRITS A UN CERCLE CONCENTRIQUE;

par M. E. Barisien.

(Suite; voir *Mathesis*, (2), IX, p. 224).

Lieux géométriques. 1. Un côté BC du triangle T et la tangente à E au troisième sommet A se coupent sur la kreuzcurve

$$\frac{(2a+b)^2}{x^2}+\frac{(a+2b)^2}{y^2}=\frac{c^4}{a^2b^2}.$$

2. Aire U(*) du lieu du point de rencontre de BC avec la normale en A :

$$\frac{2U}{\pi}=\frac{(aR+c^2)(bR-c^2)(a+b)}{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}}+\frac{3[c^4+ab(a-b)^2]}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$$

$$+\frac{c^2(c^2+aR)(2\sqrt{b}+\sqrt{a})}{b^{\frac{3}{2}}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}+\frac{c^2(c^2-bR)(\sqrt{2a}+\sqrt{b})}{a^{\frac{3}{2}}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}.$$

3. Lieu du point de rencontre de la tangente en A à E avec la droite OA' :

$$(bx^2+ay^2)^2=a^2b^2(x^2+y^2),\quad U=\frac{\pi}{2}(a+b)\sqrt{ab}.$$

4. Le lieu du point de rencontre du rayon OA' avec la parallèle au petit axe menée par A, est le cercle principal de E.

5. Le lieu du point de rencontre du rayon OA' avec la parallèle au grand axe menée par A, est le cercle décrit sur le petit axe de E comme diamètre.

(*) Nous désignons par U l'aire des courbes fermées que nous rencontrons dans cette étude.

6. Aire du lieu du point où la normale à E en A coupe la tangente à Σ en A'' :

$$\frac{2U}{\pi} = \frac{(aR - c^2)(bR + c^2)(a+b)}{a^{\frac{5}{2}} b^{\frac{5}{2}}} + \frac{3[c^4 - ab(a-b)^2]}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$$

$$- \frac{c^2(aR - c^2)(2\sqrt{b}+\sqrt{a})}{b^{\frac{5}{2}}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} + \frac{c^2(bR + c^2)(2\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a^{\frac{5}{2}}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}.$$

7. Lieu du point de rencontre de la tangente en A à E avec la tangente à Σ en A''.

Kreuzcurve : $$\frac{b^2}{x^2} + \frac{a^2}{y^2} = \frac{c^4}{a^2 b^2}.$$

8. Lieu des milieux des côtés du triangle T :

$$(b^2x^2 + a^2y^2)^2 = \frac{a^2b^2}{(a+b)^2} + (a^4y^2 + b^4x^2); \quad U = \frac{\pi ab(a^2+b^2)}{2(a+b)^2}.$$

9. Lieu des sommets du triangle A'''B'''C''' :

$$b^4x^2 + a^4y^2 = a^2b^2(a+b)^2.$$

10. Enveloppe des côtés du triangle A'B'C', ou polaire réciproque de E par rapport à Σ :

$$a^2x^2 + b^2y^2 = \frac{a^4b^4}{(a+b)^4}.$$

11. Lieu des milieux des côtés du triangle A'B'C', ou podaire du centre de l'ellipse (10) :

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{a^2b^2}{(a+b)^4}(a^2y^2 + b^2x^2).$$

12. Lieu des pôles des côtés du triangle A'B'C' par rapport à l'ellipse E :

$$b^6x^2 + a^6y^2 = a^2b^2(a+b)^4.$$

13. Lieu du point de rencontre des droites BC et B'C'. Kreuzcurve :

$$\frac{b^2(2a+b)^2}{x^2} + \frac{a^2(2b+a)^2}{y^2} = \frac{c^4(a+b)^2}{a^2b^2}.$$

14. Lieu du point de rencontre de B'C' avec la tangente à E en A.

Kreuzcurve : $$\frac{b^4(2a+b)^2}{x^2} + \frac{a^4(2b+a)^2}{y^2} = \frac{c^4(a+b)^4}{a^2b^2}.$$

15. Lieu du point de rencontre de B'C' avec la normale en A. L'aire a une expression analogue à celle des courbes (2) et (6).

16. Aire du lieu des pieds des hauteurs du triangle ABC :

$$U = \frac{\pi a^2 b^2}{(a+b)^2} + \frac{\pi}{8}(a-b)^2 \text{ (*)}.$$

17. Aire du lieu des milieux des hauteurs du triangle ABC :

$$U = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{\pi (a-b)^2}{32}.$$

18. Enveloppe des hauteurs du triangle ABC :

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (a-b)^{\frac{2}{3}}.$$

19. Lieu du point de rencontre de B'C' avec la tangente à Σ en A''.

Kreuzcurve : $$\frac{b^4}{x^2} + \frac{a^4}{y^2} = \frac{c^4 (a+b)^2}{a^2 b^2}.$$

20. Lieu du point de rencontre de B'C' avec la tangente à E au point α. Kreuzcurve :

$$\frac{a^2 (R^2 + b^2)^2}{x^2} + \frac{b^2 (R^2 + a^2)^2}{y^2} = c^4.$$

21. La droite AA''' est normale à l'ellipse ayant pour équation

$$\frac{x^2}{(2a+b)^2} + \frac{y^2}{(2b+a)^2} = \frac{1}{9}.$$

22. Aire du lieu des pieds des hauteurs du triangle A'B'C' :

$$\frac{\pi}{2}\left[AA' \frac{(a^2+b^2)}{a^2 b^2} + \frac{3(AB' + BA' + BB')}{ab(a+b)^2} + \frac{BA'(2a+b)}{a^2(a+b)^2} + \frac{AB'(2b+a)}{b^2(a+b)^2}\right],$$

où

$$A = R[Ra + b(a-b)], \quad B = -Rb(a-b),$$
$$A' = R[Rb - a(a-b)], \quad B' = Ra(a-b).$$

23. Les hauteurs du triangle A'B'C' sont normales à l'ellipse

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = \frac{a^4 b^4}{(a+b)^4}.$$

(*) $\frac{1}{2}\pi(a-b)^2$ exprime l'aire de la podaire de O par rapport à la développée de E; $\frac{1}{2}\pi(a^2+b^2)$ est l'aire de la podaire de O par rapport à E. De là, des interprétations de certaines valeurs de U.

CONCOURS GÉNÉRAL DE PREMIÈRE SCIENTIFIQUE EN 1899.

Sur la question de géométrie analytique,

par M. J. Dépeez.

Par un point A *donné sur une ellipse* (E) *on fait passer une série de cercles tangents en ce point à l'ellipse. On mène les tangentes communes aux deux courbes. Quel est le lieu de leur point de rencontre.*

Première solution. Prenons pour axes des coordonnées la normale et la tangente à l'ellipse au point A. Soient

$$y^2 + 2Axy + Bx^2 + 2Cx = 0,$$
$$y^2 + x^2 - 2\lambda x = 0,$$

les équations de l'ellipse et du cercle variable.

Écrivons les équations des couples de tangentes issues du point P (α, β), dont on demande le lieu, à l'ellipse et au cercle.

Nous aurons

$$(y^2 + 2Axy + Bx^2 + 2Cx)(\beta^2 + 2A\beta + \alpha\beta + B\alpha^2 + 2C\alpha) -$$
$$[x(B\alpha + C + A\beta) + y(\beta + A\alpha) + C\alpha]^2 = 0,$$
$$(x^2 + y^2 - 2\lambda x)(\alpha^2 + \beta^2 - 2\lambda\alpha) - [x(\alpha - \lambda) + By - \alpha\lambda]^2 = 0;$$

ou

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{c} x^2[(B - A^2)\beta^2 - 2AC\beta - C^2] + 2xy[\alpha\beta(A^2 - B) + \\ AC\alpha - C\beta] + \alpha y^2[\alpha(B - A^2) + 2C] + 2Cx[\beta^2 + A\alpha\beta + C\alpha] - \\ 2C\alpha y[\beta + A\alpha) - C^2\alpha^2 = 0. \end{array} \right.$$

$$(2)\quad \begin{array}{c} x^2(\beta^2 - \lambda^2) + 2\beta\alpha y(\lambda - \alpha) + \alpha y^2(\alpha - 2\lambda) + 2\lambda x(\alpha\lambda - \beta^2) + \\ 2\alpha\beta\lambda y - \alpha^2\lambda^2 = 0. \end{array}$$

Identifions (1) et (2), il vient

$$(3)\quad \frac{\alpha\lambda - \beta^2}{B^2 + A\alpha\beta + C\alpha} = \frac{-\beta}{\beta + A\alpha} = \frac{\lambda}{C}.$$

On aura l'équation du lieu demandé en éliminant λ outre les deux relations (3). On trouve

$$[1 + A^2 - B]\beta^2 + 2A\alpha\beta + A^2\alpha^2 + 2AC\beta = 0.$$

L'équation précédente nous montre que si la courbe (E) est une ellipse, le lieu de P est une hyperbole qui coupe orthogonalement cette ellipse en A.

Si la courbe donnés est une hyperbole, le lieu de P est une ellipse coupant l'hyperbole (orthogonalement) en A.

Si la courbe donnée est une parabole, le lieu (P) est une parabole.

La courbe (E) et le lieu (P) ont même centre, et leurs axes de symétrie ont mêmes directions; de plus, comme on l'a dit plus haut, elles sont orthogonales; il en résulte que (E) et (P) sont aussi confocales.

Seconde solution. Soit

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \lambda(1+\cos\varphi) = 0$$

l'équation d'une tangente quelconque au cercle variable. Exprimons que cette tangente touche aussi (E). L'équation aux abscisses est

$$x^2[B\sin^2\varphi - 2A\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi] + 2x[A\lambda\sin\varphi(1+\cos\varphi) - \lambda\cos\varphi(1+\cos\varphi) + C\sin^2\varphi] + \lambda^2(1+\cos\varphi)^2 = 0.$$

La tangente au cercle touche aussi (E) si le discriminant de l'équation précédente est nul, c'est-à-dire si l'on a

$$(4)\quad \lambda^2(1+\cos\varphi)(A^2-B) + 2C\lambda[A\sin\varphi - \cos\varphi] + C^2(1-\cos\varphi) = 0.$$

Identifions par rapport à φ cette équation avec celle de la tangente au cercle; on trouve ainsi

$$\frac{\lambda^2(A^2-B) - 2C\lambda - C^2}{x-\lambda} = \frac{2AC\lambda}{y} = \frac{\lambda^2(A^2-B) + C^2}{-\lambda}.$$

Si l'on élimine λ, au moyen des deux dernières équations, on obtient l'équation suivante :

$$y^2[1+A^2-B] + 2Axy + A^2x^2 + 2ACy = 0.$$

On trouve comme précédemment que le lieu de P est une conique.

Remarques. I. Si I est le centre du cercle mobile, la droite PI enveloppe une conique (lieu de P).

Soient B, B′ les points de contact des tangentes à l'ellipse (E), menées par P; F, F′ les foyers de (E). On a

$$B'PF' = FPB, \quad B'PI = IPB,$$

d'où

$$F'PI = IPF.$$

Comme P décrit une hyperbole ayant F, F′ pour foyers, on en conclut que PI est la tangente en P à l'hyperbole, lieu de P.

II. Cherchons le lieu des points de contact des tangentes communes, à (E) et au L cercle mobile, avec le cercle.

Prenons AI pour axe polaire et plaçons le pôle en A; et soient ρ, ω les coordonnées de l'un des points du lieu. On a

$$\lambda = \frac{\rho}{2\cos\omega}, \quad \varphi = 2\omega.$$

Pour avoir l'équation du lieu, il suffira de remplacer λ, φ par leurs valeurs dans la relation (4). On parvient ainsi à l'équation suivante :

$$(A^2 - B)\rho^2 + \frac{2C\rho}{\cos\omega}[A\sin 2\omega - \cos 2\omega] + 4C^2\sin^2\omega = 0.$$

Dans le cas particulier où (E) est un cercle, le lieu est une cissoïde (théorème connu).

III. Soit C le point de contact de la tangente commune à (E) et à un cercle mobile, avec le cercle. Proposons nous de trouver l'équation de l'enveloppe du rayon CI.

Si l'on considère, λ, φ comme étant les coordonnées de la droite CI, l'équation (4) est, en coordonnées axiales, l'équation de l'enveloppe de CI.

IV. Si l'on remplace les cercles mobiles par une série de coniques homothétiques (T) tangentes à (E) en A, le lieu du point de rencontre des tangentes communes à (E) et à (T) est une conique.

Ce théorème, plus général que la question proposée, se démontre aisément par projection.

M. Gob, professeur à Hasselt, nous a adressé de la même question une solution analytique, peu différente de la seconde solution de M. Déprez, et une solution géométrique.

La même question a été proposée au Concours général de France, en 1844. Les N. A. M. en ont publié des solutions dues à M. A. Serret, à MM. Mentre et Neuberg (1863, p. 481) et à M. P. Serret (1864, p. 49). Dans la dernière, on remplace le cercle variable par une conique variable, qui reste homothétique à elle-même et rencontre une conique fixe aux extrémités d'une corde de direction donnée.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1013 et 1236 (*).

(Voir *Mathesis*, (2), V, p. 80 et (2), IX, p. 152).

On donne, dans un même plan, une ellipse (O) *et un cercle* (C); *soient* P *un point quelconque de l'ellipse*, F *l'un des foyers, et* M, N *les points où la circonférence décrite de* P *comme centre avec* PF *comme rayon coupe la circonférence* (C). *Démontrer que :* 1° *Les centres de similitude* S, S' *des cercles* (C) *et* (P) *décrivent des coniques;* 2° *le centre du cercle* OMN *décrit une conique;* 3° *l'axe radical des cercles* (C) *et* (P) *enveloppe une conique;* 4° *les polaires de* S *et* S' *par rapport au cercle* (P) *enveloppent des coniques;* 5° *l'enveloppe du cercle* OMN *est une podaire de conique.*

(Déprez).

Solution par M. R. Buysens. L'enveloppe du cercle (P) étant le cercle directeur (F'), il s'agit en réalité des propriétés du système des cercles tangents à un cercle fixe (F') et passant par un point fixe F. Nous généraliserons la question en étudiant le système des cercles tangents à deux circonférences fixes (F) et (F'); les théorèmes suivants seront invoqués fréquemment :

I. Les axes radicaux de trois cercles pris deux à deux se coupent en un même point.

II. Les centres de similitude directe de trois cercles pris deux à deux sont en ligne droite; il en est de même si l'on prend deux centres de similitude inverse et un de similitude directe.

Ayant supposé, pour fixer les idées, (F) intérieur à (F'), menons d'un point I de l'axe radical Δ des deux cercles les couples de tangentes IA, IB (a, b) et IA', IB' (a', b') respectivement à (F) et (F'). Les circonférences (P) et (π) du système qui touchent (F), (F') en A, A' ou B, B' seront supposées tangentes extérieurement à (F), de sorte que les droites AA' et BB' passent par le centre de similitude inverse D' de (F) et (F'); les circonférences (P') ou (π') qui touchent (F), (F') en A', B et A, B' seront alors tangentes intérieurement à (F) et les droites A'B, AB' passent par le centre de similitude directe D de (F) et (F') (II); nos raisonnements s'appliquent à la série des cercles (P) ou (π).

(*) La question 1236 (Stuyvaert) ne diffère pas du n° 3 de la question 1013.

On remarque d'abord que FP + F'P vaut la somme des rayons de (F) et (F'); le centre P décrit donc une ellipse.

Soit (P_1) un deuxième cercle de la série (P); les éléments qui s'y rapportent seront représentés par des lettres affectées d'indices. Comme (F) et (F') se correspondent dans une homologie (D', Δ), les droites AA_1, $A'A'_1$ se coupent sur Δ au centre de similitude directe de (P) et (P_1) (II); et les points D', aa_1, $a'a'_1$ sont sur une droite qui est l'axe radical de (P) et (P_1). Par conséquent :

Les centres de similitude directe des cercles (P) *pris deux à deux décrivent l'axe radical de* (F) *et* (F'); *les axes radicaux des cercles* (P) *pris deux à deux passent par le centre de similitude inverse des cercles* (F) *et* (F').

Prenons les axes radicaux r, d, d' respectivement de (P) et (C), (C) et (F), (C) et (F'); les droites a, r, d d'une part, a', r, d' d'autre part sont concourantes; de plus le point rr_1 se trouve avec aa_1 et $a'a'_1$ sur l'axe radical de (P) et (P_1) (I). Par suite, la droite r enveloppe une conique correspondant à (F) dans une homologie (D', d) et à (F') dans une homologie (D', d').

Soient E, G les centres de similitude directe des cercles (C) et (F), (C) et (F'); E', G', les centres de similitude inverse. Les ternes de points E'AS, EAS', GA'S, G'A'S' sont en ligne droite; d'ailleurs les droites AA_1, $A'A'_1$, SS_1, $S'S'_1$ concourent sur Δ (II). Par suite les points S, S' décrivent des coniques correspondant à F dans des homologies (E', Δ), (E, Δ), à (F') dans des homologies (G, Δ), (G', Δ).

Prenons les polaires s et σ du point S respectivement par rapport aux cercles (P) et (C). On sait que σ enveloppe une conique : elle est homothétique à l'enveloppe de r. En effet, les ponctuelles et les faisceaux du second ordre (A), (a), (r), (S), (σ) sont projectifs entre eux d'après ce qui précède; or, si l'on suppose les centres C, P, P_1 en ligne droite, r, σ, r_1, σ_1 sont parallèles et le point rr_1 se confond avec son correspondant $\sigma\sigma_1$: tout point à l'infini étant un point double la projectivité (r, σ) est une similitude. En remarquant que r est équidistant de s et σ on prouvera aisément que l'enveloppe de s est semblable à l'enveloppe de r(*). De même l'enveloppe de la polaire de S' par rapport à (P) est semblable à l'enveloppe de r.

(*) D'une façon générale, désignons par r, σ deux droites correspondantes dans une homologie (H, h). Si s est une droite telle que le rapport anharmonique $(hr\sigma s) =$ constante, elle correspondra à r et σ dans des homologies (H, h). En effet, puisque $(hr_1\sigma_1 s_1) = (hr\sigma s)$ les points rr_1, $\sigma\sigma_1$, ss_1 sont alignés sur H.

Par un point fixe quelconque Ω, menons le cercle ΩMN, c'est-à-dire le cercle appartenant au faisceau déterminé par (C) et l'axe radical r; son centre décrira une conique. D'une façon générale, considérons dans un même plan une conique (C), un point fixe Ω, une droite fixe γ coupant la conique (C) en deux points réels ou imaginaires conjugués ΓΓ'; supposons qu'une droite r se meuve dans le plan et coupe (C) en un couple de points MN; prenons le pôle Q de γ par rapport à la conique variable ΩΓΓ'MN : les systèmes plans (r) et (Q) sont réciproques. En effet, si r décrit un faisceau du premier ordre, la conique variable décrit un faisceau de coniques projectif au premier, et le pôle Q une ponctuelle projective au faisceau de coniques et par suite au faisceau (r). Il résulte de là que si r enveloppe une conique, Q décrira une conique.

Le cercle ΩMN enveloppe une podaire de conique. En général, si un cercle a un point fixe Ω et que son centre Q parcoure une courbe (K), ce cercle enveloppera la podaire de la courbe (K_1) semblable à (K), lieu de l'extrémité R du diamètre ΩQ. Car si on considère deux positions (Q), (Q_1) du cercle mobile, leur second point d'intersection est la projection de Ω sur RR_1 ; le point caractéristique sera donc la projection de Ω sur la tangente en R à (K_1).

MM. Barisien, Droz-Farny et Emmerich ont également résolu la question 1226.

Question 1084.

(Voir *Mathesis*, (2), VI, p. 215).

Soient M *et* N *les pôles tangentiel et normal de la corde* PQ *d'une ellipse donnée. On sait que le lieu des points* M *tels que le centre de gravité du triangle* MPQ *soit sur l'ellipse, est une autre ellipse.*

Montrer en outre que, si on désigne par E *et* D *les aires de l'ellipse donnée et de sa développée;*

1° *La courbe lieu du point* N *a pour aire* 2D ;

2° *La courbe lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* MPQ *a pour aire* $E + \frac{D}{2}$;

3° *La courbe lieu de l'orthocentre du triangle* MPQ *a pour aire* $E + 2D$;

4° *Le lieu de l'orthocentre du triangle* NPQ *est l'ellipse donnée.*

(E. N. Barisien.)

Solution par M. A. Droz Farny. Soient $(\alpha + \beta)$ et $(\alpha - \beta)$ les angles excentriques des points P et Q de l'ellipse. La corde PQ ayant pour équation

$$bx \cos\alpha + ay \sin\alpha = ab \cos\beta,$$

les coordonnées de son pôle M seront

$$x = \frac{a\cos\alpha}{\cos\beta}, \quad y = \frac{b\sin\alpha}{\cos\beta},$$

et celles du milieu de PQ,

$$x = a\cos\alpha\cos\beta, \quad y = b\sin\alpha\cos\beta;$$

par conséquent, celles du centre de gravité G du triangle MPQ seront

$$x = \frac{a}{3}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}[1 + 2\cos^2\beta], \quad y = \frac{b}{3}\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}[1 + 2\cos^2\beta].$$

En exprimant que ce point est sur l'ellipse donnée, on trouve $\cos\beta = \frac{1}{2}$, par conséquent:

Coordonnées de M: $x = 2a\cos\alpha, \quad y = 2b\sin\alpha;$

Coordonnées du milieu de PQ: $x = \frac{a}{2}\cos\alpha, \quad y = \frac{b}{2}\sin\alpha;$

Centre G de gravité de MPQ, $x = a\cos\alpha, \quad y = b\sin\alpha.$

On déduit de ces formules que le lieu de M est l'ellipse :

$$\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1.$$

On trouve facilement, pour le pôle normal,

$$x = \frac{c^2\cos\alpha[1 - 4\sin^2\alpha]}{2a} = \frac{c^2}{2a}\cos 3\alpha,$$

$$y = \frac{c^2\sin\alpha[4\cos^2\alpha - 1]}{2b} = \frac{c^2}{2b}\sin 3\alpha.$$

Le centre du cercle circonscrit au triangle MNP étant le milieu O de MN, ses coordonnées sont

$$x = \frac{4a^2\cos\alpha + c^2\cos\alpha[1 - 4\sin^2\alpha]}{4a} = a\cos\alpha + \frac{c^2}{4a}\cos 3\alpha,$$

$$y = \frac{4b^2\sin\alpha + c^2\sin\alpha[4\cos^2\alpha - 1]}{4b} = b\sin\alpha + \frac{c^2}{4b}\sin 3\alpha.$$

Pour calculer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle, on utilisera la propriété que O, G, H sont sur la droite d'Euler de ce triangle et que GH = 2 OG ; on a donc

$$x = \frac{2a^2 \cos\alpha + c^2 \cos\alpha\,[4\sin^2\alpha - 1]}{2a} = a\cos\alpha + \frac{c^2}{2a}\cos 3\alpha,$$

$$y = \frac{2b^2 \sin\alpha + c^2 \sin\alpha\,[1 - 4\cos^2\alpha]}{2b} = b\sin\alpha + \frac{c^2}{2b}\sin 3\alpha.$$

On trouvera de même, pour le centre de gravité G′ du triangle NPQ,

$$x = \frac{2a^2 \cos\alpha + c^2 \cos\alpha\,[1 - 4\sin^2\alpha]}{6a} = \frac{1}{3}a\cos\alpha + \frac{c^2}{6a}\cos 3\alpha,$$

$$y = \frac{2b^2 \sin\alpha + c^2 \sin\alpha\,[4\cos^2\alpha - 1]}{6b} = \frac{1}{3}b\sin\alpha + \frac{c^2}{6b}\sin 3\alpha,$$

et de là, comme le centre du cercle circonscrit est le même, on a par le même procédé pour l'orthocentre H′ de ce triangle :

$$x = -a\cos\alpha, \quad y = -b\sin\alpha.$$

Conséquences. 1. Le milieu de PQ décrit l'ellipse $\frac{4x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{b^2} = 1$.

La droite PQ enveloppe la même ellipse.

2. L'orthocentre H′ de NPQ est, sur l'ellipse donnée, le point diamétralement opposé au centre de gravité G du triangle MPQ.

Pour calculer les aires des lieux décrits par les points N, O et H, on se servira de la formule $dV = \frac{1}{2}[x\,dy - y\,dx]$, qui donne sans difficulté :

$$\text{lieu de N :} \quad V = \frac{3\pi c^4}{4ab} = 2D ;$$

$$\text{lieu de O :} \quad V = \pi ab + \frac{3\pi c^4}{16ab} = E + \frac{D}{2} ;$$

$$\text{lieu de H :} \quad V = \pi ab + \frac{3\pi c^4}{4ab} = E + 2D.$$

M. Cristesco a résolu la même question par des calculs fort élégants. Nous extrayons de sa solution les remarques suivantes :

1° Si l'on projette l'ellipse suivant une circonférence, la projection de la corde PQ soutendra un arc de 120°; de là on déduit facilement l'enveloppe de PQ et le lieu de M.

2° La corde PQ est le côté d'un triangle PQR d'aire maximum, inscrit dans l'ellipse; les tangentes MP, MQ sont parallèles aux côtés RQ, RP ; N est l'orthocentre du triangle PQR, R celui du triangle NPQ.

Question 1088.

(Voir *Mathesis* (2), VI, p. 216).

En un point M *quelconque d'une ellipse de centre* O, *on mène la corde* MN *perpendiculaire à* MO *et la corde* MN′ *supplémentaire de la corde* MN.

1° *Le lieu du pôle* P *de la corde* MN *est une quartique dont l'aire est équivalente à celle de la podaire du centre de l'ellipse;*

2° *La droite* MN′ *est normale à une ellipse fixe.* (E. N. Barisien.)

Solution par MM. Cristesco et Droz-Farny. 1° Soient $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ les coordonnées de M. L'équation de MN sera :

$$ax\cos\varphi + by\sin\varphi = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi. \tag{1}$$

Si on l'identifie avec l'équation de la polaire du point $P(\alpha,\beta)$, on trouve

$$\alpha = \frac{a^3\cos\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}, \qquad \beta = \frac{b^3\sin\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}, \tag{2}$$

d'où

$$\frac{\alpha^2}{a^4} + \frac{\beta^2}{b^4} = \frac{1}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin 2\varphi}, \tag{3}$$

et, par suite, les égalités (2) deviennent

$$\frac{b^2\alpha}{a\cos\varphi} = \frac{a^2\beta}{b\sin\varphi} = a^2b^2\left(\frac{\alpha^2}{a^4} + \frac{\beta^2}{b^4}\right). \tag{4}$$

L'élimination de $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ se fait très facilement entre les équations (4) et l'égalité $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, et l'on trouve que le lieu du pôle de P est la courbe

$$(b^4\alpha^2 + a^4\beta^2)^2 - a^2b^2(b^6\alpha^2 + a^6\beta^2) = 0.$$

En coordonnées polaires, on a

$$\rho^2 = a^2b^2\frac{a^6\sin^2\theta + b^6\cos^2\theta}{(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)^2}.$$

L'aire de cette courbe sera

$$A = 2a^2b^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^6\sin^2\theta + b^6\cos^2\theta}{(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)^2}\,d\theta.$$

Si l'on pose $a^2\,\mathrm{tg}\,\theta = b^2\,\mathrm{tg}\,\omega$, on trouve

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega)\,d\omega = \tfrac{1}{2}\pi\,(a^2 + b^2),$$

ce qui est aussi l'aire de la podaire centrale de l'ellipse.

2° Les deux cordes supplémentaires MN, MN′ étant parallèles à deux diamètres conjugués, leurs coefficients angulaires m, m' vérifient la relation $mm' = -\dfrac{b^2}{a^2}$; MN étant perpendiculaire à MO, on a $m = -\dfrac{a}{b}\cot g\,\varphi$; donc $m' = \dfrac{b^3}{a^3}\mathrm{tang}\,\varphi$.

L'équation de la corde MN′ sera donc

$$\frac{b^2x}{a\cos\varphi} - \frac{a^2y}{b\sin\varphi} + (a^2 - b^2) = 0; \qquad (5)$$

on voit que la corde MN′ est normale à une ellipse dont les demi-axes sont(*) :

$$a' = \frac{ab^4}{a^4 + a^2b^2 + b^4}, \qquad b' = \frac{a^4b}{a^4 + a^2b^2 + b^4}.$$

Question 1087.

(Voir *Mathesis* 21, VI, p. 216).

On considère deux coniques K, K′ *dont les axes sont dirigés suivant les mêmes droites* Ox, Oy. *D'un point quelconque* M *de* K, *on mène les tangentes* MN, MP *à* K′. *Lieu du centre du cercle des neuf points du triangle* MNP. *Démontrer que pour certaines relations entre les axes de* K *et* K′, *ce lieu coïncide avec l'axe* Ox. (E. N. Barisien.)

(*) Voir *Mathesis* (2), V, pag. 8 et 9.

Solution par M. J. Déprez. Les coordonnées de M étant α, β, et les demi-axes de la conique (ellipse) K′ étant a, b, on trouve pour expressions des coordonnées de l'orthocentre H et du centre O′ du cercle MNP :

$$\text{H}\begin{cases} x = \dfrac{\alpha[b^2(a^2+b^2)+c^2\beta^2]}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2}, \\ y = \dfrac{\beta[a^2(a^2+b^2)-c^2\alpha^2]}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2}; \end{cases} \qquad \text{O}'\begin{cases} x = \dfrac{\alpha b^2[\alpha^2+\beta^2+c^2]}{2[a^2\beta^2+b^2\alpha^2]}, \\ y = \dfrac{\beta a^2[\alpha^2+\beta^2-c^2]}{2[a^2\beta^2+b^2\alpha^2]}. \end{cases}$$

D'où l'on déduit pour les coordonnées du centre O_9 du cercle des neuf points de MNP :

$$x = \frac{\alpha[\beta^2(2a^2-b^2)+b^2\alpha^2+b^2(b^2+3a^2)]}{4(a^2\beta^2+b^2\alpha^2)}$$

$$y = \frac{\beta[a^2\beta^2+\alpha^2(2b^2-a^2)+a^2(a^2+3b^2)]}{4(a^2\beta^2+b^2\alpha^2)}.$$

Eliminant α, β entre les deux équations précédentes et l'équation de condition : $a'^2\beta^2+b'^2\alpha^2-a'^2b'^2=0$, on aura l'équation du lieu de O_9.

Si le lieu de O_9 doit coïncider avec l'axe des x, on a :

$$\alpha^2(a^2-2b^2)-a^2\beta^2-a^2(a^2+3b^2)=0; \qquad (1)$$

pour que le lieu de M soit réel, il faut que l'on ait $a > b\sqrt{2}$.

Supposons que la conique K ou (M) soit une hyperbole ayant pour équation :

$$b'^2\alpha^2-a'^2\beta^2-a'^2b'^2=0. \qquad (2)$$

Identifiant (1) et (2) on trouve entre les axes de K, K′ les relations suivantes :

$$b'^2=a^2+3b^2, \quad a'^2=\frac{a^2(a^2+3b^2)}{a^2-2b^2}.$$

×Question 1178.

(Voir *Mathesis* (2), VIII, p. 176).

Mettre l'expression

$$\text{P}=\frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_n)}{\sin(x-b_1)\sin(x-b_2)\ldots\sin(x-b_n)} \qquad (1)$$

sous la forme

$$\text{M}+\text{M}_1\cot(x-b_1)+\text{M}_2\cot(x-b_2)+\ldots+\text{M}_n\cot(x-b_n), \qquad (2)$$

les coefficients M, M_1, ... *ayant des valeurs indépendantes de* x.

Si l'on pose $\cot x = X$, $\cot a_i = A_i$, $\cot b_i = B_i$, on a

$$P = \frac{\sin a_1 \sin a_2 \dots \sin a_n}{\sin b_1 \sin b_2 \dots \sin b_n} \frac{(X - A_1) \dots (X - A_n)}{(X - B_1) \dots (X - B_n)}.$$

Nous supposons les quantités $A_1, B_1 \dots$ différentes; alors nous pourrons écrire

$$P = L + \frac{L_1}{X - B_1} + \frac{L_2}{X - B_2} + \dots + \frac{L_n}{X - B_n}, \qquad (3)$$

où L, $L_1 \dots$ désignent des nombres indépendants de X. Or

$$\frac{1}{X - B_i} = -\frac{\sin x \sin b_i}{\sin (x - b_i)} = -\frac{\sin (x - b_i + b_i)}{\sin (x - b_i)} \sin b_i$$

$$= -\cos b_i \sin b_i - \sin^2 b_i \cot (x - b_i).$$

D'après cela, le second membre de (3) se ramène à la forme (2). Pour déterminer les coefficients M, $M_1, \dots$, nous égalons l'expression (1) à la somme (2), nous chassons les dénominateurs $\sin (x - b_1), \dots, \sin (x - b_n)$, puis dans l'identité résultante nous remplaçons x successivement par $b_1, b_2, \dots, b_n$. Pour $x = b_i$ on obtient

$$M_i = \frac{\sin (b_i - a_1) \sin (b_i - a_2) \dots \sin (b_i - a_n)}{\sin (b_i - b_1) \sin (b_i - b_2) \dots \sin (b_i - b_{i-1}) \sin (b_i - b_{i+1}) \dots \sin (b_i - b_n)}.$$

Pour $x = 0$, la même identité donne

$$M = \frac{\sin a_1 \sin a_2 \dots \sin a_n}{\sin b_1 \sin b_2 \dots \sin b_n} + \Sigma M_i \cot b_i.$$

Si le dénominateur de P renfermait le facteur $\sin^i (x - a_1)$, l'expression (2) devrait être remplacée par

$$M + M_1 \cot^i (x - a_1) + M_2 \cot^{i-1} (x - a_1) + \dots + M_i \cot (x - a_1) + N_2 \cot (x - a_2) + \dots \qquad \text{(J. N.)}$$

D'autres solutions, moins explicites, nous ont été adressées par MM. Barisien, Emmerich et Buysens.

×Question 1223.

(Voir *Mathesis*, (2), IX, p. 152).

Eliminer x, y, z entre les équations

$$(x - y)(x - z) = a(x - y - z)^2,$$
$$(y - z)(y - x) = b(y - z - x)^2,$$
$$(z - x)(z - y) = c(z - x - y)^2. \qquad \text{(Emmerich.)}$$

Solution par M. Goldenberg. Posons

$$(x-y)(y-z)(z-x)=p;$$

la première équation devient

$$pa^{-1}=(x-y-z)^2(z-y),$$

d'où

$$\begin{aligned} p(a^{-1}-1) &= (z-y)[(x-y-z)^2-(x-y)(x-z)] \\ &= (z-y)(z^2+y^2+zy)-(z^2-y^2)x, \\ &= z^3-y^3+xy^2-xz^2, \end{aligned}$$

Transformant de même les deux autres équations, faisant la somme et observant que

$$xy^2-yx^2+yz^2-y^2z+zx^2-xz^2=p,$$

on trouve la relation cherchée :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4.$$

Solution par M. Déprez. Retranchons de la première équation divisée par a, la seconde divisée par b et écartons le facteur $x-y$ qui est commun aux deux membres du résultat; il vient

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=z\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-4\right),$$

ou

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=z\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-4\right).$$

Par analogie

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-4\right)=y\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-4\right).$$

Donc, si l'on écarte la *solution zéro*, la résultante cherchée est

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-4=0.$$

On voit en même temps que les valeurs de x, y, z vérifient l'équation

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0.$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

910. Si un nombre abc est divisible par 27, il en est de même du nombre bca.

On a : $abc0 = m.27$, $1000a + bc0 = m.27$, $999a + bca = m.27$; or $999 = m.27$.

Plus généralement, si le nombre de n chiffres, $abc...l$, est divisible par un diviseur de $10^n - 1$, ce diviseur divise aussi le nombre $bc...la$.

(*Journal de Vuibert.*)

911. Résoudre l'équation

$$x^7 + a^7 + b^7 = (x + a + b)^7.$$

En posant $x = \xi - \alpha$, $a = \alpha - \beta$, $b = \alpha + \beta$, on trouve

$$(\xi^2 - \beta^2)[\xi^4 + (5\alpha^2 + \beta^2)\xi^2 + 3\alpha^4 + 5\alpha^2\beta^2 + \beta^4] = 0.$$

(EMMERICH.)

912. Résoudre l'équation

$$(1 - x^3)^3 - (1 - x^2)^3 = 0.$$

L'équation se ramène à

$$x^3(1 - x^2)(x^2 + x + 2)(x^3 + x^2 - 1) = 0.$$

(EMMERICH.)

913. Résoudre le système

$$x + y^2 = y + x^2 = a + a^2.$$

Les deux premières équations donnent

$$(x - y)(x + y - 1) = 0; \quad \text{d'où} \quad 1^\circ\ x = y = a; \quad 2^\circ\ x + y = 1,$$
$$x + (1 - x)^2 - a - a^2 = 0....$$

(EMMERICH.)

914. De chaque sommet d'un hexagone régulier comme centre, on décrit vers l'intérieur, un arc de cercle passant par les milieux des côtés adjacents. Trouver l'aire comprise entre les six arcs de cercle ainsi obtenus.

Réponse : $\frac{a^2}{2}(3\sqrt{3} - \pi)$.

915. De chaque sommet d'un carré comme centre, on décrit une circonférence passant par le centre du carré. Les espaces communs à deux cercles consécutifs forment une rosace à quatre folioles, dont on demande l'aire.

L'aire de la rosace $= a^2(\pi - 2)$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

***1234.** Si $x^2 + y^2 = z^2$, x, y, z étant entiers, les expressions

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1}, \quad z^{2n} - x^{2n} - y^{2n}$$

sont divisibles par $x + y + z$. (GRAEBER.)

Cette question remplace la question 1234, p. 215, indentique à 1214, p. 80.

***1243.** Soient A_1, B_1, C_1 les centres des trois carrés inscrits au triangle ABC.

1° Les droites AA_1, BB_1, CC_1 concourent en un même point. 2° Les couples (AB_1, AC_1), (BA_1, BC_1), (CA_1, CB_1) sont isogonaux par rapport aux angles A, B, C. 3° Trouver le rapport des aires des triangles $A_1B_1C_1$, ABC. 4° Connaissant les points B, C, A_1 ou B, A, A_1, trouver le troisième sommet du triangle ABC.

Le n° 2 est emprunté à la question 14324 (W. S. CORNEY) de l'*Ed. Times* (sept. 1899). (J. N.)

1244. A et B sont deux points fixes, que l'on joint à un point quelconque M. Sur la droite MA, on prend une longueur $MM' = \frac{\overline{MB}^2}{MA}$. Étudier la transformation (M, M'). (J. NEUBERG.)

1245. Soient PP', QQ' deux cordes rectangulaires d'une parabole, passant par son foyer F, et qui rencontrent la directrice respectivement en A et B. Soient : N le point de rencontre des normales en P et P' et N' le point de rencontre des normales en Q et Q' ; δ et δ', les distances de N à PP' et QQ', et δ' et δ'_1 les distances de N' à PP' et QQ'. On a les relations

$$\delta\delta' = \overline{FA}^2, \quad \delta_1\delta'_1 = \overline{FB}^2$$

(E. N. BARISIEN.)

1246. Soient a_0, a_1, a_2,.... des nombres tels que $\lim_{n=\infty} (n!a_n) = \infty$; et $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ des nombres qui tendent vers une limite α. Démontrer que

$$\lim_{x=\infty} e^{-x} \frac{a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 x + a_2\alpha_2 x^2 + \cdots}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots} = \alpha. \qquad (1)$$

Lorsque la limite α n'existe pas, il peut se faire que le premier membre de (1) existe. Peut-on, alors, affirmer que sa valeur est toujours la même, quels que soient les nombres a_0, a_1, a_2, etc. ? (E. CESÀRO.)

SUR LA SOMME DES ANGLES DANS UN TRIANGLE(*);

(Extrait d'une lettre de M. De Tilly).

1. Lemme. *Lorsque l'aire d'un triangle tend d'une manière quelconque vers zéro, la somme de ses angles tend vers deux droits.*

2. Théorème I. *Si deux triangles sont équivalents ou ont des aires égales, ils ont même somme d'angles.*

1. Supposons d'abord que ces triangles ABC, AB'C' aient un angle égal A que l'on peut supposer commun, leurs côtés BC, B'C' se coupant en O. Les triangles BOB', COC', seront encore équivalents et la différence entre leurs sommes d'angles sera égale à la différence entre les sommes d'angles des triangles donnés. Ils ont d'ailleurs, comme ces derniers, un angle égal. Continuant ainsi, on arrivera à des triangles dont l'aire tendra vers zéro; par conséquent, leurs sommes d'angles tendront vers deux droits, et la différence de leurs sommes d'angles tendra vers zéro. Elle était donc primitivement zéro dans les triangles donnés.

2. Supposons maintenant deux triangles ABC, ABC' ayant un côté égal AB, que l'on peut supposer commun, de manière que les côtés AC', BC se coupent en O. Les triangles AOC, BOC', sont encore équivalents; ils ont même différence d'angles que les triangles donnés; mais ils ont un angle égal. Donc cette différence d'angles est nulle, d'après le 1°.

3. Enfin deux triangles équivalents quelconques peuvent être comparés à un troisième triangle, équivalent aux deux autres et ayant un angle commun avec l'un des deux et un côté commun avec l'autre. Pour éviter toute difficulté, on choisira un angle adjacent au plus petit des six côtés des triangles et c'est le long de ce plus petit côté que l'on fera tomber le côté qui doit être commun à deux triangles.

3. Définition. L'*excès angulaire* d'un triangle est l'excès (positif, nul ou négatif) de la somme de ses angles sur deux droits.

4. Théorème II. *L'excès angulaire d'un triangle est proportionnel à son aire.*

Supposons que les aires de deux triangles soient commensurables entre-elles (on sait que ce cas suffit) et proportionnelles aux nombres

(*) Voir *Mathesis*, (2), VIII, 217-218, IX, 5-9, deux articles de M. De Tilly, que la présente esquisse complète et simplifie.

entiers m et n. Soit S la somme des angles du premier, S′ la somme des angles du second exprimée en angles droits. Divisons le premier en m triangles équivalents, par $m - 1$ droites issues de l'un des sommets. Si α représente la somme des angles d'un des petits triangles (voir Th. I), on aura :

$$S = m\alpha - (m - 1)\,2, \quad \text{ou} \quad S - 2 = m(\alpha - 2).$$

De même, dans le second triangle,

$$S' - 2 = n(\alpha - 2).$$

Donc

$$\frac{S - 2}{S' - 2} = \frac{m}{n}.$$ c. q. f. d.

Corollaires. I. $\frac{m}{n}$ étant positif et fini, $S - 2$ et $S' - 2$ sont de même signe, ou simultanément nuls, c'est-à-dire qu'il n'existe qu'une seule espèce de triangles, l'excès angulaire étant, ou toujours positif, ou toujours négatif, ou toujours nul, ce qui implique comme cas particulier le théorème de Legendre.

II. Si deux triangles ont une même somme d'angles différente de deux droits, ils sont équivalents (réciproque du théorème I).

×FRACTIONS DÉCIMALES PÉRIODIQUES OBTENUES SANS DIVISION,

par M. Moreau, colonel d'artillerie en retraite.

1. *Fractions plus petites que l'unité et dont le dénominateur se termine par un* 9. Soit $\frac{10\alpha_1 + x_1}{10n - 1}$ une fraction à développer en fraction décimale périodique. On peut obtenir les chiffres de la période, en commençant par le dernier qui est x_1, au moyen de multiplications effectuées sur ces chiffres avec le nombre n pour multiplicateur et dans lesquelles on tient compte des retenues successives, α_1 étant la première de ces retenues. On s'arrête lorsque l'on trouve un produit égal au numérateur de la fraction considérée, c'est-à-dire à $10\alpha_1 + x_1$, et la période se compose des chiffres obtenus pris en ordre inverse.

Le tableau suivant donne le détail du calcul

$$\begin{aligned}
&\qquad\qquad 10\alpha_1 + x_1,\\
nx_1 + \alpha_1 &= 10\alpha_2 + x_2,\\
nx_2 + \alpha_2 &= 10\alpha_3 + x_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
nx_{s-2} + \alpha_{s-2} &= 10\alpha_{s-1} + x_{s-1},\\
nx_{s-1} + \alpha_{s-1} &= 10\alpha_s + x_s,\\
nx_s + \alpha_s &= 10\alpha_1 + x_1.
\end{aligned}$$

L'opération est finie, la période est $x_s x_{s-1} x_{s-2} \dots x_3 x_2 x_1$ et l'on a

$$\frac{10\alpha_1 + x_1}{10n - 1} = 0, x_s x_{s-1} \dots x_3 x_2 x_1 x_s x_{s-1} \dots$$

Pour le démontrer, il suffit de faire le produit du nombre

$$x_s 10^{s-1} + x_{s-1} 10^{s-2} + \dots + x_3 10^2 + x_2 10 + x_1$$

par $10n - 1$ et d'avoir égard aux égalités écrites ci-dessus; on voit alors que ce produit se réduit à $(10\alpha_1 + x_1)(10^s - 1)$, et il en résulte

$$\frac{10\alpha_1 + x_1}{10n - 1} = \frac{x_s 10^{s-1} + x_{s-1} 10^{s-2} + \dots + x_3 10^2 + x_2 10 + x_1}{10^s - 1}.$$

Exemple. Soit à développer la fraction $\frac{23}{39}$; le multiplicateur constant n est égal à 4 et l'on a

$$\begin{aligned}
&\qquad 10.2 + 3,\\
4.3 + 2 &= 10.1 + 4,\\
4.4 + 1 &= 10.1 + 7,\\
4.7 + 1 &= 10.2 + 9,\\
4.9 + 2 &= 10.3 + 8,\\
4.8 + 3 &= 10.3 + 5,\\
4.5 + 3 &= 10.2 + 3.
\end{aligned}$$

On trouve ainsi

$$\frac{23}{39} = 0,589743\,589 \dots$$

2. *Fractions plus grandes que l'unité et dont le dénominateur se termine par un* 9. On procède comme il vient d'être expliqué et l'opéra-

tion se termine lorsqu'on retrouve un produit déjà obtenu, ainsi que le montre le tableau suivant :

$$\begin{aligned}
&&&&10\alpha_1 &+ x_1,\\
nx_1 &+ \alpha_1 &&= 10\alpha_2 &+ x_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
nx_{k-1} &+ \alpha_{k-1} &&= 10\alpha_k &+ x_k,\\
nx_k &+ \alpha_k &&= 10\alpha_{k+1} &+ x_{k+1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
nx_{a-2} &+ \alpha_{a-2} &&= 10\alpha_{a-1} &+ x_{a-1},\\
nx_{a-1} &+ \alpha_{a-1} &&= 10\alpha_a &+ x_a,\\
nx_a &+ \alpha_a &&= 10\alpha_{a+1} &+ x_{a+1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
nx_{a+k-1} &+ \alpha_{a+k-1} &&= 10\alpha_{a+k} &+ x_{a+k},\\
nx_{a+k} &+ \alpha_{a+k} &&= 10\alpha_{k+1} &+ x_{k+1}.
\end{aligned}$$

Le calcul est fini, la période comprend a chiffres et est

$$x_a x_{a-1} \cdots x_{k+1} x_{a+k} x_{a+k-1} \cdots x_{a+2} x_{a+1}.$$

Quant à la partie entière, elle est égale à la différence

$$x_{a+k} x_{a+k-1} \cdots x_{a+2} x_{a+1} - x_k x_{k-1} \cdots x_2 x_1.$$

La démonstration se fait de la même manière que dans le premier cas, elle est toutefois un peu plus compliquée.

Remarque. Ce qui précède suppose que la partie entière est inférieure au nombre formé par la période; s'il en est autrement, une fois la période déterminée, pour avoir la partie entière on rend le nombre duquel on soustrait $x_k x_{k-1} \cdots x_2 x_1$ suffisamment grand en lui adjoignant un nombre convenable de périodes.

Exemple. Soit à développer la fraction $\frac{506548945}{189}$; le multiplicateur constant est 19 et, on a

$$\begin{aligned}
&&&&10.\,50654894 &+ 5\\
19.5 &+ 50654894 &&= 10.\,5065498 &+ 9\\
19.9 &+ 5065498 &&= 10.\,506566 &+ 9\\
19.9 &+ 506566 &&= 10.\,50673 &+ 7\\
19.7 &+ 50673 &&= 10.\,5080 &+ 6\\
19.6 &+ 5080 &&= 10.\,519 &+ 4\\
19.4 &+ 519 &&= 10.\,59 &+ 5\\
19.5 &+ 59 &&= 10.\,15 &+ 4\\
19.4 &+ 15 &&= 10.\,9 &+ 1\\
19.1 &+ 9 &&= 10.\,2 &+ 8\\
19.8 &+ 2 &&= 10.\,15 &+ 4
\end{aligned}$$

La période a 3 chiffres et est 148; la partie entière est égale à

$$8148148 - 5467995 = 2680153$$

et, on a

$$\frac{506548945}{189} = 2680153{,}148148\ldots$$

8. *Fractions quelconques.* Si le dénominateur se termine par 1, par 3 ou par 7, on multiplie les deux termes de la fraction par un nombre satisfaisant à la seule condition que le nouveau dénominateur se termine par un 9 et l'on traite la nouvelle fraction comme il a été dit.

Si le dénominateur contient le facteur 2 ou le facteur 5, on multiplie les deux termes de la fraction par une puissance convenable de 5 ou de 2, de façon que le nouveau dénominateur se termine par l'un des chiffres 1, 3, 7 ou 9 suivi d'un ou de plusieurs zéros; on laisse de côté les zéros dont on tient compte plus tard par un déplacement de la virgule et on se trouve dans l'un des cas précédents.

Poitiers, 19 septembre 1899.

SUR LES TRIANGLES QUI SONT INSCRITS DANS UNE ELLIPSE ET CIRCONSCRITS A UN CERCLE CONCENTRIQUE;

par M. E. Barisien.

(Suite; voir *Mathesis*, (2), IX, p. 247).

24. La hauteur du triangle ABC issue de A, et la hauteur du triangle A'B'C' issue de A' se rencontrent sur l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{(a+b)^2}.$$

25. Aire de l'enveloppe des droites AD, BD, CD :

$$U = \pi ab + \frac{\pi}{8}(a+b)^2.$$

26. Lieu de la projection de O sur AD :

$$(x^2+y^2)^2 = (ax^2 - by^2)^2; \quad U = \frac{3\pi}{8}(a+b)^2 - \pi ab.$$

27. Lieu du milieu de AD :

$$(b^2x^2 + a^2y^2)^2 (b^4x^2 + a^4y^2) = a^2b^2 (b^2x^2 - a^2y^2)^2.$$

28. Lieu du pôle de AD par rapport à E :

$$(b^5x^2 - a^5y^2)^2 = a^2b^2(b^4x^2 + a^4y^2).$$

29. Lieu du pôle de AD par rapport à Σ :

$$(ax^2 - by^2)^2 = \frac{a^4b^4}{(a+b)^4}(x^2 + y^2).$$

30. Lieu du milieu de AA′ :

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{4(a+b)^2}.$$

31. Lieu du milieu de AA″ :

$$\frac{x^2}{a^2(a+2b)^2} + \frac{y^2}{b^2(b+2a)^2} = \frac{1}{4(a+b)^2}.$$

32. Lieu du centre de gravité du triangle AA′A″ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{9}.$$

33. Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle AA′A″ :

$$4(a-b)^2x^2y^2(x^2+y^2) = [(b^2 - R^2)x^2 + (a^2 - R^2)y^2]^2.$$

34. Les droites AA′, BB′, CC′ sont normales à une ellipse ayant pour demi-axes

$$\frac{ab^2(2a+b)}{(a+b)(a^2+b^2+4ab)}, \quad \frac{a^2b(2b+a)}{(a+b)(a^2+b^2+4ab)}.$$

35. Les droites AA″, BB″, CC″ sont normales à l'ellipse ayant pour demi-axes

$$\frac{ab^5}{(a+b)(a^2+b^2)}, \quad \frac{a^5b}{(a+b)(a^2+b^2)}.$$

36. Lieu du pôle de la droite AA′ par rapport à E.

Kreuzcurve : $$\frac{a^2(2a+b)^2}{x^2} + \frac{b^2(2b+a)^2}{y^2} = (a-b)^2.$$

37. Lieu du pôle de la droite AA′ par rapport à Σ.

Kreuzcurve : $$\frac{(2a+b)^2}{a^2x^2} + \frac{(2b+a)^2}{b^2y^2} = \frac{(a-b)^2}{R^4}.$$

38. Lieu du pôle de la droite AA″ par rapport à E.

Kreuzcurve : $$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{(a-b)^2}{a^2b^2}.$$

39. Lieu du pôle de la droite AA″ par rapport à Σ.

Kreuzcurve : $$\frac{b^4}{x^2}+\frac{a^4}{y^2}=\frac{a^2b^2(a-b)^2}{R^4}.$$

40. La droite qui joint les pôles de la droite AA′ par rapport à E et à Σ enveloppe une ellipse.

41. La droite qui joint les pôles de la droite AA″ par rapport à E et à Σ enveloppe une ellipse.

42. Aire du lieu du point de rencontre des droites AA′, BB′ et CC′ :

$$U=\frac{\pi}{2}\left[AA'\frac{a^2+b^2}{a^5b^5}+\frac{3(AB'+BA'+BB')}{ab(a+b)^2}+\frac{BA'(2a+b)}{a^5(a+b)^2}+\frac{AB'(2b+a)}{b^5(a+b)^2}\right],$$

$$A=-a(a-b)(R-b),\quad B=-\frac{ab^2(a-b)}{R+b},$$

$$A'=b(a-b)(R+a),\quad B'=\frac{a^2b(a-b)}{R+a}.$$

43. Lieu du point de rencontre des droites AA″, BB″, CC″.

Courbe analogue à la précédente ; on change dans l'expression de l'aire, R en — R.

44. Aire du lieu du centre de gravité du triangle ABC :

$$U=\frac{\pi ab}{3}-\frac{4}{3}\pi\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}=\frac{\pi ab}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2.$$

45. Aire du lieu du centre du cercle circonscrit au triangle ABC :

$$U=\frac{3\pi}{4}(a-b)^2.$$

BIBLIOGRAPHIE.

Œuvres scientifiques de L. Lorenz, revues et annotées par H. Valentiner, publiées aux frais de la fondation Carlsberg. Tome second. Premier fascicule. Copenhague, Lehman et Stage, Bianco Lund (F. Dreyer), Imprimeur de la Cour ; 1899 (IV, 135 p., in-8°).

Sommaire. 1. Mémoire sur la théorie de l'élasticité des corps homogènes à élasticité constante. 2. Sur le nombre des molécules contenues dans un milligramme d'eau. 3. Détermination de la chaleur en mesures absolues. 4. La résistance électrique du mercure en mesures absolues. 5. Sur les méthodes à employer pour la détermination de l'ohm. 6. Détermination de la résistance électrique du mercure en mesures électromagnétiques absolues. 7. Sur la propagation de l'électricité. 8. Sur les conductibilités électrique et calorifique des métaux.

Le premier de ces mémoires touche seul d'assez près aux mathématiques pures; il nous donne l'occasion de signaler cette édition française si soignée des œuvres de l'émule danois de Maxwell.

Rekenkunde. Theorie en Practijk ten dienste van normaal- en middelbaar onderwijs door P. BRASSEUR, Leeraar aan de Staatsnormaalschool van Lier. Gent, Ad. Hoste. 1899 (XV, 536 pages, in-8°). Prix : 5 francs.

Ouvrage très complet, au moins au point de vue pratique. L'auteur a dû malheureusement se conformer au programme officiel des écoles normales et placer la théorie des fractions décimales avant celle des fractions ordinaires. Il en résulte un manque de rigueur, dans la théorie de la division des fractions décimales. Il y a aussi des assertions historiques inexactes dans les paragraphes consacrés à la numération chez les Grecs, les Romains, les Hindous, les Arabes.

Sommaire. 1-2. Nombres entiers. Nombres décimaux. 4. Système métrique. 5. Applications. 6. Divisibilité et propriétés des nombres. 7-8. Fractions ordinaires. 9. Fractions périodiques. 10. Rapports et proportions. 11. Applications habituelles de l'arithmétique (intérêt, escompte, etc. avec beaucoup de renseignements sur les caisses d'épargne). 12. Extraction des racines. 13. Progressions. 14. Logarithmes. 15. Intérêts composés et annuités. 16. Assurances sur la vie. rentes.

Arithmetic Theoretical and Practical by J. S. MACKAY, M. A., LL. D., F. R. E. S.. Head Mathematical Master in the Edinburgh Academy. W. and R. Chambers, London and Edinburgh, 1899, (XI-472, in-12°, cartonné). Prix: 4 ½ shillings.

SOMMAIRE. I. *Nombres entiers.* 1. Introduction. 2. Numération. 3-6. Les quatre opérations. 7. Procédés spéciaux. 8-12. Les nombres complexes. 13. Le système métrique. 14. Procédés spéciaux. 15. Nombres premiers. 16. Plus grand commun diviseur. 17. Plus petit multiple commun.

II. *Fractions.* 18-22. Fractions ordinaires. 23. Fractions continues. 24-25. Fractions décimales, limitées ou périodiques. 26. Les quatre règles. 27. Applications. 28. Méthodes abrégées. —Questions d'examen. 29. Méthode des parties aliquotes. 30. Méthode de reduction à l'unité. 31. Applications spéciales (température moyenne).

III. *Proportions et applications.* 32-33. Proportions. 34. Partages proportionnels. 35. Commission, courtage, assurance (percentage). 36. Profit et perte. 37. Intérêt. 38. Escompte. 39. Intérêts composés. 40. Fonds publics, etc..

IV. *Nombres irrationnels.* 41. Carrés, cubes, puissances d'ordre supérieur. 42. Racine carrée, racine cubique, racine d'ordre supérieur. 43. Recherche de l'exposant. 44. Mesure des longueurs, des aires, des volumes.

V. *Questions d'examen.* 1. Civil service commission. 2. École militaire; 3-5. Cambridge, Edimbourg, Oxford; 6-7. Leaving certificate. 8. Education Department (calcul mental).

VI. *Réponses* (aux innombrables exercices répandus dans tout l'ouvrage) (58 pages).

Au point de vue théorique, il y a peu à glaner dans le livre de M. Mackay; mais au point de vue pratique, il n'y a personne qui n'y trouve quelque chose à apprendre pour ainsi dire, dans chaque chapitre, du premier au dernier. Les applications de l'arithmétique revêtent nécessairement une forme originale dans la Grande-Bretagne, parce que ce pays a conservé les anciennes mesures complexes; M. Mackay a de plus donné à son livre l'empreinte originale de son propre esprit.

(P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 1169.

(Voir *Mathesis*, (2), VII, p. 52).

Soient ABC *un triangle sphérique dont les côtés* a, b, c *sont inférieurs à un quadrant;* A′, B′, C′ *des angles inférieurs à deux angles droits et tels que*

$$\cos A' = \frac{\cos A}{\cos a}, \quad \cos B' = \frac{\cos B}{\cos b}, \quad \cos C' = \frac{\cos C}{\cos c}.$$

Démontrer que la somme $A' + B' + C'$ *est aussi inférieure à deux angles droits.*

Solution par M. Emmerich. Les angles A′, B′, C′ seront réels si les angles A, B, C sont inférieurs à un quadrant; car de

$$\cos A = \sin B \sin C \cos a - \cos B \cos C,$$

on conclut, dans ce cas,

$$\cos A < \sin B \sin C \cos a, \quad \cos A < \cos a.$$

On a

$$\cos A' = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos a \sin b \sin c} = \frac{\alpha - \beta\gamma}{\alpha \sin b \sin c};$$

$$(\alpha \sin b \sin c \sin A')^2 = \alpha^2 (1 - \beta^2)(1 - \gamma^2) - (\alpha - \beta\gamma)^2$$

$$= \alpha^2\beta^2\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma - \Sigma\beta^2\gamma^2 = n^2 + 2n - m^2 + 2ln = r^2,$$

$$\sin A' = \frac{r}{\alpha \sin b \sin c},$$

si l'on pose

$$\cos a = \alpha, \quad \cos b = \beta, \quad \cos c = \gamma,$$
$$\Sigma\alpha = l, \quad \Sigma\beta\gamma = m, \quad \alpha\beta\gamma = n.$$

On a de plus

$$\sin(A' + B' + C') =$$
$$\Sigma \sin A' \cos B' \cos C' - \sin A' \sin B' \sin C'$$
$$= \frac{r}{s}[\Sigma(\beta - \gamma\alpha)(\gamma - \alpha\beta) - r^2] = \frac{r}{s} \cdot t,$$

ou

$$s = \alpha\beta\gamma(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)(1 - \gamma)^2.$$

Il s'agit de montrer que $t > 0$. Or

$$\Sigma(\beta - \gamma\alpha)(\gamma - \alpha\beta) = m + ln - \Sigma\alpha\beta^2 - \Sigma\alpha\gamma^2 = m + ln - lm + 3n;$$

donc

$$\begin{aligned} t &= m + ln - lm + 3n - n^2 - 2n + m^2 - 2ln \\ &= m + n - lm - ln + m^2 - n^2 \\ &= (m + n)(1 - l + m - n) \\ &= (m + n)(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma). \end{aligned}$$

On a donc

$$\sin(A' + B' + C') = \frac{r(\alpha\beta\gamma + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)}{\alpha\beta\gamma(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma)},$$

ou

$$r = \sqrt{\alpha^2\beta^2\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 - \gamma^2\alpha^2 - \alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta\gamma}.$$

On voit que $\sin(A' + B' + C')$ est > 0 et que la réalité des angles A', B', C' repose sur l'inégalité

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 - \gamma^2\alpha^2 - \alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta\gamma \geqq 0. \qquad (1)$$

Remarques. I. Cette condition peut se mettre sous une forme plus simple si l'on y introduit les quantités

$$\alpha' = \sin a, \quad \beta' = \sin b, \quad \gamma' = \sin c.$$

Pour fixer les idées, soit $a \geqq b \geqq c$, et par suite,

$$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma, \quad \beta > \alpha\gamma.$$

La condition (1) symétrique par rapport aux lettres α, β, γ peut s'écrire successivement

$$\beta^2(1 - \alpha^2)(1 - \gamma^2) \geqq (\beta - \alpha\gamma)^2,$$
$$\beta\alpha'\gamma' \geqq \beta - \alpha\gamma,$$

$$\alpha\gamma \geqq \beta(1-\alpha'\gamma').$$
$$\alpha^2\gamma^2 \geqq \beta^2(1+\alpha'^2\gamma'^2-2\alpha'\gamma'),$$
$$1-\alpha'^2-\gamma'^2+\alpha'^2\gamma'^2 \geqq 1+\alpha'^2\gamma'^2-2\alpha'\gamma'-\beta'^2(1-\alpha'\gamma')^2,$$
$$\beta'^2(1-\alpha'\gamma')^2 \geqq (\alpha'-\gamma')^2,$$
$$\beta'(1-\alpha'\gamma') \geqq \alpha'-\gamma',$$
$$\beta'+\gamma'-\alpha' \geqq \alpha'\beta'\gamma'.$$

Le théorème n'a donc un sens que si l'on suppose

$$\sin b+\sin c-\sin a \geqq \sin a \sin b \sin c;$$

cette condition aurait dû être introduite dans l'énoncé.

II. Quand les angles A', B', C' sont réels, il existe un triangle lobatchefskien ayant pour côtés a', b', c' donnés par les formules :

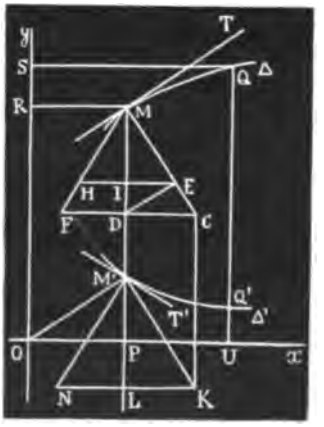
$$\cos a \operatorname{ch} a' = \cos b \operatorname{ch} b' = \cos c \operatorname{ch} c' = 1$$

et pour angles A', B', C' (LOBATCHEFSKY). (P. M.)

Question 1182.

(Voir *Mathesis* (2), VIII, p. 215).

Une courbe C *est rapportée à deux axes rectangulaires* Ox, Oy. *En un point quelconque* M *de* C *on mène la tangente* MT *et l'ordonnée* MP. *Soit* M' *le point où la parallèle à* MT *par l'origine coupe* MP. *Construire la tangente à la courbe* (X) *lieu du point* M'. *Trouver une relation entre les aires engendrées par les ordonnées* MP *et* M'P. (PETIT-BOIS.)



Note. Cette question est traitée avec application à diverses courbes par M. H. Brocard, dans le Mémoire *sur une transformation géométrique*, donné en supplément à *Mathesis* (n° de mars 1899) avec addition par M. Petit-Bois. Voir aussi, p. 246-247, une note de M. V. Retali.

Solution par M. MERLIN (Gand). Désignons par (x, y) les coordonnées de M, par (x, Y) celles de M'. L'équa-

tion de Δ étant $y=f(x)$, on trouve immédiatement, pour l'équation de Δ',

$$\frac{Y}{x}=f'(x), \quad \text{ou} \quad Y=xf'(x). \tag{1}$$

Appelons α et β les inclinaisons des tangentes en M et M' sur l'axe Ox; nous aurons

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{dY}{dx}=f'(x)+xf''(x). \tag{2}$$

Si ρ est le rayon de courbure de Δ en M, on a

$$y'' \quad \text{ou} \quad f''(x)=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho}=\frac{1}{\rho\cos^3\alpha}, \tag{3}$$

où ρ doit être considéré comme positif ou comme négatif suivant que la courbe est concave ou convexe vers l'axe indéfini des y.

Au moyen de l'égalité (3), la relation (2) prend la forme

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{x+\rho\cos^2\alpha\sin\alpha}{\rho\cos^3\alpha}. \tag{4}$$

Pour déduire de (4) la tangente M'T', soit C le centre de courbure de Δ en M; l'angle α étant égal à PMC, si l'on projette C en D sur MP, D en E sur CM, E en I sur MD, enfin qu'on prenne sur EI une longueur EH = OP, on a, en valeur absolue,

$$MD=\rho\cos\alpha, \quad ME=\rho\cos^2\alpha, \quad MI=\rho\cos^3\alpha, \quad EI=\rho\cos^2\alpha\sin\alpha,$$

ρ étant négatif dans la figure, la formule (4) se réduit à

$$\operatorname{tg}\beta=-\frac{HI}{MI}=-\operatorname{tg}HMI.$$

Il en résulte que M'T' est perpendiculaire à MH.

La construction reste la même lorsque la courbe Δ est concave dans l'autre sens.

Appelons S' l'aire comprise entre Δ', l'axe Ox et deux ordonnées M'P, Q'U et menons MR, QS perpendiculaires à OY. Une intégration par parties donne

$$S'=\int_x^{x_1} xf'(x)\,dx=\Big[xf(x)\Big]_x^{x_1}-\int_x^{x_1} f(x)\,dx$$

$$=x_1y_1-xy-\int_x^{x_1} f(x)\,dx=\text{OUQS}-\text{OPMR}-\text{MPUQ}=\text{MRSQ}.$$

Ainsi, l'ordonnée M'P de Δ' et l'abscisse MR de Δ engendrent des aires égales.

Note. Cette relation entre les aires se déduit immédiatement de l'équation (1) mise sous la forme $Ydx = xdy$; Ydx et xdy sont les aires élémentaires engendrées par M'P et MR.

M. Brocard a donné une construction plus simple de la tangente M'T' dans le supplément de *Mathesis*, mars 1899, p. 7. Il mène M'K égal et parallèle à MC, KN parallèle à Ox et rencontrant en N la perpendiculaire élevée en O sur OM' ; M'N est la normale.

Nous étions parvenu à la même construction par la méthode de Roberval. En faisant tourner toutes les vitesses de $\frac{\pi}{2}$ autour de leurs points d'application, on peut représenter par MC, M'O les vitesses de circulation des points M, M' autour de C, O ; car CM et OM' étant perpendiculaires ont même vitesse angulaire. MC représente aussi la vitesse de M sur Δ, et la projection MD sur MP représente la vitesse de translation de l'ordonnée de PM. Comme M'K = MC, on peut appliquer aux deux composantes M'O, M'K de la vitesse de M' la règle du quadrilatère des vitesses et obtenir la vitesse définitive M'N.

Il est intéressant de ramener l'une à l'autre les méthodes de M. Brocard et de M. Merlin. A cet effet, prolongeons CD jusqu'à la rencontre en F avec MH ; il suffit de démontrer que CF = KN. On a

$$\frac{CF}{EH} = \frac{MD}{MI} = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \text{d'où} \quad CF = \frac{a}{\cos^2\alpha};$$

mais OP est une projection de OM', et OM' une projection de NK, l'angle de la droite projetée avec la projection étant α ; donc

$$OP = NK\cos^2\alpha, \text{ etc.} \qquad (J\ N.)$$

M Buysens généralise la question 1182 en ces termes : *On donne une courbe* Δ, *une droite t et deux points* O, Y *Soit* T *le point où la tangente en un point* M *de* Δ *coupe t ; les droites* OT, YM *se coupent en* M' ; *construire la tangente à la courbe* Δ' *lieu de* M'.

Pour traiter ce problème, il substitue à Δ la conique qui oscule Δ en M, touche t et passe par Y. Les constructions à faire sont assez compliquées.

Question 1218.

(Voir *Mathesis*, (2), IX, p. 104).

On considère les coniques dont l'axe focal 2a est constant et telles qu'un foyer F *soit fixe et que le second foyer* F' *se trouve sur une droite donnée*

d. Lieux des sommets et des pieds des directrices, enveloppes des deux directrices (ANDRIEN). *Chercher l'enveloppe de ces coniques.* (J. N.)

Solution par M. G. GÉRARD. Le centre O des coniques considérées décrit une droite d' parallèle à d; par suite, les sommets se meuvent sur une même conchoïde de Nicomède, dont a est la constante.

Appelons D le pied de la directrice qui est situé du côté de F. Comme on a

$$OF \cdot OD = a^2,$$

si l'on prend, dans le sens OF, la longueur FE = OD, on aura

$$FO \cdot FE = a^2 = \text{constante}.$$

Le lieu de E est donc l'inverse de la droite d' par rapport au pôle F, c'est-à-dire un cercle passant par F; le lieu de D s'en déduit immédiatement : c'est la cissoïdale de ce cercle par rapport à F et à la droite d'. Soit G l'extrémité du diamètre de ce cercle, passant par F et projetons ce point en H sur la directrice; comme GH est constamment égale et parallèle à FO, H décrit une droite d''; l'enveloppe de la directrice est donc une parabole de foyer G et de tangente au sommet d'''.

Des considérations analogues s'appliquent à la seconde directrice.

Pour avoir l'enveloppe des coniques, prenons deux courbes voisines de la série, déterminées par les foyers F' et F''; si M est l'un de leurs points communs, on a

$$2a = MF \pm MF' = MF \pm MF'',$$

donc MF' = MF'', et M se trouve sur la perpeudiculaire élevée au milieu de la distance F'F''. Faisant tendre F' vers F', le point caractéristique M se trouvera, à la limite, sur la perpendiculaire élevée en F' sur d. Portons sur F'H les longueurs MN = MN = MF; N et N' se trouveront évidemment sur des droites fixes parallèles à d, par suite, le lieu de M, ou l'enveloppe des coniques, se compose de deux paraboles dont l'une des parallèles est la directrice et dont le point F est le foyer.

Solution analytique en coordonnées polaires par M. EMMERICH, et par M. BARISIEN.

Si le second foyer F' décrivait une circonférence de centre I, l'enveloppe des coniques se composerait de deux coniques ayant pour foyers F et I, pour axe focal $2a + R$ ou $\pm (2a - R)$. (J. N.).

QUESTIONS D'EXAMEN.

916. Le nombre $2^{155} - 1$ est divisible par le carré de 31.

(*Journal de Vuibert.*)

917. Dans le plan d'un carré ABCD trouver un point M, tel que $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = p^2$, $\overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = q^2$. (*Journal de Vuibert.*)

918. Trouver la somme

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (2n-1)^2 - (2n)^2$$

919. Dans un triangle, chaque médiane est proportionnelle au sinus de l'angle formé par les deux autres médianes.

920. Connaissant les côtés AB $= a$, BC $= b$, CD $= c$, DA $= d$ d'un quadrilatère inscriptible ABCD, calculer les puissances du cercle ABCD par rapport aux points E, F, G où se coupent les diagonales (AC, BD) et les côtés opposés (AD, BC), (AB, CD), ainsi que la droite m joignant les milieux de AC et BD.

1° Si l'on fait EA $= p$, EC $= p'$, EB $= q$, ED $= q'$, l'élimination de ces quantités auxiliaires entre les relations

$$pp' = P_e, \quad qq' = P_e, \quad \frac{a}{c} = \frac{p}{q'}, \quad \frac{b}{d} = \frac{q}{p},$$

$$ac + bd = (p + p')(q + q')$$

conduit à

$$P_e = \frac{abcd(ac + bd)}{(ab + cd)(ad + bc)}$$

2° On tire CF $= b'$, DF $= d'$ (CD est supposé passer entre F et AB) des relations

$$\frac{a}{c} = \frac{b + b'}{d'} = \frac{d + d'}{b'};$$

on calcule $b + b'$, $d + d'$ et l'on trouve

$$P_f = \frac{ac(ab + cd)(ad + bc)}{(a^2 - c^2)^2}.$$

3° $$4m^2 = \frac{ac(b^2 - a^2)^2 + bd(a^2 - c^2)^2}{(ad + bc)(ab + cd)}$$

Si $b = d$, on a un trapèze isoscèle, et la formule donne $4m^2 = (a - c)^2, \ldots$; si $d = 0$ on a un triangle....

921. Dans un triangle isoscèle CAB, le centre I du cercle inscrit et le centre O du cercle circonscrit sont symétriques par rapport à la base AB. Démontrer que l'angle BAC $= 36°$. (SANGANA).

A déduire de ce que l'angle ACO $=$ CAO $= \frac{3}{2}$ BAC, AOI $=$ AIO $= 90° - \frac{A}{2}$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1246. (*Énoncé rectifié*). Soient $a_0, a_1, a_2, \ldots$ des nombres tels que

$$\lim_{n=\infty} (\sqrt[n]{a_n}) = \infty ;$$

et $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ des nombres qui tendent vers une limite α. Démontrer que

$$\lim_{x=\infty} e^{x} \frac{a_0\sigma_0 + a_1\sigma_1 x + a_2\sigma_2 x^2 + \cdots}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots} = \alpha. \qquad (1)$$

ou

$$\sigma_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}\frac{x}{1} + \alpha_{n+2}\frac{x^2}{1.2} - \alpha_{n+3}\frac{x^3}{1\ 2.3} + \cdots$$

Lorsque la limite α n'existe pas, il peut se faire que le premier membre de (1) existe. Peut-on, alors, affirmer que sa valeur est toujours la même, quels que soient les nombres a_0, a_1, a_2, etc. ? (E. Cesàro.)

1247. Parmi les courbes à torsion constante, il y a des spirales logarithmiques tordues, qui sont les géodésiques de certains cônes. Quels sont ces cônes ? — Même question pour les chaînettes tordues, dont les normales principales sont les binormales d'une autre courbe.

(E. Cesàro.)

***1248.** Trouver le maximum de l'expression $\sin 2x \sin 2y$, sachant que $\sin y = m \sin x$. (A. C.).

1249. On considère toutes les coniques semblables à une conique donnée, ayant un foyer donné et pour directrice correspondante une tangente à une circonférence donnée; démontrer que l'enveloppe de ces courbes est un ovale de Descartes. (J. Neuberg.)

1250. Calculer les coordonnées du point dont la droite de Simson par rapport au triangle de référence ABC est parallèle à la droite de Lemoine, ou à l'axe antiorthique (joignant les pieds des bissectrices extérieures), ou à l'axe orthique (axe d'homologie du triangle orthique et de ABC). (E. Lemoine).

TABLE DES MATIERES(*).

ARITHMÉTIQUE; ANALYSE INDÉTERMINÉE.

Pages.

×Questions d'arithmologie; par M. G. de Rocquigny 36
×Calcul approché d'une racine carrée; d'après M. Frattini 89
×Théorème sur les nombres; par M. G. de Rocquigny 163
×Sur le produit des n premiers nombres; par M. Mandart 221
×Décomposition des grands nombres en facteurs premiers; par M. Barbette . 241
×Fractions décimales périodiques obtenues sans division; par M. Moreau. . 266
×Question 1205; solutions par MM. Van Dorsten, Emmerich, etc. . . . 169
×Question 1207; solution par M. Emmerich 173

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

×Une règle à calcul ou abaque; par M. Lambert 91
×Sur certaines identités; par M. Stuyvaert. 198
×Application du binôme de Newton; par M. Stuyvaert 199
×Concours général de 1899, question d'Algèbre; solution par M. Ploumen . 227
Question 1045. Solutions par MM. Droz Farny, Fairon. 23
×Question 594; solution par M. J. Neuberg. 95
×Question 1041; solution par M. Seligmann 97
×Question 1099; solution par M. Sintsof 120
×Question 1212; solution par M. Rose 212
×Question 1089; solution par M. Emmerich 230
Question 1203; solution par M. Emmerich 237
Question 1222; solution par M. E. Cesàro. 238
×Question 1178; solution par M. J. Neuberg 260
×Question 1223; solution par MM. Goldenberg et Déprez 261

×GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE; MÉTAGÉOMÉTRIE.

Démonstration générale du second théorème de Legendre; par M. De Tilly. 5
Sur les figures cylindriques; par M. C. Wasteels. 9
Constructions sphériques à la règle et au compas; par M. E. Barbarin . 57, 81
Sur le parallélipède; par M. Stuyvaert. 64
Formules relatives au triangle 66
Sur la sphère des douze points; par M. Ripert 90
Sur le cercle tangent à trois cercles donnés; par M. L. Orlando 160
Sur un théorème relatif à un triangle; par M. Volkof 162
Sur un théorème de M. Droz Farny (J. N.) 162
Sur les triangles sphériques (J. N.) 163
Construction du polygone de dix-sept côtés; par M. G. Fontené 179
Inscription du pentagone régulier; par M. Stuyvaert. 200

(*) Rectifications, pp. 32, 240, 264, 280. Les articles marqués d'une croix n'exigent, pour être compris, que la connaissance des mathématiques élémentaires.

Pages

Sur la somme des angles dans un triangle; par M. De Tilly 265
Question 1050; solutions par MM. Francq et Tiete 27
Question 1170; solutions par MM. Buysens et Droz Farny 28
Question 1165; solutions par MM. Soons, Ripert, etc. 50
Question 1171; solutions par MM. Emmerich et Déprez 52, 113
Question 1186; solutions par MM. Droz Farny, Buysens, etc. 75
Question 1176; solution par M. Van de Velde. 100
Question 1199; solutions par MM. Plakhowo, Soons, etc. 125
Question 1200; solutions par MM. Degueldre, Delahaye, etc. 149
Question 1185; solutions par MM. Buysens, Merlin, etc. 165
Question 1187; solutions par MM. Buysens, Merlin, etc. 166
Question 1065; solution par M. Colart 204
Question 1213; solutions par MM. Retali, Emmerich, etc. 212
Question 1091; solution par M. Emmerich. 232
Question 1109; solution par M. Emmerich. 273

COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ; GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

Question de concours; solution par M. J. Déprez. 18
Remarques sur le triangle; par M. L. Ripert 62
Théorème sur l'hyperbole; par M. G. Gérard 65
Sur les coniques homothétiques; par M. Déprez 113
Sur le point de Frégier; par M. G. Gérard 136
Sur l'hyperbole équilatère; par M. Barisien. 163
Sur les transformations quadratiques involutives; par M. L. Ripert . . 185, 217
Sur deux faisceaux de coniques; par M. Degueldre 190
Triangles inscrits dans une ellipse et circonscrits à un cercle concentrique; par M. E. Barisien 224, 248, 269
Concours général. Question de géométrie analytique, par M. Deprez . . . 250
Question 1175; solution par M. G. Gérard 29
Question 789; généralisation (A. C.) 42
Question 1054; solutions par MM. Colart, Déprez, etc. 46
Question 1172; solutions par MM. Ripert, Buysens 53
Question 1192; solution par M. V. Retali 78
Question 1156; solution par M. Gérard 99
Question 1042; solutions par MM. V. Retali, Mandart, etc 118
Question 1181; solution par M. Lorent 122
Question 1174; solution par M. G. Gérard 143
Question 1208; solutions par MM. Déprez, Ripert, etc. 205
Question 1219; solutions par MM. Retali, Barisien 207
Question 1183; solution par M. Buysens. 223
Question 1203; solutions par MM. Déprez, Soons, etc. 225
Question 1215; solution par M. Gérard. 278

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR

Surfaces [illegible] par M. V. Jamet 15
Problèmes de construction, par M. Servais 38

Pages.

Sur la trisectrice de Maclaurin; par M. V. Jerabek 61
Sur une cubique circulaire; par M. V. Retali 87
Courbes polaires réciproques des épicycloïdes et hypocycloïdes; par V. Jerabek. 105
Application de l'inversion; par M. L. Orlando 112
Sur la transformation pseudo-newtonienne; par M. V. Retali 247
Question 1047; solutions par MM. Déprez, Mandart, etc. 25
Question 1159; solution par M. Déprez 27
Question 1043; solution par MM. Buysens, Déprez, etc. 44
Question 1056; solution par M. Droz-Farny 70
Question 1161; solutions par MM. G. Gérard, Barisien, etc. 71
Question 1102; solution par M. Stuyvaert 121
Question 1129; solution par M. Droz-Farny 142
Question 1180; solutions par MM. V. Cristesco et Barisien. 145
Question 1191; solutions par MM. Buysens, Barisien, etc. 146
Question 1196; solution par M. V. Retali 148
Question 1201; solutions par MM. Déprez, Emmerich, etc.. 167
Question 1204; solution par M. V. Retali 168
Question 1206; solution par M. Barisien 172
Question 1210; solutions par MM. Gérard, Déprez, etc. 209
Question 1211; solutions par MM. Gérard et V. Retali 210
Question 1013 et 1226; solution par M. Buysens 253
Question 1084; solution par M. Droz-Farny 256
Question 1086; solutions par MM. Droz-Farny et Cristesco. 258
Question 1087; solution par M. P. Déprez 259

CALCUL DIFFÉRENTIEL; CALCUL INTÉGRAL; THÉORIE DES SÉRIES.

Sur les figures cylindriques; par M. C. Wasteels. 9
Sur la formule du binôme; par M. Godefroid 89
Paradoxe concernant l'enveloppe des ellipses homofocales; par M. Barisien. 91
×Continuité au sens analytique et continuité au sens vulgaire (P. M.). . . 129
Généralisation d'un problème de minimum classique; par M. G. Loria . . 134
Sur la spirale logarithmique; par M. G. Pirondini 153
Propriété d'une des lignes asymptotiques d'une surface reglée; par M. A. Demoulin 159
Sur la détermination de certaines intégrales; par M. Barisien 161
Question 1055; solutions par MM. Cristesco, Colart, etc. 47
Question 1189; solution par M. Buysens 77
Question 1177; solution par M. Buysens 101
Question 910; solution par M. Meurice; autres solutions. 201
Question 922; solution par M. Neuberg. 203
Question 1182; solution par M. Merlin 275

BIBLIOGRAPHIE ET BIOGRAPHIE, PUBLICATIONS RÉCENTES; VARIÉTÉS.

Burkhardt et W. Fr. Meyer. Encyclopedie der mathematischen Wissenschaften (P. M.) 20, 115

Pages.

J. Carnoy. Géométrie analytique (Espace). 21
H. Poincaré. Potentiel newtonien 21
P. Appell. Analyse mathématique 22
Ad. Mineur. Géométrie élémentaire (J. N.) 67
C. Guichard. Géométrie. Première partie 68
J. Henrici und P. Treutlein. Elementar-Geometrie. Erster Theil (J. N.). 68
I. Alexandroff. Problèmes de Géométrie élémentaire (J. N.). 68
Le congrès international des mathématiciens 85
G de Longchamps. Problèmes de Géométrie analytique (J. N.). 92
G. E. Fischer and I. J. Schwatt. Text-Book of Algebra (J. N.). 93
Ch. Méray. Analyse infinitésimale. Quatrième partie 93
P. Barbarin. Courbes usuelles (J. N.) 114
Lange. Jacob Steiner's Lebensjahre in Berlin. 114
C. Oltramare. Calcul de généralisation 115
Prix de mathématiques de l'Académie de Toulouse 1901 141
Cl. Thiry. Problèmes de mathématiques financieres. 141
E. Fourrey. Récréations arithmétiques. 141, 216
H. Brocard. Bibiographie des courbes geométriques. 164
F. J. Vaes. Regelmatige en half regelmatige Lichamen. 164
Félix Dauge (1829-1899) (P. M. et J. N.) 177
Enneper und Müller. Elliptische Functionen (P. M.) 193
Thomae. Theorie der analytischen Functionen 194
H. Poincaré. Cinématique et Mécanismes. Potentiel et mécanique des fluides 194
M. d'Ocagne. Traité de nomographie (P. M) 198
M. Cantor. Geschichte der Mathematik, 2ter Band, 1er Halbband (P. M.) . 197
E. Picard et G. Simart. Fonctions algébriques de deux variables. . . . 228
J. Maingie. Arithmétique élémentaire (Ed. Verhelst) 229
L. Lorens. Œuvres scientifiques 271
P. Brasseur. Rekenkunde 272
J. S. Mackay Arithmetic. 273

QUESTIONS D'EXAMEN.

Questions 869-876, 877-880, 881-882, 883-887, 888-891, 892-893, 894-897, 898-906, 907-909, 910-915, 916, 921, pp. 30, 55, 80, 103, 127, 152, 175, 213, 239, 263, 279
Ecole polytechnique de Paris. Concours d'admission en 1899 151

SUPPLÉMENTS (24 pages).

H. Brocard. Sur une transformation géométrique (transformation pseudo-newtonienne) (1-24 pages).

QUESTIONS(*).

	POSÉE	RÉSOL
	(1) I ou (2) I	(2) IX
95	206 (28)	
	(1) IV ou (2) I	
353	159	
×357	159	
387, 2e p.	231 (29)	NR
	(1) V ou (2) I	
415	46	NR
	(1) VI ou (2) I	
×513	71 (30)	NR
	(1) VII ou (2) I	
594	264 (31)	93
597	280	
598	280 (31)	NR
	(1) X	
699	279	
	(2) II	
767	128	
778	176	NR
784	216	
785	216	
	(2) III	
825	80	NR
876	216	NR
882	240	
×886	210	
×889	264	
892	264	
892bis	280	
	(2) IV	
905	32	NR
910	55	201
932	104	203
939	127	
953	152	
×973	216	
×986	263	
×989	264	
	(2) V	
×1002	32	
1013	80	253
1030	176	
1033	215	
×1041	240, 264	97
1042	240	119

	POSÉE	RÉSOL
	(2) V	(2) IX
1043	246 (t. VI, 31)	44
×1044	246	
1045	246	23
1046	246	
1047	280	25
1048	280	NR
×1050	280	27
	(2, VI	
1054	32	46
1055	32	47
1056	56	70
1065	104	204
1066	104	
1069	128	
×1071	128	
1072	142	
1074	142	
1075	142	
1079	192	
1082	215	
1084	215	255
1085	216	
1086	216	258
1087	216	259
1088	216	
×1089	240	230
1090	210	
×1091	240	232
1092	240, 280	NR
1096	264	
1098	280	
1099	280	120
	(2) VII.	
1101	31, 51	
1102	31	121
1107	51	
×1109	52	272
×1123	150	142
1129	175	142
1133	214	NR
×1138	215	NR
×1139	237	

	POSÉE	RESOL
	(2) VII	(2) IX
1140	237	NR
1144	261	NR
1150	279	
	(2) VIII.	
1156	31	99
1159	55	27
1160	56	
1161	78, 104	71
1162	78	NR
×1165	104	50
1166	104	
1167	104	NR
×1170	128	29
×1171	128	52, 113
1172	128	53
1173	152	NR
1174	152	143
1175	152	28
×1176	152	100
1177	176	
×1178	176	260
1179	176	101
1180	176	145
1181	215	122
1182	215	275
1183	216	
×1184	216	
×1185	216	165
1186	216	75
1187	216	166
1188	216, 239	
1189	239	77
1190	240	
1191	240	146
1192	240	78
1193	263	233
×1194	263	
×1195	264	
1196	264	148
1197	280	
1198	280	
1199	280	125
1200	280	149

(*) La rédaction de *Mathesis* a en portefeuille de bonnes solutions des questions qui ne sont pas marquées des lettres NR (non résolues); elle engage ses collaborateurs à porter de préférence leurs efforts sur celles-ci.

	POSÉE (2) IX	RESOL
1201	32	167
1202	32	235
1203	32	237
×1204	32	168
×1205	32	169
1206	32	172
×1207	56	173
1208	56	205
1209	56	207
1210	56	209
1211	80	210
×1212	80	212
×1213	80	212
1214	80	
1215	104	
1216	104	
×1217	104	
1218	104	277
×1219	128	

	POSÉE (2) IX	RESOL
1220	128	NR
×1221	128	
1222	128	238
×1223	152	261
×1224	152	
1225	152	NR
1226	152	253
×1227	176	
1228	176	NR
1229	176	NR
×1230	176	
×1231	215	
×1232	215	
1233	215	NR
1234-1214, 80: 215, 264		
×1234(nouv.)	264	
1235	215	
×1236	216	

	POSÉE (2) IX	RESOL
×1237	216	
×1238	216	NR
1239	240	
1240	240	NR
×1241	240	
×1242	240	
×1243	264	
1244	264	
1245	264	
1246	264, 280	NR
1247	280	NR
×1248	280	NR
1249	280	NR
1250	280	NR

TABLE DES NOMS.

Abel, 41.
Abonné, 171.
Aïtoff, 69.
Alexandroff, 69.
Andrien, 74, 78, 80, 215, 278.
Anglès (Robert), 198.
Audibert, 74.
Avillez (d'), 31.
Baltzer, 116.
Barbarin, 57, 81.
Barbette, 24, 241.
Barisien, 25, 27, 29, 31, 32, 44, 46, 47, 50, 54, 56, 73, 75, 77, 80, 92, 99, 101, 104, 125, 145, 146, 150, 161, 163, 167, 172, 206, 207, 209, 212, 214, 224, 233, 235, 239, 247, 255, 258, 259, 261, 264, 269, 277, 278.
Beanpain, 56. 173.
Bernoulli, 209.
Bolzmann, 21.
Borel, 117.
Boutin, 46, 140, 144.
Brasseur, 272.
Brianchon, 67, 202.
Briggs, 40, 116.
Brocard, 24, 51. 54, 90, 100, 140, 144, 164, 175, 246, 275.
Buisseret, 118.
Burckhardt, 20, 115.
Bürgi; 116.
Buysens, 28. 44. 54, 75, 77, 101, 118, 119, 146, 165, 166, 234, 253, 261, 277.
C. (A.), 44, 119, 198, 280.
Cantor (G.), 117.
Cantor (M.), 41, 197.
Carnot, 67.
Carnoy, 21.
Casey, 90.
Catalan, 39, 117.
Cauchy, 41, 117, 130, 228.
Cayley, 133.
Cazamian, 121.
Chaikevitsch, 122.
Chasles, 92, 118, 224.
Cesaro (E.), 116, 128, 152, 176, 238, 240, 264, 280.
Clavasio (Dominicus de), 198.
Clebsch, 148.
Colart, 27, 46, 49, 51, 204.
Collin, 40
Conney, 176, 215.
Coppieters, 101.
Cotes, 35.
Couturat, 117.
Cremona, 148.
Cristesco, 47, 145, 257, 258.
Curtze, 198.
Darboux, 86, 130.
Dauge, 177.
Davidoglou, 146, 166.
Degueldre, 149, 166, 190, 237, 239.
Delacuvellerie, 163.
Delahaye, 66, 75, 101, 127, 150, 212.
Demoulin, 33, 159, 166, 197.
Déprez, 18, 24, 25, 27, 30, 44, 46, 50, 52, 54, 70, 72, 99, 100, 101, 113, 114, 119, 125, 127, 145, 146, 165, 167, 171, 173, 205, 208, 209, 216, 232, 235, 250, 252, 253, 259.
Dixon, 174.
Droz-Farny, 23, 26, 28, 44, 47, 53, 70, 72, 74, 75, 100, 118, 142, 162, 165, 205, 216, 233, 240, 255, 256, 258.
Dyck (W.), 21.
Emmerich, 52, 75, 104, 126, 128, 150, 152, 165, 167, 170, 173, 176, 208, 209, 212, 213, 215, 230, 232, 236, 237, 239, 241, 255, 263, 273, 278.
Enneper, 193.
Escherich (von), 21.
Euclide, 5, 8, 67.
Euler, 41, 145, 146, 206.
Fabroni, 131.
Fairon, 24, 26.
Fermat, 131.
Fisher, 93.
Fontené, 79, 179.
Fourrey, 141, 216.
François, 51, 127.
Francq, 27.
Frattini, 89.
Frégier, 136, 143.
Frisi, 132.
Garbieri, 118.
Gasco, 116.
Gerard (G.), 29, 56, 66, 72, 76, 99, 125, 126, 136, 205, 209, 210, 212, 278.
Ghinassi, 131.
Gilbert (Ph.), 117.
Gmunden (Jean de), 116.
Gob, 28, 118, 142, 250.
Godefroid, 39.
Goldenberg, 262.
Goodseels, 197,
Graeber, 264.
Gram, 198.
Green, 22, 195.
Griffiths, 90.
Guichard, 68.
Guillet, 194.
Hacken, 44.
Harnack, 22.
Henkel, 246.
Henrici, 68.
Heusch (de), 131.
Hirst, 208.
Jefferey, 209.
Jensen, 117.
Jeřabeck, 15, 61, 87, 105.
Jordan, 117.
Juel, 176.
Kiepert, 63.
Klein (F.), 21.
Klompers, 104.
Koenigs, 159, 209.
Krahé, 48.
Lagrange, 115.
Lalanne, 195.
Lambert, 91.
Lange, 114.
Laplace, 22.
Lazzeri, 214.
Legendre, 5, 7, 8, 67, 117, 266.
Legrand, 24.
Leibniz, 41.
Leboulleux, 116.
Lemoine, 32, 43, 125, 128, 149, 172, 206, 210, 238. 280.
Leonard de Pise, 198.
Leroy, 21.
Lexell, 13.
Lez, 210.
Lobatschefsky, 5, 8, 275.

Lodge, 175.
Longchamps (G. de), 41, 92, 203.
Lorent, 122.
Lorenz, 271.
Loria, 88, 131.
Lucas (Ed.), 141.
Mackay, 272.
Maclaurin, 22, 36, 61, 101.
Maingie, 229.
Mandart, 26, 47, 119, 205, 221, 229.
Mansion, 5, 6, 8, 39, 40, 85, 93, 118, 131, 142, 178, 194, 197, 198, 207, 273, 275.
Massau, 195.
Mathews, 32, 169.
Maxwell, 272.
Méray, 93.
Merlin, 165, 166, 275.
Meurice, 201, 203.
Meyer (Fr. W.), 20, 115.
Miel, 75.
Mineur, 67.
Mister, 252.
Moreau, 266.
Moutard, 33.
Muir, 116.
Müller (Félix), 193.
Néper, 116.
Netto, 21, 116.
Neuberg, 17, 23, 68, 69, 70, 71, 72, 80, 88, 93, 95, 97, 102, 104, 114, 115, 128, 136, 144, 162, 163, 164, 165, 176, 178, 185, 201, 204, 208, 212, 213, 216, 230, 245, 252, 261, 264, 277, 278, 280.
Neumann, 22.
Newton, 40, 199.
Nicomède, 278.
Ocagne (d'), 195, 201.
Oldenburg, 41.
Oltramare, 115.
Orlando, 112, 160, 212.
Pappus, 209.
Pascal, 67, 202, 210.
Peano, 117.
Petersen, 69.
Petit-Bois, 53, 246, 275.
Picard (Em.), 228.
Pieron, 41.
Pirondini, 153.
Plakhovo, 101, 125.
Ploumen, 228.
Plucker, 92.
Poincaré, 21, 86, 194, 228.
Poisson, 22.
Poncelet, 96.
Pringsheim, 21, 116.
Proth, 163.
Pruvost, 41.
Quetelet, 229.
Regiomontanus, 198.
Renieri, 131.
Retali, 32, 56, 79, 80, 87, 118, 148, 168, 207, 208, 210, 212, 246, 275.
Ribaucour, 141.
Riccato, 132.
Ripert, 51, 53, 63, 90, 173, 185, 206, 207, 217.
Roberval, 17, 277.
Roche, 41.
Rocquigny (de), 36, 164.
Rodrigues, 41.
Rose, 118, 127, 166, 209 212.
Ruffini, 118.
Saladino, 132.
Salmon, 79.
Sangana, 279.
Schoenfliess, 117.
Schröter, 79.
Schubert, 21, 116.
Schwatt, 93.
Seligmann, 24, 97.
Serret (A.), 252.
Serret (P.), 252.
Servais (Cl.), 33, 51.
Simart, 228.
Simson, 143, 204.
Sintsof, 120, 127, 149.
Sluze (de), 88.
Soons, 26, 30, 31, 32, 50, 53, 54, 56, 74, 75, 103, 126, 150, 167, 173, 236, 239.
Staudt (von), 118.
Steiner, 63, 92, 114, 140, 142, 144.
Stevin, 116, 131.
Stifel, 40.
Study, 117.
Stuyvaert, 26, 33, 44, 65, 80, 121, 148, 152, 199, 200, 204, 212, 253.
Suarez, 116.
Tannery (P.), 198, 209.
Tarry, 144.
Taylor, 22, 115.
Terquem, 41.
Thiry (Cl.), 141.
Thomae, 194.
Tiete, 27.
Tilly (De), 5, 265.
Torricelli, 131.
Treutlein, 68.
Tucker, 204.
Vaes, 164.
Valentiner, 271.
Vandeuren, 120.
Vande Velde, 100.
Van Dorsten, 97, 127, 150, 169, 236.
Verhelst (Ed.), 229.
Vincent, 21.
Volkof, 162.
Vuibert, 152, 240, 263, 269, 279.
Wallis, 41.
Wasteels (C. E), 9, 65.
Weber (H.), 21.
Weierstrass, 93, 193.

SUR

UNE TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE

(TRANSFORMATION PSEUDO-NEWTONIENNE)

PAR

M. H. BROCARD,

CORRESPONDANT DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÉGE

SUR

UNE TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE

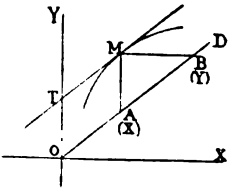
(TRANSFORMATION PSEUDO-NEWTONIENNE)

M. l'ingénieur des mines Petit-Bois ayant eu l'obligeance de me signaler une transformation qui lui avait donné d'intéressants résultats, j'ai pensé à en reprendre l'étude systématique, pour la présenter à la Société royale des sciences de Liége, à l'occasion de la question 1182 proposée par notre honorable collègue dans le journal *Mathesis* (2), t. VIII (XVIII), p. 215; 1898.

La transformation dont il s'agit consiste dans la construction suivante :

Étant donnée une courbe C *rapportée à deux axes rectangulaires* OX, OY, *on mène par l'origine* O *une parallèle* OD *à la tangente* MT *au point* M *de la courbe.*

Trouver le lieu (X) *des points* A *et le lieu* (Y) *des points* B *d'intersection de cette droite* OD *avec les parallèles à* OY, OX, *menées par le point* M.



Les équations des droites OD, MA, MB étant respectivement

$$Y = y'X, \quad X = x, \quad Y = y,$$

les transformées (X), (Y) auront pour équation

$$(X) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y = xy',$$

si y' est exprimé en x;

(Y) . . . . . $y = xy'$,

si y' est exprimé en y.

En d'autres termes, pour avoir l'équation des transformées (X) et (Y), il suffira d'égaler à $\frac{y}{x}$ la dérivée de la fonction, pourvu que cette dérivée soit exprimée seulement en x ou en y.

D'une même courbe C, la construction indiquée fera dériver deux transformées que, pour abréger, nous avons désignées sous les noms de transformée (X), correspondant aux parallèles à OY ou conservant la *même abscisse*, et de transformée (Y), correspondant aux parallèles à OX ou conservant la *même ordonnée*.

Quelques remarques très simples peuvent être faites immédiatement.

La transformation exige que les tangentes aux points M soient distinctes et ne coïncident pas. Elle n'est donc pas applicable à la droite, contrairement à ce qui arrive, en général, pour les transformations habituellement étudiées en géométrie.

Une droite MN devient la parallèle menée par l'origine O; les deux transformées (X) et (Y) coïncident.

En raison de l'exception qui se rencontre dans ce cas particulier, il paraît nécessaire de donner un nom spécial à la transformation que nous avons en vue.

Newton a traité de la transformation

$$y = X, \quad \frac{y}{x} = Y.$$

L'analogie de ces formules avec celles de la transformation actuelle paraît motiver suffisamment la désignation de *transformation pseudo-newtonienne* que M. J. Neuberg a proposé de lui attribuer.

Application au cercle.

Si la courbe C est une *circonférence de rayon* a, *dont le centre est l'origine*, on a

$$(C) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x^2 + y^2 = a^2,$$

$$(D) \quad . \quad . \quad . \quad y' = -\frac{x}{y} = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y},$$

et par conséquent

$$(X) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \text{ou} \quad r = a \operatorname{tang} \theta, \qquad \textit{cappa};$$

$$(Y) \quad . \quad . \quad . \quad y = \frac{x\sqrt{a^2 - y^2}}{y}, \quad \text{ou} \quad r = a \operatorname{cotg} \theta, \qquad \textit{cappa}.$$

Les deux transformées sont identiques, à l'orientation près, résultat qu'on pouvait prévoir.

Si la courbe C est une *circonférence tangente en* O *à* OY, on a

$$(C) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x^2 + y^2 - 2ax = 0,$$

$$(D) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y' = \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y},$$

$$(X) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y = (a - x)\sqrt{\frac{x}{2a - x}}, \qquad \textit{strophoïde},$$

$$(Y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y = \frac{x\sqrt{a^2 - y^2}}{y}, \qquad \textit{cappa}.$$

Plus généralement, pour un *cercle quelconque*, on a

$$(C) \quad \ldots\ldots \quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = a^2,$$

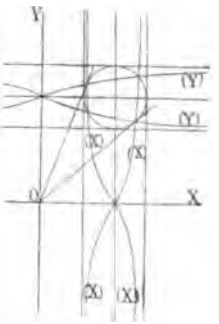
$$(D) \quad \ldots y' = \frac{x-\alpha}{\sqrt{a^2-(x-\alpha)^2}} = \frac{\sqrt{a^2-(y-\beta)^2}}{y-\beta},$$

$$(X) \quad \ldots\ldots\ldots y = \frac{x(x-\alpha)}{\sqrt{a^2-(x-\alpha^2)}},$$

$$(Y) \quad \ldots\ldots\ldots x = \frac{y(y-\beta)}{\sqrt{a^2-(y-\beta)^2}}.$$

Les deux transformées (X), (Y) sont évidemment de même nature. On passe de l'une à l'autre par le changement de x en y et de y en x.

Ces courbes admettent pour asymptotes les tangentes au cercle parallèles à OX et à OY; pour points doubles, les points de OX et de OY où viennent passer les diamètres du cercle parallèles à OX et à OY. Elles rencontrent la circonférence aux points de contact des tangentes issues de l'origine.



Pour chacune d'elles, l'origine est un *point isolé*.

Cas particuliers. — D'une vérification immédiate, notamment pour $\alpha = 0$, $\beta = 0$, ou $\alpha = a$, $\beta = a$.

* * *

On peut donner des transformées du cercle désignées par (X) et (Y) une autre définition qui nous sera très utile pour la construction de la normale en A ou B.

En effet, la courbe (X), par exemple, est le lieu géométrique du sommet A d'un angle droit OAC′ dont un côté indéfini OA passe par le point fixe O et dont l'autre côté AC′, de longueur

constante et égal au rayon MC ou a du cercle C, s'appuie à son extrémité C′ sur une droite fixe CC′.

En désignant par θ l'angle AOX, on a entre les coordonnées du point A les relations

$$x + a\sin\theta = \alpha, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tang}\theta.$$

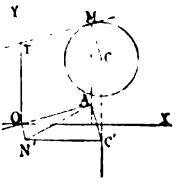
L'élimination de θ donne immédiatement

$$y = \frac{x(x-\alpha)}{\sqrt{a^2-(x-\alpha)^2}},$$

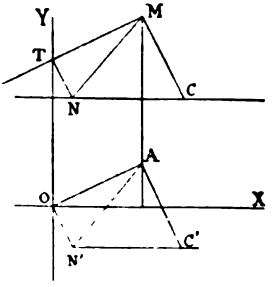
c'est-à-dire précisément l'équation (X).

Ainsi les transformées du cercle font partie des *courbes mécaniques* engendrées par le déplacement d'un angle droit, ce qui explique le fait de l'existence, parmi ces courbes, du *cappa* et de la *strophoïde*, qui admettent ce mode de génération signalé depuis longtemps.

D'après cela, le centre instantané de rotation de l'angle droit OAC′ sera au point N′ de rencontre de ON′ perpendiculaire en O à OA et de C′N′ perpendiculaire à CC′ en C. AN′ sera donc la normale en A à la transformée (X).



Si le point M se meut sur une courbe quelconque, il suffira de considérer cette courbe, dans le voisinage du point M, comme un arc du cercle de courbure en M; par conséquent, la normale en A s'obtiendra par la même construction.



Pour tracer le moins de lignes possible, observons que la normale en M′ sera parallèle à la droite MN obtenue en menant CN parallèle à OX et TN perpendiculaire à TM, et joignant M à l'intersection N de CN et de TN.

Le point N est alors déterminé par les équations

$$Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad Y - (y - xy') = -\frac{1}{y'} X,$$

où $y - xy'$ désigne OT.

Donc MN a pour coefficient d'inclinaison

$$-\frac{1}{p_1} = \frac{Y - y}{X - x} = \frac{\dfrac{1 + y'^2}{y''}}{-y' \dfrac{1 + y'^2}{y''} - y'^2 x - x} = -\frac{1}{xy'' + y'},$$

Or c'est ce qui résulterait aussi de la transformation analytique, car la courbe transformée ayant pour équation

$$y = xf',$$

la normale au point A aura pour équation

$$Y - y = -\frac{1}{f' + xf''}(X - x),$$

ou

$$Y - y = -\frac{1}{y' + xy''}(X - x),$$

ce qui est bien l'expression obtenue ci-dessus.

Ainsi, la tangente en M ayant pour coefficient d'inclinaison

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

la tangente en A aura pour coefficient d'inclinaison

$$y' + xy'' = \frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Nota. — Les normales à la courbe (X), issues de l'origine, sont parallèles aux tangentes au cercle, issues du point de OY situé à une distance de l'origine O égale à l'ordonnée du centre du cercle.

Même remarque pour les normales à la courbe Y issues de l'origine.

La normale en B s'obtiendra donc en joignant B au point où le rayon du cercle en M, prolongé s'il est nécessaire, rencontrera OX. Dans cette construction, la normale en M à la courbe remplacera la tangente en M, qui avait été utilisée dans la précédente construction.

Application a des courbes algébriques.

Le cas du cercle a été traité ci-dessus avec les détails voulus.

Parabole. — On a

(C) . . . . . $y^2 = 2ax,$

(D) . . . . . $y' = \frac{a}{y} = \sqrt{\frac{a}{2x}}.$

(X) . . . . . $y = \frac{ax}{y}$ ou $y^2 = ax,$ *parabole.*

(Y) . . . . . $y = \sqrt{\frac{ax}{2}}$ ou $y^2 = \frac{ax}{2},$ *parabole.*

Les transformées sont deux paraboles homothétiques à la proposée par rapport à l'origine qui est leur sommet commun.

Huit. — On a

(C) . . . . . $y^4 = a^2(y^2 - x^2),$

(D) $y' = \frac{a^2x}{a^2y - 2y^3} = \frac{a^2\sqrt{a^2 - y^2}}{a^2 - 2y^2} = \frac{2x}{\sqrt{a^2 - 4x^2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4x^2})}$

(X) . . . . $y = \frac{2x^2}{\sqrt{a^2 - 4x^2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4x^2})},$

(Y) . . . . . $x = \frac{y(a^2 - 2y^2)}{a^2\sqrt{a^2 - y^2}}.$

Folium de Descartes. — La courbe étant rapportée à son point double et à son axe de symétrie, on a

$$(C) \quad \ldots\ldots \quad y = x\sqrt{\frac{a-x}{a+3x}},$$

$$(D) \quad \ldots\ldots \quad y' = \frac{(a^2+ax-4x^2)}{(a+3x)\sqrt{a^2+2ax-3x^2}},$$

$$(X) \quad \ldots\ldots \quad y = \frac{(a^2+ax-4x^2)x}{(a+3x)\sqrt{a^2+2ax-3x^2}}.$$

Les résultats seraient analogues pour la *trisectrice de Mac-Laurin*, dont une des projections orthogonales est le folium de Descartes.

Note. — En réalité, il y a peu de courbes algébriques dont les transformées (X) ou (Y) soient des courbes simples, mais la transformation s'applique avec beaucoup de succès à la plupart des courbes transcendantes, comme le lecteur va pouvoir en juger.

Application a des courbes transcendantes représentées par des équations en termes finis.

Logarithmique. — On a

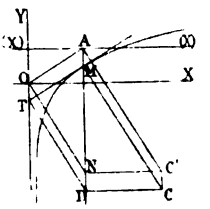
$$(C) \quad \ldots\ldots \quad y = lx,$$

$$(D) \quad \ldots\ldots \quad y' = \frac{1}{x} = e^{-y},$$

$$(X) \quad \ldots\ldots \quad y = 1, \qquad \textit{droite parallèle à OX},$$

$$(Y) \quad \ldots\ldots \quad x = ye^{y}.$$

Le fait de l'existence de la droite $y = 1$ s'explique par la propriété caractéristique de la logarithmique, d'avoir pour centre de courbure en M le point C obtenu par la construction donnée ci-dessus, lorsque le point N est sur l'ordonnée MD.



Exponentielle. — On a

(C) . . . . . $y = e^x$.

(D) . . . . . $y' = e^x = y$,

(X) . . . . . $y = xe^x$,

(Y) . . . . . $x = 1$, *droite parallèle à* OY,

comme cela a lieu pour la logarithmique, symétrique de l'exponentielle par rapport à la bissectrice de l'angle YOX.

Note. — Les résultats relatifs à l'exponentielle et à la logarithmique sont les mêmes, parce qu'ils reviennent au changement de x en y et de y en x.

Cycloïde — On a

(C) . . . $x = a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$,

(D) . . . . . $y' = \sqrt{\frac{2a-y}{y}}$,

(X) . . . . . Pour mémoire,

(Y) . . . . . $x = y\sqrt{\frac{y}{2a-y}}$, *cissoïde.*

Sinusoïde. — On a

(C) . . . . . $y = \sin x$,

(D) . . . . . $y' = \cos x = \sqrt{1-y^2}$,

(X) . . . . . Pour mémoire,

(Y) . . . . . $y = x\sqrt{1-y^2}$, *kohlenspitzencurve.*

L'équation (Y) peut s'écrire aussi

$$\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} = 1,$$

qui représente la *kreuzcurve* déduite de l'hyperbole équilatère.

Cette transformée a reçu de M. P.-H. Schoute le nom de *kohlenspitzencurve.*

Tangentoïde. — On a

(C) . . . . . $y = \text{tang } x,$

(D) . . . . . $y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + y^2,$

(X) . . . . . Pour mémoire,

(Y) . . . . . $x = \frac{y}{1 + y^2}$ *serpentine.*

On reconnaît l'équation de la serpentine, qui est du type

$$y = \frac{abx}{a^2 + x^2}.$$

Sécantoïde. — On a

(C) . . . . . $y = \sec x = \frac{1}{\cos x},$

(D) . . . . . $y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = y\sqrt{y^2 - 1},$

(X) . . . . . Pour mémoire,

(Y) . . . $x = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$ ou $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}.$

Chaînette. — On a

(C) . . . . . $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$,

(D) . . . . . $y' = \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a}$,

(X) . . Pour mémoire (une courbe transcendante),

(Y) . . . . . $y = \frac{ax}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ *kreuzcurve.*

L'équation (Y) peut s'écrire aussi

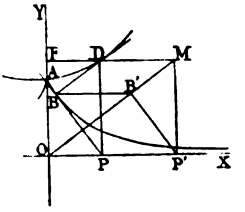
$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}.$$

La transformée (Y) est donc la *kreuzcurve* déduite du cercle

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Cette relation entre la chaînette et la *kreuzcurve* résulte d'ailleurs de la construction bien connue des points de la tractrice, développante de la chaînette.

En effet, D étant un point de la chaînette, DB la tangente, DP l'ordonnée, B la projection de P sur DB, on sait que $PB = OA = a$. Or la construction du point M revient à transporter le triangle rectangle DPB en MP'B'. Mais P'B' est la distance de l'origine O à la seconde diagonale P'F du rectangle MFOP'. La droite P'F est donc tangente au cercle O de rayon a, et le lieu des points M est la *kreuzcurve* déduite de ce cercle.



Tractrice. — On a

(C) . . . $x = -\sqrt{a^2 - y^2} + al\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$,

(D) . . . . . $y' = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$,

(X) . . . . . Pour mémoire,

(Y) . . . $y = \frac{xy}{\sqrt{a^2 - y^2}}$, ou $x^2 + y^2 = a^2$, *circonférence.*

La transformée (Y) est donc une circonférence ayant l'origine pour centre et a pour rayon, comme cela résulte immédiatement de la construction des points de la transformée en question.

APPLICATION A DES COURBES TRANSCENDANTES NON REPRÉSENTÉES PAR DES ÉQUATIONS EN TERMES FINIS, MAIS DONT LA DÉRIVÉE EST UNE FONCTION ALGÉBRIQUE EXPRIMÉE EN x OU EN y SEULEMENT.

Courbe où la sous-tangente et la sous-normale ajoutées donnent une longueur constante a.

On a

(C) . . . . . Pour mémoire,

(D) . . . . . $y' = \frac{a\sqrt{a^2 - 4y^2}}{2y}$,

(X) . . . . . Pour mémoire,

(Y) $y = \frac{x}{2y}(a + \sqrt{a^2 - 4y^2})$, ou $x^2 + y^2 - ax = 0$, *circonférence.*

La transformée (Y) est donc une circonférence de rayon $\frac{a}{2}$, tangente à OY à l'origine.

L'intégration de l'équation (D) n'est pas possible; cependant on peut acquérir quelques notions de la forme de la courbe C.

Cette courbe est composée d'une infinité d'arcs égaux, limités aux droites

$$y = \frac{a}{2}, \qquad y = -\frac{a}{2},$$

rencontrant ces droites sous un angle de 45° et recoupant l'axe des X à angle droit.

La circonférence (Y) n'est que partiellement obtenue par la construction (A).

Courbe où le rayon de courbure est inversement proportionnel à l'abscisse.

(C) . . . . . Pour mémoire,

(D) . . . . . $y' = \dfrac{x^2 + c^2}{\sqrt{a^4 - (x^2 + c^2)^2}}$.

C'est l'équation différentielle de la *courbe élastique.*

On en déduit

(X) . . . . . $y = \dfrac{x(x^2 + c^2)}{\sqrt{a^4 - (x^2 + c^2)^2}}$.

Courbe où le rayon de courbure MC *est égal au segment* MD *de l'ordonnée* MP *compris entre le point* M *et la perpendiculaire à la tangente menée par son point de rencontre avec* OY.

(C) . . . . . Pour mémoire,

(D) . . . . . $y' = \dfrac{2ax}{a^2 - x^2}$,

(X) . . . . . $y = \dfrac{2ax^2}{a^2 - x^2}$.

APPLICATION A DES COURBES TRANSCENDANTES NON REPRÉSENTÉES PAR DES ÉQUATIONS EN TERMES FINIS ET DONT LA DÉRIVÉE EST AUSSI UNE FONCTION TRANSCENDANTE.

Courbe où le rayon de courbure est égal à la somme de la sous-tangente et de la sous-normale.

(C) . . . . . $y^2 = A + Be^{\frac{x}{a}}$,

(D) . . . . . $y' = \dfrac{Be^{\frac{x}{a}}}{2a\sqrt{A + Be^{\frac{x}{a}}}}$,

(X) . . . . . $y = \dfrac{Bxe^{\frac{x}{a}}}{2a\sqrt{A + Be^{\frac{x}{a}}}}$.

Courbe où la projection du rayon de courbure sur **OY** *est égale à la somme de la sous-tangente et de la sous-normale.*

Autrement dit, courbe où le rayon de courbure **MC'** s'obtient en achevant le triangle rectangle **C'FM** formé par la sous-tangente et la sous-normale et par la droite **FT** (égale et parallèle à la normale **MN**).

On a

(C) . . . . . Pour mémoire,

(D) . . . . . $y' = l\frac{y}{a}$,

(Y) . . . . . $y = xl\frac{y}{a}$ ou $x = \frac{y}{l\frac{y}{a}}$.

Courbe où la projection du rayon de courbure sur **OX** *est constante.*

On a

(C) . . . . . Pour mémoire,

(D) . . . . . $y' = \text{tang}\frac{y-c}{a}$,

(Y) . . . . . $x = y\,\text{cotg}\frac{y-c}{a}$.

Application aux coordonnées polaires.

La transformation proposée peut se traiter pareillement par les coordonnées polaires. C'est ainsi que l'on aura les formules

(C) . . . . . $r = f(\theta)$,

(D) . . . . . $\text{tang}(\theta - \omega) = \frac{r}{r'}$,

(X) . . . . . $x = \frac{r\cos\theta}{\cos\omega}$,

(Y) . . . . . $y = \frac{r\sin\theta}{\sin\omega}$.

Appliquée à la spirale d'Archimède et à quelques autres courbes transcendantes à équations d'une simplicité analogue, cette méthode conduit à des équations entre lesquelles l'élimination de θ est possible, mais donne cependant des résultats trop compliqués pour être mentionnés ici.

Problème inverse.

Inversement, on peut se proposer de déterminer la courbe dont la transformée X ou Y est une ligne donnée.

Méthode. — L'équation de la courbe X étant sous la forme

$$(X) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = f(x),$$

on l'écrira

$$\frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x},$$

et l'on aura à intégrer l'équation différentielle

$$(D) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y' = \frac{f(x)}{x}.$$

Applications. — Voici quelques exemples :

I. *La ligne* X *est une droite*

$$(X) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = ax + b.$$

On aura donc

$$(D) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y' = a + \frac{b}{x},$$

d'où

$$(C) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = ax + blx + c,$$

équation qui comprend comme cas particuliers la *ligne droite*,

$$y = ax + c,$$

résultat évident, et la *logarithmique*,

$$y = blx,$$

propriété rencontrée ci-dessus.

II. *La courbe* X *est la serpentine*, qui a pour équation

$$(X) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = \frac{abx}{a^2 + x^2}.$$

On aura

$$(D) \quad \ldots\ldots \quad y' = \frac{ab}{a^2 + x^2} = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}},$$

d'où

$$(C) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = b \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{a}, \qquad \textit{tangentoïde}.$$

On retrouve ainsi la tangentoïde, comme cela a déjà été signalé.

III. *La courbe* X *est le trident de Newton*, qui a pour équation

$$(X) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = \frac{a[(x-\alpha)^2 + \beta^2]}{\beta(x-\alpha)}.$$

On aura

$$(D) \quad \ldots \quad y' = \frac{(x-\alpha)^2 + \beta^2}{\beta(x-\alpha)} = \frac{x-\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{x-\alpha},$$

donc

$$(C) \quad \ldots\ldots \quad y = \frac{(x-\alpha)^2}{2\beta} + \beta l(x-\alpha).$$

L'ordonnée de la courbe C résulte de l'addition de l'ordonnée d'une parabole $y = Ax^2$ et de l'ordonnée d'une logarithmique $y = Bl x$.

On remarquera que la courbe C n'existe pas du côté des x négatifs; cependant la courbe X est composée de deux branches, dont une, du côté des x positifs, correspond à la courbe C; l'autre, du côté des x négatifs, correspond à la partie imaginaire de la courbe C.

IV. *La courbe* X *est la cubique d'Agnesi*, qui a pour équation

$$(X) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = \frac{2a^3}{a^2 + x^2},$$

d'où

$$(D) \quad \ldots \quad y' = \frac{2a^3}{x(a^2 + x^2)} = \frac{2a}{x} - \frac{2ax}{a^2 + x^2}.$$

$$(C) \quad \ldots \quad y = al\frac{x^2}{a^2 + x^2}.$$

Remarque. — La génération des *kreuzcurves* circulaire ou équilatère et l'analogie de la construction de ces courbes et de la transformation ici considérée, donnent assez naturellement l'idée d'une corrélation possible entre la transformation pseudo-newtonienne et la transformation qui produit les *kreuzcurves*.

Pour le reconnaître, il suffira d'appliquer la transformation de la *kreuzcurve* à la courbe exponentielle

$$(C) \quad \ldots \quad y = e^x.$$

On aura ainsi

$$\alpha = x - 1,$$
$$\beta = y - xy,$$

et par suite

$$\beta = -\alpha e^{1+\alpha} = -e\alpha e^{\alpha},$$

c'est-à-dire une courbe homothétique à la courbe X déduite de C.

Questions diverses.

La transformation pseudo-newtonienne imaginée et étudiée par M. Petit-Bois ne peut manquer de fournir au lecteur attentif le sujet d'une foule de questions plus ou moins difficiles, parmi lesquelles nous ferons un choix d'après les indications que l'auteur nous a obligeamment signalées.

Nous pensons avec lui que la géométrie des courbes viendra s'enrichir ainsi d'un chapitre intéressant.

En effet, les courbes (C), (X), (Y) forment un groupe de lignes associées, et, après avoir étudié les relations qui existent entre les tangentes ou les normales aux points correspondants de la courbe (C) et de ses transformées (X) ou (Y), on peut se

demander très naturellement s'il existe aussi des relations analogues entre les rayons de courbure, les développées, les aires, etc.

Incidemment, voici une remarque évidente, mais qui peut avoir son utilité :

Si la courbe (C) rencontre m fois l'axe OY (*ou l'axe* OX), la transformée (X) [*ou* (Y)] passe m fois par l'origine des coordonnées ou possède en ce pôle un point multiple d'ordre m.

Il est bien évident aussi que les tangentes à la courbe (C), parallèles à OY (*ou à* OX), sont les asymptotes de la transformée (X) [*ou de la transformée* (Y)].

Si l'on veut déterminer la courbe (C) pour laquelle la transformée (X) reproduise la courbe fondamentale, on aura la condition

$$\frac{y}{x} = y' + xy'',$$

ou l'équation différentielle

$$x^2y'' + xy' - y = 0,$$

qui admet, comme on sait, la fonction

$$y = \frac{1}{x}$$

pour intégrale particulière.

La fonction

$$y = x$$

est également une intégrale de l'équation; mais, comme $y'' = 0$, on voit que c'est en réalité une intégrale singulière.

D'ailleurs, l'intégrale générale s'obtient en essayant la solution

$$y = Ax^\alpha;$$

α est alors déterminée par l'équation

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - 1 = 0,$$

qui admet pour racines réelles

$$\alpha = 1, \qquad \alpha = -1.$$

L'intégrale générale demandée est donc

$$y = Ax + \frac{B}{x},$$

A et B désignant deux constantes arbitraires.

Cette équation représente une famille d'hyperboles asymptotes à l'axe des y; le cas de l'hyperbole équilatère correspond à $A = 0$.

Le cas singulier de la droite correspond à $B = 0$.

On peut demander encore qu'il existe un rapport donné m entre les coefficients d'inclinaison des tangentes en deux points correspondants des courbes (C) et (X). On aura donc l'équation différentielle

$$y' = m(y' + xy''),$$

ou

$$mxy'' + (m - 1)y' = 0.$$

Mais sur la première forme l'intégration est immédiate et donne

$$y + C = mxy',$$

intégrale première, puis

$$y + C = C_1 x^{\frac{1}{m}},$$

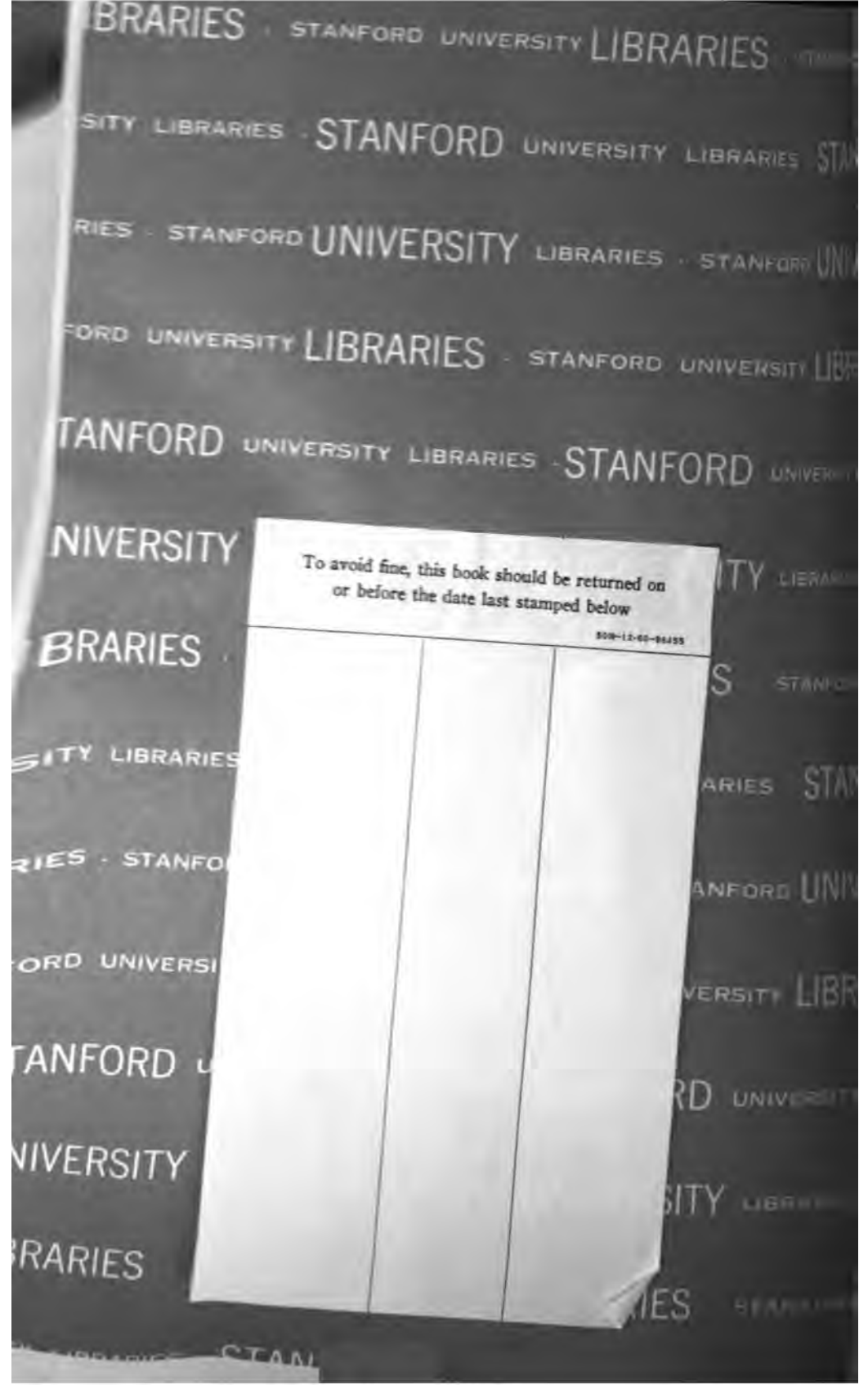
intégrale générale, représentant les paraboles d'ordre m.

Note. — Le cas de $m = 2$ ou de $m = \frac{1}{2}$ correspond aux paraboles du second degré. On a vu ci-dessus précisément que la parabole a pour transformée deux autres paraboles homothétiques à la proposée. La relation entre les tangentes s'en déduit, car la sous-tangente est double de l'abscisse, et, dans le cas général, elle est m fois la longueur de l'abscisse.

Relation entre les aires. — Soient M, M′ deux points quelconques d'une courbe Δ; N, N′ les points correspondants de sa transformée (X); P, P′ les pieds des ordonnées des points M, M′.

On a

$$2 \text{ secteur } OMM' = \int (ydx - xdy) = \int ydx - \int xy'dx$$
$$= MPP'M' - NPP'N' = MNN'M'.$$


STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
To avoid fine, this book should be returned on or before the date last stamped below

VERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIE
RD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBR
SITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · ST
ES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFOR
RARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STA
TANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIV
NIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIE
RD UNIVERSITY LIBR
SITY LIBRARIES · ST
ES · STANFORD UNIV
BRARIES · STANFOR
STANFORD UNIVERS
NIVERSITY LIBRARIE

STANFORD UNIVERSITY LIBRARY
Stanford, California

510.5
M429
v. 18-19
1898-1899